## КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА, 10–11 классы

**1.** Плоскость разбита на единичные квадратики. Рассматривается конечное множество $S$, состоящее из единичных квадратиков. Фигура $S$ разбивается на равнобедренные прямоугольные треугольники с гипотенузой 2, параллельной сторонам квадратиков, и вершинами в вершинах квадратиков. Докажите, что количество таких треугольников кратно 4.

**2.** В куче лежат $n$ камней. Играют двое. За ход игрок может разделить одну из кучек на две произвольным образом. Побеждает тот, после чьего хода в каждой кучке будет не более двух камней. Кто победит при правильной игре?

**3.** Пусть $p(n)$ — наибольший простой делитель числа $n$ (также положим $p(\pm 1) = 1$ и $p(0) = \infty$). Найти все многочлены $f \in \mathbb{Z}[x]$, такие, что множество $\{p(f(n^2)) - 2n\}_{n \geqslant 0}$ ограничено сверху.

**4.** Рассмотрим треугольник $ABC$, в который вписана окружность $\omega$ с центром $I$, касающаяся стороны $BC$ в точке $D$. Пусть $\omega_b$ и $\omega_c$ — вписанные окружности треугольников $ABD$ и $ACD$ соответственно, касающиеся стороны $BC$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Пусть $P$ — точка пересечения отрезка $AD$ с линией центров окружностей $\omega_b$ и $\omega_c$, $X$ — точка пересечения прямых $BI$ и $CP$, $Y$ — точка пересечения прямых $CI$ и $BP$. Докажите, что прямые $EX$ и $FY$ пересекаются на вписанной окружности треугольника $ABC$.

**5.** При каком наименьшем $n$ существуют целые числа $x_1, \ldots, x_n$ для которых верно равенство $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 2200^{2200}$.

**6.** В стране Оунвей некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, причем каждая дорога пролегает ровно между двумя городами, и между каждой парой городов есть не более одной дороги. Более того, из каждого города выходит ровно две дороги, и в каждый город приходят ровно две дороги. Мы хотим закрыть половину дорог таким образом, чтобы из каждого города выходила ровно одна дорога, и в каждый город входила ровно одна дорога. Докажите, что количество способов сделать это равно $2^n$, где $n$ — некоторое натуральное число.

**7.** В треугольнике $ABC$ проведены высоты $BE$ и $CF$, пересекающиеся в точке $H$. Точка $A_0$ симметрична $A$ относительно прямой $BC$. Описанные окружности треугольников $AA_0E$ и $AA_0F$ пересекают описанную окружность треугольника $ABC$ в точках $P$ и $Q$, отличных от $A$. Прямые $PQ$ и $BC$ пересекаются в точке $R$. Докажите, что прямые $EF$ и $RH$ параллельны.

**8.** Известно, что у многочлена $g(x)$ и у многочлена $f(x) = g(x)(x^2 - cx + 1)$ все коэффициенты — неотрицательные вещественные числа, а $c > 0$ — некоторое вещественное число.

( **a** ) Укажите все возможные значения числа $c$.

( **b** ) Выразите наименьшую возможную степень многочлена $f$ через $c$.

**9.** Рассмотрим в двоичной системе счисления число, запись которого содержит не менее 2019 единиц. Докажите, что можно поставить между некоторыми цифрами знаки + так, чтобы получившаяся сумма имела вид $100\ldots0_2$.

**10.** Заданы натуральные числа $n$ и $k$. Найти наименьшее число $N(n, k)$, такое, что если выбрать в $N(n, k)$-элементном множестве $n$-элементные подмножества и раскрасить их произвольным образом в два цвета, то найдется $k$ попарно непересекающихся подмножеств одного цвета.

**1.** Плоскость разбита на единичные квадратики. Рассматривается конечное множество $S$, состоящее из единичных квадратиков. Фигура $S$ разбивается на равнобедренные прямоугольные треугольники с гипотенузой 2, параллельной сторонам квадратиков, и вершинами в вершинах квадратиков. Докажите, что количество таких треугольников кратно 4.

**Решение.** Пусть $T$ — множество треугольников разбиения. Каждый треугольник накрывает два единичных квадратика по равнобедренному прямоугольному треугольнику, гипотенузой которого является диагональ квадратика.

