Московская командная олимпиада

3 октября 2010 **_Младшая лига_**

1. Последовательность натуральных чисел a_k такова, что $m+n \,\vdots\, a_m + a_n$ при любых натуральных m, n. Какие значения может принимать a_{2010}?

2. Докажите, что у любого неравнобедренного треугольника найдутся две стороны, отношение которых больше $3/5$, но меньше 1.

3. Найдите все четырехзначные числа $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – цифры, $a \neq 0$), такие что $\overline{abcd} = 11(a+b+c+d)^2$.

4. Рассмотрим числа 1, 2, ..., 2010. Сколькими способами можно выбрать из них 1005 чисел так, чтобы сумма любых двух выбранных чисел не равнялась ни 2010, ни 2011?

5. Дан белый клетчатый квадрат из n строк и n столбцов, $n > 3$. Разрешается выбрать клетку и покрасить в черный цвет все клетки, расположенные в одном с ней столбце, а также все клетки, соседние с выбранной по стороне. Клетки разрешается красить в черный цвет несколько раз. Какое наименьшее количество таких действий необходимо, чтобы весь прямоугольник стал черным?

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E – середина стороны AD, а точка F – середина стороны BC. Отрезки DF и CE пересекаются в точке O. Лучи AO и BO делят сторону CD на три равные части. Найдите отношение AD к BC.

7. В стране 100 городов, некоторые из них соединены дорогами (любая дорога соединяет напрямую два города и не пересекается с другими дорогами кроме как в городах). Министерство поручило 80 компаниям ремонт 2400 дорог. Каждая компания взялась за ремонт тех и только тех дорог, которые соединяют между собой интересные для этой компании города. Город интересен компании, если в этом городе есть представительство компании. В итоге все запланированные дороги были отремонтированы, а независимый наблюдатель обратил внимание, что все компании отремонтировали одинаковое количество дорог. Докажите, что найдется город, в котором хотя бы 8 представительств различных компаний.

8. Положительные числа x, y, z таковы, что $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+y^2} + \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{2}$. Докажите, что $\dfrac{1}{2+x^3} + \dfrac{1}{2+y^3} + \dfrac{1}{2+z^3} < \dfrac{1}{3}$.

Московская командная олимпиада

3 октября 2010 — ***Младшая лига***

1. Последовательность натуральных чисел a_k такова, что $m+n \vdots a_m + a_n$ при любых натуральных m, n. Какие значения может принимать a_{2010}?

2. Докажите, что у любого неравнобедренного треугольника найдутся две стороны, отношение которых больше $3/5$, но меньше 1.

3. Найдите все четырехзначные числа $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – цифры, $a \neq 0$), такие что $\overline{abcd} = 11(a+b+c+d)^2$.

4. Рассмотрим числа 1, 2, ..., 2010. Сколькими способами можно выбрать из них 1005 чисел так, чтобы сумма любых двух выбранных чисел не равнялась ни 2010, ни 2011?

5. Дан белый клетчатый квадрат из n строк и n столбцов, $n > 3$. Разрешается выбрать клетку и покрасить в черный цвет все клетки, расположенные в одном с ней столбце, а также все клетки, соседние с выбранной по стороне. Клетки разрешается красить в черный цвет несколько раз. Какое наименьшее количество таких действий необходимо, чтобы весь прямоугольник стал черным?

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E – середина стороны AD, а точка F – середина стороны BC. Отрезки DF и CE пересекаются в точке O. Лучи AO и BO делят сторону CD на три равные части. Найдите отношение AD к BC.

7. В стране 100 городов, некоторые из них соединены дорогами (любая дорога соединяет напрямую два города и не пересекается с другими дорогами кроме как в городах). Министерство поручило 80 компаниям ремонт 2400 дорог. Каждая компания взялась за ремонт тех и только тех дорог, которые соединяют между собой интересные для этой компании города. Город интересен компании, если в этом городе есть представительство компании. В итоге все запланированные дороги были отремонтированы, а независимый наблюдатель обратил внимание, что все компании отремонтировали одинаковое количество дорог. Докажите, что найдется город, в котором хотя бы 8 представительств различных компаний.

8. Положительные числа x, y, z таковы, что $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+y^2} + \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{2}$. Докажите, что $\dfrac{1}{2+x^3} + \dfrac{1}{2+y^3} + \dfrac{1}{2+z^3} < \dfrac{1}{3}$.