Командная олимпиада, 2015 год, 10 класс

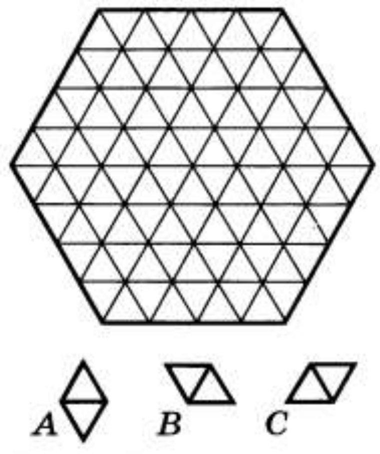
Задача 1. Верно ли, что для любого квадратного трехчлена x^2+px+q с целыми коэффициентами найдется квадратный трехчлен $2x^2+ax+b$ с целыми коэффициентами такой, что множества значений этих многочленов в целых точках не имеют общих элементов?

Задача 2. Существует ли функции f и g, определенные на множестве всех действительных чисел такие, что при любом x выполнены равенства $f(g(x))=x^2$, $g(f(x))=x^3$?

Задача 3. Пусть P — произвольная точка на стороне AC треугольника ABC. На сторонах AB и BC взяты точки M и N соответственно так, что $AM=AP$ и $CN=CP$. Перпендикуляры, проведенные в точках M и N к сторонам AB и BC соответственно, пересекаются в точке Q. Докажите, что угол $QIB=90°$, где I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Задача 4. На доске написано выражение $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$, где a,b,c,d,e,f - натуральные числа. Если число a увеличить на 1, то значение этого выражения увеличится на 3. Если в исходном выражении увеличить число c на 1, то его значение увеличится на 4; если же в исходном выражении увеличить число e на 1, то его значение увеличится на 5. Какое наименьшее значение может иметь произведение bdf?

Задача 5. Правильный шестиугольник со стороной n разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Этот шестиугольник замостили плитками в виде ромбиков, каждая из которых покрывает два треугольника. Докажите, что плиток, расположенных каждым из трех способов: вида A у вида B и вида C (см. рис), в этом замощении встретится поровну.



Задача 6. В остроугольном треугольнике ABC точка M — середина стороны BC у точки D и E — проекции точки M на стороны AB и AC соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABE и ACD, пересекаются в точке K отличной от A. В остроугольном треугольнике ABC точка M — середина стороны BC, а точки D и E — проекции точки M на стороны AB и AC соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABE и ACD пересекаются в точке K отличной от A. Докажите, что прямые AK и BC перпендикулярны.

Задача 7. Квадрат целого числа имеет вид ...09 (оканчивается цифрами 0 и 9). Докажите, что третья справа цифра десятичной записи квадрата – четная.

Задача 8. Докажите, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $abc=1$, то

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2+\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2+\left(\frac{c}{1+ca}\right)^2\geq\frac{3}{4}.$$

Задача 9. В клетки прямоугольной таблицы вписаны натуральные числа. Разрешается удваивать все числа любой строки, а также вычитать по 1 из всех чисел любого столбца. Всегда ли с помощью таких операций можно получить таблицу из одних 0?

Задача 10. Найдите все пары натуральных $(a;b)$ чисел, при которых число $\frac{a^2b+a+b}{ab^2+b+7}$ является целым.