Рассмотрим граф, вершинами которого являются квадратики, а ребрами — треугольники из множества $T$, которые покрывают соответствующие квадратики. Поскольку каждый квадратик накрывают ровно два треугольника из $T$, степень каждой вершины нашего графа равна 2. Значит, наш граф — это конечный набор попарно непересекающихся циклов.

Рассмотрим один такой цикл, образующий рамку шириной в одну клетку, и докажем, что количество треугольников в нем кратно 4. Для этого заметим, что все стороны нашей рамки имеют четную длину. Сделаем гомотетию с коэффициентом $1/2$. Тогда у возникающей рамки все стороны являются целыми числами, а потому ее площадь также целая (она равна разности площадей двух многоугольников, чьи стороны идут по линиям сетки). Значит, у исходной рамки площадь была кратна 4. Но с другой стороны, ее площадь равна количеству треугольников разбиения внутри нее. Значит, в каждой рамке количество треугольников кратно 4, что и требовалось доказать.

**2.** В куче лежат $n$ камней. Играют двое. За ход игрок может разделить одну из кучек на две произвольным образом. Побеждает тот, после чьего хода в каждой кучке будет не более двух камней. Кто победит при правильной игре?

**Решение.** Докажем, что первый игрок (Петя) победит при $n = 3$ и всех четных $n$, а при остальных $n$ победит второй (Вася). При четном $n$ Пете необходимо первым ходом разделить кучу камней пополам, а затем симметрично повторять ходы Васи.

Теперь покажем, как действовать Васе, чтобы победить при нечетном $n$. Первым ходом Петя разделит кучу на две части, ровно в одной из которых будет четное число камней. Вася должен разделить эту четную часть на две, одна из которых состоит из одного камня. Тогда после первого хода Васи останется несколько кучек (возможно, одна) с нечетным числом камней, больших 1. Продолжая действовать таким образом, Вася в конце концов добьется того, что либо после хода Пети останется ровно одна куча из 4 камней, а в остальных кучах будет по одному камню, либо будет несколько (хотя бы две) кучи из 3 камней, а в остальных кучах опять-таки будет по одному камню. В первом случае Вася просто делит кучу из 4 камней пополам и выигрывает, а во втором поступает так. Если куч из 3 камней четное число, то Вася разбивает все кучки из 3 камней на пары и после каждого хода Пети делит парную кучу, симметрично повторяя Петин ход. Если же куч из 3 камней нечетное число, то сначала Вася делит получившуюся после хода Пети кучу из двух камней пополам, а затем действует как в предыдущем случае.

**Ответ:** Петя выигрывает при $n = 3$ и при четных $n$.

**3.** Пусть $p(n)$ — наибольший простой делитель числа $n$ (также положим $p(\pm 1) = 1$ и $p(0) = \infty$). Найти все многочлены $f \in \mathbb{Z}[x]$, такие, что множество $\{p(f(n^2)) - 2n\}_{n \geqslant 0}$ ограничено сверху.

**Решение.** Зафиксируем наименьшее натуральное число $c$, такое, что $p(f(n^2)) - 2n \leqslant 2c + 1$. Как известно, у чисел вида $f(n^2)$ существует бесконечно много простых делителей. Выберем простой делитель $q > c$, тогда $q - 2n \leqslant 2c + 1$ и $n \geqslant \frac{q-1}{2} - c$. Заменяя при необходимости $n$ на $q - n$, можно считать, что $n \leqslant \frac{q-1}{2}$. Значит, найдется такое число $k$ на отрезке $[0; c]$, что $n = \frac{q-1}{2} - k$ и

$$0 \equiv f\Big(\big(\frac{q-1}{2} - k\big)^2\Big) \equiv f\Big(\big(k + \frac{1}{2}\big)^2\Big) \pmod q.$$

Значит, $q$ является делителем числителя числа

$$\prod_{k=0}^{c} f\Big(\big(k + \frac{1}{2}\big)^2\Big).$$

Но если это число не равен 0, то таких $q$ конечное количество. Поэтому найдется такое число $k_0$ на отрезке $[0; c]$, что $f\Big(\big(k_0 + \frac{1}{2}\big)^2\Big) = 0$, т.е. $f(x) = (4x - (2k_0 + 1)^2) \cdot f_1(x)$. Применяя аналогичные рассуждения к многочлену $f_1$, получаем окончательный ответ: $f(x) = A \cdot \prod_{2\nmid a}(4x - a^2)$. Ясно, что наибольший простой делитель числа $f(n^2)$ не превосходит числа $2n + \max(a)$, а потому множество $\{p(f(n^2)) - 2n\}_{n\geqslant 0}$ ограничено сверху.

