

МОСКОВСКАЯ УСТНАЯ КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА

- 1 Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geq 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geq 2$.
- 2 Клетки квадрата 9×9 окрашены в красный и белый цвета. Докажите, что найдётся или клетка, у которой ровно два красных соседа по углу, или клетка, у которой ровно два белых соседа по углу (или и то, и другое).
- 3 Петя придумал 1009 приведенных квадратных трёхчлена f_1, \dots, f_{1009} , среди корней которых встречаются все целые числа от 0 до 2017. Вася рассматривает всевозможные уравнения

$$f_i = f_j (i \neq j),$$

и за каждый найденный у них корень Петя платит Васе по рублю. Каков наименьший возможный доход Васи?

- 4 Существуют ли такие простые числа $p_1, p_2, \dots, p_{2017}$, что $p_1^2 - 1$ делится на p_2 , $p_2^2 - 1$ делится на p_3 , \dots , $p_{2017}^2 - 1$ делится на p_1 ?

- 5 На диагонали AC ромба $ABCD$ взята точка E , отличная от точек A и C , а на прямых AB и BC — точки N и M соответственно, причём $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K — точка пересечения прямых AM и CN . Докажите, что точки K , E и D лежат на одной прямой.

- 6 Назовем десятизначное число *интересным*, если оно делится на 11111 и все его цифры различны. Сколько существует интересных чисел?

- 7 Можно ли расположить на плоскости четыре равных многоугольника так, чтобы каждые два из них не имели общих внутренних точек, но имели общий отрезок границы?

- 8 В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причём $AM = CN$, Q — точка пересечения отрезков AN и CM . Докажите, что DQ — биссектриса угла D .

- 9 Назовём *сочетанием цифр* несколько цифр, записанных подряд. В стране Роботландии некоторые сочетания цифр объявлены *запрещёнными*. Известно, что запрещённых сочетаний конечное число и существует бесконечная десятичная дробь, не содержащая запрещённых сочетаний. Докажите, что существует бесконечная периодическая десятичная дробь, не содержащая запрещённых сочетаний.

- 10 300 бюрократов разбиты на три комиссии по 100 человек. Каждые два бюрократа либо знакомы друг с другом, либо незнакомы. Докажите, что найдутся два таких бюрократа из разных комиссий, что в третьей комиссии есть либо 17 человек, знакомых с обоими, либо 17 человек, незнакомых с обоими.