Вариант командной олимпиады - 10 класс

Задача 1. Известно, что квадратные трехчлены $f_1(x)=ax^2+bx+c_1$, $f_2(x)=ax^2+bx+c_2$, …, $f_{2017}(x)=ax^2+bx+c_{2017}$ имеют по два корня. У трехчлена $f_1(x)=ax^2+bx+c_1$ один из корней обозначили x_1, у $f_2(x)=ax^2+bx+c_2$ один из корней обозначили x_2 и так далее. Наконец, у трехчлена $f_{2017}(x)=ax^2+bx+c_{2017}$ один из корней обозначили x_{2017}. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1)+f_3(x_2)+\ldots+f_{2017}(x_{2016})+f_1(x_{2017})$?

Задача 2. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для любого натурального k сумма любых k идущих подряд членов последовательности делится на $k+1$?

Задача 3. Окружность, вписанная в угол с вершиной O, касается его сторон в точках A и B, K — произвольная точка на меньшей из двух дуг AB этой окружности. На прямой OB взята точка L такая, что прямые OA и KL параллельны. Пусть M — точка пересечения окружности ?, описанной около треугольника KLB, с прямой AK, отличная от K. Докажите, что прямая OM касается окружности ?.

Задача 4. В языке племени АУ две буквы "А" и "У". Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите наибольшее возможное количество слов в языке.

Задача 5. Известно, что клетчатый квадрат можно разрезать на n одинаковых фигурок из k клеток. Верно ли, что в этом случае его всегда можно разрезать и на k одинаковых фигурок из n клеток?

Задача 6. На факультете учатся 40 юношей и 10 девушек. Каждая девушка дружит либо со всеми юношами, кто старше ее, либо со всеми юношами, кто выше ее. Докажите. что у каких-то двух юношей множество подруг совпадает.

Задача 7. На плоскости даны n векторов, длина каждого не превосходит 1. Докажите, что можно повернуть все векторы на один и тот же угол ? (некоторые по часовой стрелке, а некоторые против) так, чтобы длина суммы векторов нового набора не превосходила 1.

Задача 8. Модули чисел a,b,c,d больше 1 и $abc+abd+acd+bcd+a+b+c+d=0$. Докажите, что $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{d-1}>0$.

Задача 9. Через центры некоторых клеток шахматной доски 8 ? 8 проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь чёрных частей равна общей площади белых частей.

Задача 10. Существует ли такая функция $f(x)$, определенная для всех действительных чисел, что $|f(x+y)+\sin x+\sin y|<2$?