Устная командная олимпиада
22.12.2013
9 класс

1. Докажите, что если 0 < a < 1 и 0 < b < 1, то $\frac{4ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < 1$.

2. Петя и Вася играют в следующую игру. Изначально по кругу записаны числа 2011, 2012, 2013 и 2014. Каждым своим ходом Петя прибавляет по 1 к любым двум соседним числам, а после этого Вася меняет любые два соседних числа местами (не обязательно те же самые). Петя выиграет, если после его хода все числа станут равными. Сможет ли Вася ему помешать?

3. Дан набор из 2013 чисел, обладающий следующим свойством: если каждое число в наборе заменить на сумму остальных чисел, то получится тот же набор. Найдите произведение всех чисел этого набора.

4. В остроугольном треугольнике *ABC* через центр *O* описанной окружности и вершины *B* и *C* проведена окружность. Пусть *OK* – диаметр этой окружности, а *D* и *E* – точки ее пересечения с прямыми *AB* и *AC* соответственно. Докажите, что *ADKE* – параллелограмм.

5. Клетки таблицы размером 200×200 окрашены в черный и белый цвета так, что черных клеток на 404 больше, чем белых. Докажите, что найдется квадрат 2×2, в котором количество белых клеток нечетно.

6. Даны окружность ω, точка *A* внутри этой окружности и точка *B*, отличная от *A*. Рассматриваются такие всевозможные треугольники *BXY*, что отрезок *XY* является хордой окружности ω, проходящей через точку *A*. Докажите, что центры окружностей, описанных около этих треугольников, лежат на одной прямой.

7. На совместной конференции партий рыцарей и лжецов было избрано в президиум 32 человека, которых рассадили в 4 ряда по 8 человек в каждом. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. При каком наименьшем количестве лжецов в президиуме возможна такая ситуация? (*Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Двое считаются соседями, если один из них сидит непосредственно слева, справа, спереди или сзади от другого.*)

8. Найдите все такие простые числа p и q, что $p + q = (p - q)^3$.