Вариант устной командной олимпиады. 10 класс. 23.12.2012.

1. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, для которых выполняются условия: $P(0) = 0$, $P(1) = 2012$ и для произвольного действительного x

$$P(x) = \frac{1}{2}(P(x-1) + P(x+1)).$$

2. В треугольнике ABC сторона AB больше AC. На продолжении стороны AB за точку A выбрана точка P такая, что $AP+PC=AB$. Отрезок AM – медиана треугольника ABC, точка Q на AB такова, что $CQ \perp AM$. Докажите, что $BQ = 2AP$.

3. Шесть вершин правильного 21-угольника покрашены красным цветом, а семь вершин – синим. Докажите, что можно найти два равных треугольника: один с красными вершинами, а другой – с синими.

4. Сумму $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{2011}{2012!}$ записали в виде несократимой обыкновенной дроби. Найдите цифру миллионов числителя.

5. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство: $\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+xz} + \frac{1}{z^2+xy} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$.

6. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D. Случилось так, что $2AD^2 = AB^2 + AC^2$. Найдите угол между прямыми AD и BC.

7. Два игрока играют в такую игру: изначально на доске написано число 2. Игрок своим ходом берет два уже написанных числа (можно брать одно и то же число дважды) и выписывает на доске либо сумму, либо произведение взятых чисел. Все выписываемые числа должны быть различны и быть меньше 1759. Выигрывает тот, кто первым выпишет на доску число 1758. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?

8. Докажите, что при натуральных $n > 2$ уравнение $x^n - y^n = 2^p$ не имеет решений в натуральных числах.