Устная командная олимпиада по математике, 10-11 класс, 2023 год

Задача 1.

Пусть $p > 2$ простое число, а целые числа a, b, c, d не делятся на p, причем

$$\left\{\frac{ra}{p}\right\} + \left\{\frac{rb}{p}\right\} + \left\{\frac{rc}{p}\right\} + \left\{\frac{rd}{p}\right\} = 2$$

для любого целого r, не кратного p. Докажите, что хотя бы два числа из набора $\{a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d\}$ делятся на p.

Задача 2. Дано натуральное $n \geqslant 2$. Король и Принц играют в следующую игру. Они по очереди (начинает Король) заполняют пропуски коэффициентами в многочлене:

$$x^{2n} + _x^{2n-1} + _x^{2n-2} + \ldots + _x + 1.$$

Если итоговый многочлен имеет действительный корень, то побеждает Принц. Может ли Король ему помешать?

Задача 3. На плоскости нарисованы 2023 различных круга радиуса 1. Докажите, что можно выбрать множество S из 27 кругов так, что либо в множестве S любые два круга пересекаются, либо в множестве S любые два круга не пересекаются. (Касание мы здесь тоже будем понимать как пересечение.)

Задача 4.

Найдите наибольшее натуральное k, для которого все натуральные числа можно разбить на k множеств таким образом, чтобы для любого натурального $n \geqslant 15$ в любом из полученных множеств можно было найти два различных элемента с суммой n.

Задача 5.

Существует ли многочлен с действительными коэффициентами $P(x, y)$, который неотрицателен при всех значениях x, y, но при этом не может быть представлен в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами?

Задача 6.

В треугольнике ABC отметили центр вписанной окружности I и точку пересечения медиан G. Пусть P_A – основание перпендикуляра из точки C, опущенного на внешнюю биссектрису угла B, а Q_A – основание перпендикуляра из точки B на внешнюю биссектрису угла C. Аналогично определяются точки P_B, P_C, Q_B и Q_C. Докажите, что точки P_A, P_B, P_C, Q_A, Q_B, и Q_C лежат на одной окружности, центр которой лежит на прямой IG.

Задача 7.

Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. На биссектрисах CI и AI отмечены пары точек C_1, C_2 и A_1, A_2 соответственно таким образом, что $\angle C_1BC = \angle A_1BA = 90°$, а точки I, A_2, B, C_2 лежат на одной окружности. Прямые A_1C_1 и A_2C_2 пересекаются в точке P, а медианы треугольника IA_2C_2 пересекаются в точке M. Прямая PM пересекает биссектрисы CI и AI в точках R, S соответственно, а прямые A_1R и C_1S пересекаются в точке X. Докажите, что X равноудалена от точки B и прямой AC.

Задача 8.

Лабиринт представляет собой таблицу 13×26, некоторые клетки которой мы занимаем блоками. После размещения блоков в таблице мы ставим робота на ячейку и он начинает двигаться в одном из направлений вправо, влево, вниз или вверх. Он может изменить направление (любым образом) только тогда, когда достигнет блока или границы лабиринта. Найдите наименьшее число m такое, чтобы мы могли разместить в лабиринте m блоков и выбрать стартовую клетку для робота так, чтобы он мог посетить все свободные клетки.

Задача 9. Даны натуральные числа $m > 1$ и $n > 2$ и действительные числа $p, q > 0$, удовлетворяющие условию $p + q = 1$. Докажите неравенство

$$(1 - p^m)^n + np^m(1 - p^m)^{n-1} + (1 - q^n - npq^{n-1})^m > 1.$$

Задача 10. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, для которых

$$f(x) = f\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$$

при всех положительных x.