Московская командная олимпиада

3 октября 2010 **_Старшая лига_**

1. Найдите все четырехзначные числа $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – цифры, $a \neq 0$), такие что $\overline{abcd} = 11(a+b+c+d)^2$.

2. При каком наибольшем k справедливо утверждение: “в любом треугольнике найдутся две стороны, отношение которых больше k, но меньше 1/k”?

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E – середина стороны AD, а точка F – середина стороны BC. Отрезки DF и CE пересекаются в точке O. Лучи AO и BO делят сторону CD на три равные части. Найдите отношение AB к CD.

4. Последовательность натуральных чисел a_k такова, что $m+n \,\vdots\, a_m + a_n$ при любых натуральных m, n. Докажите, что $a_k = k$ при всех натуральных k.

5. Дан белый клетчатый прямоугольник из m строк и n столбцов, $m > 3$, $n > 3$. Разрешается выбрать клетку и покрасить в черный цвет все клетки, расположенные в одном с ней столбце, а также все клетки, соседние с выбранной. Клетки разрешается красить в черный цвет несколько раз. Какое наименьшее количество таких действий необходимо, чтобы весь прямоугольник стал черным?

6. Биссектрисы внутренних углов A, B, C треугольника ABC пересекают описанную окружность соответственно в точках A', B', C'. Точка I – центр вписанной окружности ABC; окружность с диаметром $A'I$ пересекает сторону BC в точках A_1, A_2. Аналогично определяются точки B_1, B_2, C_1, C_2. Докажите, что все точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

7. В алфавите некоторого языка три буквы. Некоторые неоднобуквенные слова являются запрещёнными, и любые два разных запрещённых слова различаются по длине. Докажите, что можно написать слово любой длины, не содержащее запрещённых подслов.

8. Действительные числа a, b, c таковы, что существует ровно один квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Чему равна сторона этого квадрата?

Московская командная олимпиада

3 октября 2010 ***Старшая лига***

1. Найдите все четырехзначные числа $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – цифры, $a \neq 0$), такие что $\overline{abcd} = 11(a+b+c+d)^2$.

2. При каком наибольшем k справедливо утверждение: “в любом треугольнике найдутся две стороны, отношение которых больше k, но меньше 1/k”?

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E – середина стороны AD, а точка F – середина стороны BC. Отрезки DF и CE пересекаются в точке O. Лучи AO и BO делят сторону CD на три равные части. Найдите отношение AB к CD.

4. Последовательность натуральных чисел a_k такова, что $m+n \,\vdots\, a_m + a_n$ при любых натуральных m, n. Докажите, что $a_k = k$ при всех натуральных k.

5. Дан белый клетчатый прямоугольник из m строк и n столбцов, $m > 3$, $n > 3$. Разрешается выбрать клетку и покрасить в черный цвет все клетки, расположенные в одном с ней столбце, а также все клетки, соседние с выбранной. Клетки разрешается красить в черный цвет несколько раз. Какое наименьшее количество таких действий необходимо, чтобы весь прямоугольник стал черным?

6. Биссектрисы внутренних углов A, B, C треугольника ABC пересекают описанную окружность соответственно в точках A', B', C'. Точка I – центр вписанной окружности ABC; окружность с диаметром $A'I$ пересекает сторону BC в точках A_1, A_2. Аналогично определяются точки B_1, B_2, C_1, C_2. Докажите, что все точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

7. В алфавите некоторого языка три буквы. Некоторые неоднобуквенные слова являются запрещёнными, и любые два разных запрещённых слова различаются по длине. Докажите, что можно написать слово любой длины, не содержащее запрещённых подслов.

8. Действительные числа a, b, c таковы, что существует ровно один квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Чему равна сторона этого квадрата?