# Устная командная олимпиада 11-х классов. 20.12.2015.

1. *Существует ли такое натуральное n, что любой треугольник можно разрезать на n многоугольников, из которых можно сложить правильный треугольник?*

2. *Для некоторого натурального числа* $n$ *число* $A = 2 + 2\sqrt{1+12n^2}$ *— целое. Докажите, что число* $A$ *является квадратом некоторого натурального числа.*

3. *Найдите все действительные решения уравнения*
$\sin(\sin x + x^2 + 1) + (\sin x + x^2 + 1)^2 = x - 1.$

4. *Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а точка M — середина стороны BC. Прямая MI пересекает сторону AB в точке D, а прямая, проходящая через B перпендикулярно AI пересекает отрезок CI в точке K. Докажите, что KD параллельно AC.*

5. *Для неотрицательных чисел* $a, b, c$ *докажите неравенство:* $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

6. *Какое минимальное число окружностей на плоскости можно выбрать так, чтобы нашлось шесть точек, через каждую из которых проходило бы не менее трех окружностей?*

7. *У Алексея есть прибор, который измеряет расстояния от всех вершин куба и точек пересечения диагоналей граней до некоторой выбранной плоскости и показывает их на экране. Однажды Алексей увидел, что на экране среди всех чисел только два различных. Наименьшее равно 2. Чему может равняться ребро куба?*

8. *Андрей и Петя играют в следующую игру: Андрей пишет на доске число m = 2, затем Петя прибавляет к написанному числу какой-то натуральный делитель написанного числа, отличный от самого числа m, и записывает результат вместо m. Далее Андрей и Петя продолжают этот процесс по очереди. Вигрывает тот игрок, который первым напишет число, больше чем 2015. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш – Андрей или Петя?*

9. *Докажите, что существуют 2015 различных натуральных чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ *таких, что для любого натурального* $k$ *(*$2 \leq k \leq 2015$*) выполняется соотношение* $a_k = \dfrac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}$.

10. *В шахматном турнире участвовали 8 шахматистов, причем каждый сыграл с каждым ровно по одной партии. Известно, что любые два шахматиста, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное число ничьих в этом турнире. (За выигрыш партии шахматисту начисляется 1 очко, за ничью – 1/2 очка, за поражение – 0.)*