Московская устная командная олимпиада по математике. 11 класс. 16.12.2018.

Задача 1. Записаны в порядке возрастания все числа, являющиеся натуральными степенями (квадратами, кубами и т.д.) всех натуральных чисел: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 9$, ... и т.д. Конечно или бесконечно, количество n, взаимно простых с a_n?

Задача 2. Две окружности S_1 и S_2 пересекаются в двух точках, одна из них – точка A. Прямые a и b – касательные в точке A к S_1 и S_2 соответственно. PQ – диаметр S_1, TR – диаметр S_2, PQ параллельна b, TR параллельна a. Докажите, что точки P, Q, T и R лежат на одной окружности.

Задача 3. Известно, что числа $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$, $\cos 5x$ - рациональны. Может ли число $\cos x$ оказаться иррациональным?

Задача 4. Известно, что натуральное число n представимо в виде $n = a^2 + 4ab + b^2$, где $a > 1$ - его наименьший собственный делитель, а число b следующий по величине делитель. Найдите все значения, которые может принимать n.

Задача 5. Из многочленов $x-2$, $x^2 - x + 1$ можно получать другие многочлены используя операции сложения, вычитания и умножения. Каждую операцию можно применить несколько раз или не применять вовсе. Можно ли из многочленов $x-2$, $x^2 - x + 1$ получить многочлен $x^{2017} + 2017$?

Задача 6. Волшебник окрасил каждую точку пространства одной из пяти красок: красной, зеленой, синей, оранжевой и фиолетовой. Верно ли, что найдется плоскость, окрашенная не менее чем в 4 цвета?

Задача 7. В равнобедренном треугольнике *ABC* (стороны *AB* и *AC* равны) провели высоту *AD*. В треугольник *ADC* вписана окружность с центром *K*. *E* – основание биссектрисы угла *B* треугольника *ABC*. Известно, что угол *BEK* равен 45°. Чему может быть равен угол *BAC*?

Задача 8. Известно, что $a, b, c > 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите неравенство:

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} \geq \frac{3}{4}$$

Задача 9. В Новогоднем хороводе в неизвестном порядке стоят 100 Дедов Морозов и несколько Снегурочек. Известно, что если выбрать отрезок хоровода, содержащий восемь Дедов Морозов, то на этом отрезке окажется не менее пяти Снегурочек. Какое наименьшее количество Снегурочек может участвовать в хороводе?

Задача 10. Некоторые клетки таблицы 1001×1001 покрасили в синий цвет. Оказалось, что в любом столбце окрашенных клеток больше, чем неокрашенных. Обязательно ли найдутся два столбца таких, что число строк, которые пересекаются с этими двумя столбцами только в окрашенных клетках больше числа строк, которые пересекаются с этими двумя столбцами только в неокрашенных клетках?