МОСКОВСКАЯ КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА

по математике для 9–11 классов

9 класс

1. Известно, что хотя бы один из трёхчленов x^2+ax+b, $x^2+a^2x+b^2$, $x^2+a^3x+b^3, \ldots$ имеет действительный корень. Докажите, что тогда трёхчленов $x^2+a^nx+b^n$, имеющих действительный корень, бесконечно много.

2. В треугольнике ABC, вписанном в окружность, $AB < AC$. На стороне AC отмечена точка D так, что $AD = AB$. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку DC делит пополам дугу BC, не содержащую точку A.

3. За круглым столом 35 гостей уселись пить чай. Им принесли 10 литровых и 25 пол-литровых чашек. Каждому принесли пол-литровый чайник с чаем. Гость может вылить содержимое чайника себе или одному из своих соседей. Гости согласны пить только из полной кружки. Какое наибольшее число гостей гарантированно может напиться чая?

4. Винни-Пух долгими зимними вечерами играет в такую игру: сначала произвольным образом на клетчатую полоску, бесконечную в обе стороны, ставит 10 фишек, каждую фишку в какую-нибудь клетку (возможно, в какой-то клетке окажется несколько фишек). После этого он каждым ходом ищет две фишки, находящиеся в соседних клетках, и перекладывает левую фишку на одну клетку влево, а правую — на одну клетку вправо, вне зависимости от того, заняты эти клетки, или нет. Докажите, что, как бы ни ходил Винни-Пух, игра заканчивается через конечное число ходов.

5. О натуральных числах a, p и q известно, что $ap+1$ делится на q, а $aq+1$ делится на p. Докажите, что $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

6. В таблицу размера $k \times l$ записывают числа $+1$ и -1 так, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равнялось 1. Сколькими способами это можно сделать?

7. Докажите, что из отрезков, являющихся сторонами любого выпуклого четырёхугольника, можно всегда составить трапецию или параллелограмм.

8. На острове живёт 2014 человек, каждый из которых — либо рыцарь, либо лжец. Некоторые из жителей дружат друг с другом. Каждый житель острова, кроме президента, сделал два утверждения — «Среди моих друзей чётное число рыцарей» и «Среди моих друзей нечётное число лжецов». Докажите, что президент может сделать такие же утверждения.

Дополнительные задачи

9. Докажите, что для любых двух натуральных чисел m и n, больших 1 хотя бы одно из чисел $\sqrt[m]{n}$ или $\sqrt[n]{m}$ не превосходит $\sqrt[3]{3}$.

10. Как известно, максимальное количество частей, на которые 3 прямых делят круг, равно 7. Можно ли сделать эти прямолинейные разрезы таким образом, чтобы все части были равными по площади?