Задача 1. *Решите в натуральных числах уравнение* $1+2^{a}+3^{b}=6^{c}$.

Задача 2. *Квадратный трехчлен* $f(x)$ *имеет два вещественных корня и для всех* x *выполнено неравенство* $f\left(x^{3}+x\right)\geq f\left(x^{2}+1\right)$. *Найдите сумму корней* $f(x)$.

Задача 3. *В некоторых клетках таблицы* 10×10 *расставлены несколько крестиков и несколько ноликов. Известно, что нет линии* (*строки или столбца*), *полностью заполненной одинаковыми значками* (*крестиками или ноликами*). *Однако, если в любую пустую клетку поставить крестик или нолик, то это условие нарушится. Какое наименьшее число знаков может стоять в таблице*?

Задача 4. *На окружности отмечены 2007 точек*, *разделяющих ее на 2007 дуг*, *из которых 669 дуг имеют длину* 1, *еще 669 дуг – длину* 2 *и остальные 669 дуг – длину* 3. *Верно ли, что среди отмеченных точек найдутся две диаметрально противоположные*?

Задача 5. *При каком наименьшем значении* n *система*

$$\begin{cases}\sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_n=0,\\ \sin x_1+2\sin x_2+\ldots+n\sin x_n=100,\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Задача 6. *Известно, что* $a,b,c>0$ и $a+b+c=1$. *Докажите*, *что*

$$\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}\leq\frac{1}{2}$$

Задача 7. *Дано* 2014 *шаров* 106 *различных цветов* (19 *шаров каждого цвета*). *Найдите наименьшее возможное значение n*, *при котором независимо от того, как эти шары расположены по кругу, можно выбрать n последовательных шаров так, что среди них было* 53 *шара различных цветов* .

Задача 8. *В тетраэдре ABCD выполняется равенство* $\angle BAC+\angle BAD=\angle ABC+\angle ABD=90^{\circ}$. *Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC, M – середина ребра CD. Доказать, что прямые AB и MO перпендикулярны.*

Задача 1. *Решите в натуральных числах уравнение* $1+2^{a}+3^{b}=6^{c}$.

Задача 2. *Квадратный трехчлен* $f(x)$ *имеет два вещественных корня и для всех* x *выполнено неравенство* $f\left(x^{3}+x\right)\geq f\left(x^{2}+1\right)$. *Найдите сумму корней* $f(x)$.

Задача 3. *В некоторых клетках таблицы* 10×10 *расставлены несколько крестиков и несколько ноликов. Известно, что нет линии* (*строки или столбца*), *полностью заполненной одинаковыми значками* (*крестиками или ноликами*). *Однако, если в любую пустую клетку поставить крестик или нолик, то это условие нарушится. Какое наименьшее число знаков может стоять в таблице*?

Задача 4. *На окружности отмечены 2007 точек*, *разделяющих ее на 2007 дуг*, *из которых 669 дуг имеют длину* 1, *еще 669 дуг – длину* 2 *и остальные 669 дуг – длину* 3. *Верно ли, что среди отмеченных точек найдутся две диаметрально противоположные*?

Задача 5. *При каком наименьшем значении* n *система*

$$\begin{cases}\sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_n=0,\\ \sin x_1+2\sin x_2+\ldots+n\sin x_n=100,\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Задача 6. *Известно, что* $a,b,c>0$ и $a+b+c=1$. *Докажите*, *что*

$$\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}\leq\frac{1}{2}$$

Задача 7. *Дано* 2014 *шаров* 106 *различных цветов* (19 *шаров каждого цвета*). *Найдите наименьшее возможное значение n*, *при котором независимо от того, как эти шары расположены по кругу, можно выбрать n последовательных шаров так, что среди них было* 53 *шара различных цветов* .

Задача 8. *В тетраэдре ABCD выполняется равенство* $\angle BAC+\angle BAD=\angle ABC+\angle ABD=90^{\circ}$. *Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC, M – середина ребра CD. Доказать, что прямые AB и MO перпендикулярны.*