**Ответ:** $f(x) = A\prod_{2\nmid a}(4x - a^2)$.

**4.** Рассмотрим треугольник $ABC$, в который вписана окружность $\omega$ с центром $I$, касающаяся стороны $BC$ в точке $D$. Пусть $\omega_b$ и $\omega_c$ — вписанные окружности треугольников $ABD$ и $ACD$ соответственно, касающиеся стороны $BC$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Пусть $P$ — точка пересечения отрезка $AD$ с линией центров окружностей $\omega_b$ и $\omega_c$, $X$ — точка пересечения прямых $BI$ и $CP$, $Y$ — точка пересечения прямых $CI$ и $BP$. Докажите, что прямые $EX$ и $FY$ пересекаются на вписанной окружности треугольника $ABC$.

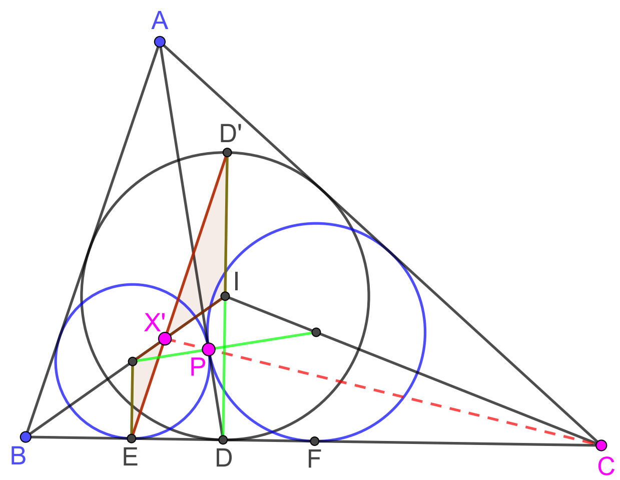


Рис. 1:

**Решение.** Пусть $D'$ — точка — диаметрально противоположная $D$ относительно окружности $\omega$. Докажем, что точка $D'$ лежит на прямой $EX$ (для прямой $FY$ рассуждения аналогичны). Для этого рассмотрим точку $X'$ пересечения $ED'$ и $CP$ и докажем, что $X = X'$ (см. рис. 1).

В самом деле, точка $P$ — внутренний центр гомотетии окружностей $\omega_b$ и $\omega_c$, точка $C$ — внешний центр гомотетии окружностей $\omega$ и $\omega_c$, а точка $X'$ — внутренний центр гомотетии окружностей $\omega$ и $\omega_b$. По теореме о трех центрах гомотетий точки $X'$, $C$ и $P$ лежат на одной прямой, а значит, $X = X'$, что и требовалось доказать.

**5.** При каком наименьшем $n$ существуют целые числа $x_1, \ldots, x_n$ для которых верно равенство $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 2200^{2200}$.

**Решение.** Рассмотрим данное равнение по модулю 9. Т.к. $a^3 \equiv 0, \pm1 \pmod 9$, а $2200^{2200} \equiv 4^{2200} \equiv 4^4 \equiv 4 \pmod 9$, то необходимо не менее четырех целых чисел. С другой стороны, четырех целых чисел достаточно, как показывает пример

$$x_1 = x_2 = x_3 = 2200^{733}, \quad x_4 = 13x_1.$$

**Ответ:** 4.

**6.** В стране Оунвей некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, причем каждая дорога пролегает ровно между двумя городами, и между каждой парой городов есть не более одной дороги. Более того, из каждого города выходит ровно две дороги, и в каждый город приходят ровно две дороги. Мы хотим закрыть половину дорог таким образом, чтобы из каждого города выходила ровно одна дорога, и в каждый город входила ровно одна дорога. Докажите, что количество способов сделать это равно $2^n$, где $n$ — некоторое натуральное число.

**Решение.** На языке теории графов задача формулируется следующим образом: у нас есть ориентированный 2-регулярный граф $G$ без петель и кратных ребер, и мы хотим доказать, что количество его 1-регулярных подграфов равно степени двойки.

