Задачи командной олимпиады 9-го класса

1. Значения квадратного трёхчлена $ax^2 + 2bx + c$ отрицательны при всех x. Докажите, что значения трёхчлена $a^2x^2 + 2b^2x + c^2$ при всех x положительны.

2. Внутри треугольника ABC, в котором $\angle A = 60°$, выбрана точка T такая, что $\angle ATB = \angle ATC = 120°$. M, N – середины сторон AB, AC соответственно. Докажите, что точки A, M, T, N лежат на одной окружности.

3. Назовем билет с номером от 000000 до 999999 *отличным*, если разность некоторых двух соседних цифр его номера равна 5. Найдите число отличных билетов.

4. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые – нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы ужин, оказалось, что какие-то два человека всё ещё не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.

5. На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешается стереть с доски два различных числа и написать вместо этого их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Докажите, что когда-нибудь числа на доске перестанут меняться.

6. Можно ли провести на координатной плоскости 10 прямых так, чтобы любые две пересекались в целочисленной точке и никакие три не проходили через одну точку?

7. Известно, что $abcd = 1$, $a, b, c, d > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+d^2} \geqslant 1.$$

8. На большей дуге AB берется произвольная точка M. Из середины K отрезка MB опускается перпендикуляр на прямую MA. Докажите, что все такие перпендикуляры проходят через одну точку, не зависящую от положения точки M.