Построим неориентированный двудольный граф $\Gamma$ следующим образом:

- множество вершин графа $\Gamma$ — это две копии вершин графа $G$, которые мы обозначим через $V_-$ и $V_+$;
- для каждой пары вершин $v \in V_-$ и $w \in V_+$ соединим их неориентированным ребром, если в графе $G$ эти вершины соединены ориентированным ребром так: $v \to w$.

Нужные нам 1-регулярные подграфы — это в точности совершенные паросочетания в $\Gamma$. Однако граф $\Gamma$ является 2-регулярным и потому состоит из $n$ циклов четной длины. Но тогда количество совершенных паросочетаний в нем равно $2^n$.

**7.** В треугольнике $ABC$ проведены высоты $BE$ и $CF$, пересекающиеся в точке $H$. Точка $A'$ симметрична $A$ относительно прямой $BC$. Описанные окружности треугольников $AA'E$ и $AA'F$ пересекают описанную окружность треугольника $ABC$ в точках $P$ и $Q$, отличных от $A$. Прямые $PQ$ и $BC$ пересекаются в точке $R$. Докажите, что прямые $EF$ и $RH$ параллельны.

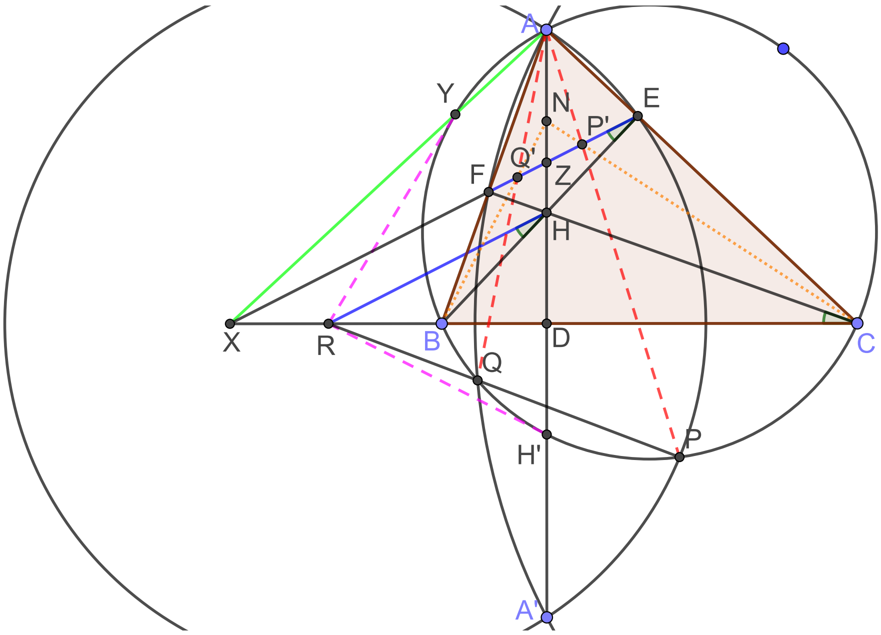


Рис. 2:

**Решение.** Введем следующие обозначения.

- $D$ — основание высоты из вершины $A$;
- $N$ — середина отрезка $AH$;
- $H'$ — точка пересечения прямой $AH$ с окружностью $(ABC)$;
- $X$ — точка пересечения $EF$ и $BC$
- $Y$ — точка пересечения $AX$ и $(ABC)$
- $P'$ — точка пересечения $CN$ и $EF$, $Q'$ — точка пересечения $BN$ и $EF$;
- $Z$ — точка пересечения $EF$ и $AD$ (см. рис. 2).

Заметим, что

$$-1 = (XD; BC) \stackrel{N}{=} (XZ; Q'P').$$

Далее, сделаем инверсию относительно окружности с центром в $A$, ортогональной окружности $(BFEC)$. Тогда точка $N$ перейдет в $A'$, $E$ — в $C$, $F$ — в $D$, а потому окружность $(AA'E)$ перейдет в прямую $CN$, а окружность $(ABC)$ — в прямую $EF$. Значит, точка $P$ при этой инверсии перейдет в $P'$, $Q$ — в $Q'$ и $X$ — в $Y$. Получаем, что $(YH'; QP) = -1$. С другой стороны, $-1 = (XD; BC) \stackrel{A}{=} (YH'; BC) = -1$. Отсюда следует, что $R$ — полюс прямой $YH'$ относительно окружности $(ABC)$.

Наконец, т.к. $RH'$ касается $(ABC)$, то $RH$ касается $(BHC)$. Значит, $\angle RHB = \angle BCH = \angle BEF$, откуда следует, что $EF \parallel RH$, что и требовалось доказать.

**8.** Известно, что у многочлена $g(x)$ и у многочлена $f(x) = g(x)(x^2 - cx + 1)$ все коэффициенты — неотрицательные вещественные числа, а $c > 0$ — некоторое вещественное число.

**( a )** Укажите все возможные значения числа $c$.

**( b )** Выразите наименьшую возможную степень многочлена $f$ через $c$.

**Решение.** Мы решим сразу оба пункта. Во-первых, заметим, что при $c \geqslant 2$ искомых многочленов не существует, т.к. $0 < f(1)/g(1) = 2 - c \leqslant 0$ — противоречие.

Во-вторых, для чисел $0 < c < 2$ запишем $c = 2\cos\theta$ и подставим в многочлен $f(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx_n$ число $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$:

$$0 = f(\alpha) = \mathrm{Im}\big(f(\alpha)\big) = b_1\sin\theta + b_2\sin 2\theta + \ldots + b_n\sin n\theta.$$

Значит, среди чисел вида $\sin k\theta$, где $1 \leqslant k \leqslant n$ есть неположительные. Докажем, что взяв $n$ наименьшим таким, что $\sin n\theta \leqslant 0$ (формально $n = \left\lceil \frac{\pi}{\arccos(c/2)} \right\rceil$), удастся подобрать многочлены $f$ и $g$ с неотрицательными коэффициентами так, чтобы равенство $f(x) = (x^2 - cx + 1)g(x)$ было бы выполнено. В самом деле, пусть коэффициент $a_k$ многочлена $g$ при $x^k$ равен $\sin(k+1)\theta$. Т.к. $\deg g = n-2 < n-1$, все числа $a_k$ положительны. С другой стороны, перемножив многочлены $x^2 - cx + 1$ и $g(x)$, мы получим многочлен $f(x) = a_0 - a_{n-2}\sin(n\theta)x^n$, все коэффициенты которого неотрицательны.

**Ответ:** $0 < c < 2$, $n = \left\lceil \frac{\pi}{\arccos(c/2)} \right\rceil$.

**9.** Рассмотрим в двоичной системе счисления число, запись которого содержит не менее 2019 единиц. Докажите, что можно поставить между некоторыми цифрами знаки + так, чтобы получившаяся сумма имела вид $100\ldots0_2$.

**Решение.** Сначала заметим, что из двоичного числа с $n$ единицами расстановкой плюсов можно получить число $[n; 3n/2]$. В самом деле, поставив знаки + между каждыми соседними цифрами, мы получим число $n$. Далее будем по одному убирать плюсы, стоящие после каждой из единиц. Тогда сумма изменится на $\overline{1b}_2 - (1 + b) = 1$, а изменений будет не менее $n/2$ (в крайнем случае мы каждой операцией убиваем две рядом стоящие единицы).

Теперь докажем, что при $n \geqslant 17$ единицах можно расставить знаки требуемым образом. Если на отрезке $[n; 3n/2]$ есть степень двойки, то все доказано. Предположим, что ее нет; тогда существует такое $\alpha \in \mathbb{N}$, что $2^\alpha + 1 \leqslant n < \frac{2^{\alpha+2}}{3}$. Докажем, что можно получить число $2^{\alpha+1}$.

Будем действовать следующим образом.

1. Сначала поставим знаки + между всеми цифрами, чтобы получить сумму $n$.
2. Выделим часть двоичной записи, которая состоит из цифр вплоть до четвертой справа цифры 1. Назовем эту часть хвостом, а всю остальную часть головой.
3. Начиная с самой левой отдельно стоящей цифры 1 хвоста, сгруппируем ее со следующими двумя цифрами, стирая знаки + между ними.
4. Повторяем шаг 3 до тех пор, пока не получится число $\geqslant 2^{\alpha+1}$.
5. Подправим получившееся число до числа $2^{\alpha+1}$.

Докажем, что мы сумеем получить число $\geqslant 2^{\alpha+1}$ до того, как шаг 3 станет невозможен. В самом деле, поскольку у нас есть хотя бы 17 единиц, можно сделать хотя бы 4 группировки. Применяя каждый раз шаг 3, проследим за изменением суммы группируемых троек цифр:

$$1+1+1 \to 111_1 = 7, \quad 1+1+0 \to 110_2 = 6, \quad 1+0+1 \to 101_2 = 5, \quad 1+0+0 \to 100_2 = 4.$$

Таким образом, на каждом ходу сумма $v$ цифр в такой тройке становится $\geqslant 2v+1$.

Предположим, что таким образом нам удалось сформировать $g$ групп, начинающихся цифрой 1 и состоящих из трех цифр, а $\ell$ — количество оставшихся несгруппированных в хвосте единиц (помним про четыре единицы в голове). Тогда $g \geqslant 4$ и $\ell \leqslant 2$, поэтому сумма получившихся чисел не меньше

$$2(n-\ell-4)+g+\ell+4 = 2n+g-\ell-4 \geqslant 2n-2 \geqslant 2^{\alpha+1}.$$

Таким образом, шаг 4 реализуем.

Осталось показать, как можно получить число $2^{\alpha+1}$. Предположим, что на шаге $1+b_0+b_1 \to \overline{1b_0b_1}_2 = 4+2b_0+b_1$ сумма стала $\geqslant 2^{\alpha+1}$. Если она в точности равна $2^{\alpha+1}$, цель достигнута. Если же нет, то т.к. каждая группировка единицы с двумя последующими цифрами увеличивает сумму не более чем на 4, то до последней группировки наша сумма равнялась одному из чисел

$$2^{\alpha+1}-3, \quad 2^{\alpha+1}-2, \quad 2^{\alpha+1}-1.$$

Посмотрим, как следует действовать в каждом из этих случаев.

- Если сумма была равна $2^{\alpha+1}-3$, то сделаем шаг $1+b_0 \to \overline{1b_0}_2$ и изменим сумму в голове с 4 до 6, получаем сумму $2^{\alpha+1}$.
- Если сумма была равна $2^{\alpha+1}-2$, то изменим сумму в голове с 4 до 6.
- Если сумма была равна $2^{\alpha+1}-1$, то изменим сумму в голове с 4 до 5.

Во всех случаях мы получаем сумму $2^{\alpha+1}$, что и требовалось доказать.

**10.** Заданы натуральные числа $n$ и $k$. Найти наименьшее число $N(n,k)$, такое, что если выбрать в $N(n,k)$-элементном множестве $n$-элементные подмножества и раскрасить их произвольным образом в два цвета, то найдется $k$ попарно непересекающихся подмножеств одного цвета.

**Решение.** Докажем, что минимальное число $N(n,k) = k(n+1)-1$. Прежде всего, покажем, что если условие выполнено, то в исходном множестве не менее $N(n,k)$ элементов. Предположим, что нам удалось найти такие подмножества. Тогда в исходном множестве есть хотя бы $nk$ элементов. Перекрасим первое из этих подмножеств $A$ в другой цвет. Тогда либо найдется еще одно $n$-элементное подмножество первого цвета и всего элементов будет не менее $k(n+1) > N(n,k)$, либо найдутся $(k-1)$ непересекающихся с $A$ подмножеств цвета 2. Но чтобы они нашлись, в нашем множестве должно быть еще не менее $(k-1)$ элемента. Поэтому всего не менее $nk+(k-1) = N(n,k)$ элементов.

Теперь докажем, что при любой раскраске в два цвета подмножеств множества $S$, состоящего из $N(n,k)$ элементов, среди $n$-элементных подмножеств найдутся $k$ попарно непересекающихся одноцветных. Будем вести доказательство индукцией по $k$. База $k=1$ очевидна: возьмем просто множество $S$.

Докажем шаг индукции. Предположим противное и рассмотрим подмножество $T \subset S$, состоящее из $(k-1)(n+1)-1$ элементов. По предположению индукции среди $n$-элементных подмножеств $T$ можно найти $(k-1)$ одноцветных попарно непересекающихся подмножеств. Тогда во множестве $S \setminus T$ мощности $n+1$ все $n$-элементные подмножества должны быть одного цвета (отличного от цвета подмножеств в $T$).

Варьируя множество $T$, мы получим, что все $n$-элементные подмножества в $S$ одноцветны — противоречие.