Устная командная олимпиада по математике, 8-9 класс, 2023

Задача 1. Пусть $\{a_k\}$ – возрастающая последовательность целых чисел, удовлетворяющая условию $a_{n+1} - a_n \leqslant 2023$ для всех n. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел $(i; j)$, для которых $i < j$ и a_j делится на a_i.

Решение. Рассмотрим бесконечную таблицу с 2023 столбцами. Первую строку заполним числами $a_1 + 1, a_1 + 2, ..., a_1 + 2023$. Каждую новую строку мы выстраиваем через предыдущую. Если ранее была строка $x_1 + 1, x_1 + 2, ..., x_1 + 2023$, то следующая будет $P + x_1 + 1$, $P + x_1 + 2, ..., P + x_1 + 2023$, где P – произведение всех чисел предыдущей строки. Легко видеть, что каждый элемент столбца делит следующий. Выберем 2024 последовательных строки. В каждой строке есть хотя бы один элемент последовательности из-за оценки на соседние члены. По принципу Дирихле найдутся два элемента в одном столбце, а значит больший делится на меньший. Осталось проделать это каждый раз выбирая куски таблицы ниже предыдущих.

□

Задача 2. Паша и Вадим играют в игру, Паша ходит первым. Изначально есть $3k$ пустых досок. В свой ход каждый игрок может написать неотрицательное целое число на пустой доске или стереть число на доске и заменить его строго меньшим неотрицательным целым числом. Однако Паше разрешено писать только нечетные числа, а Вадиму – только четные. Игра заканчивается, когда один из игроков не может ходить, и в этом случае побеждает другой игрок; или существует ровно k досок с числом 0, и в этом случае Вадим выигрывает, если все остальные доски содержат число 1, а в противном случае выигрывает Паша. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Вадим.

Решение.

Рассмотрим ситуацию для трех досок. После каждого хода Паши есть нечетное число, а значит возможность сходить для Вадима всегда есть. Будем следить за позицией $(0, 1, 1)$.

В такой игре если Паша оказался в позиции, где наименьшее число камней в кучках нечетное (тип 1), либо в позиции $(x, x + 1, x + 1)$ для четного x (тип 2), то Вадиму удастся победить. Так как Паша может писать только нечетное число, то из позиции типа 1 он может попасть только в позицию типа 1. При этом Вадим либо имеет возможность свести игру к ситуации $(2k, 2k + 1, 2k + 1)$, если Паша уменьшил какое-то из чисел до минимального, либо сходить так, чтобы позиция снова осталась типа 1 в остальных случаях (максимальное число заменим на наибольшее возможное четное). Из позиции типа 2 Паша точно переходит в позицию типа 1. Тогда закончится все позицией $(0, 1, 1)$.

Пусть Паша первым ходом пишет число c. Тогда Вадим на другой доске напишет $c + 3$. Тогда если Паша пишет на третьей, то Вадим напишет $c + 1$ на второй доске. А если Паша меняет число на первой или второй доске, то Вадим на третьей доске напишет $c + 3$. Получаем позицию 1 или 2 типа.

Теперь создадим общую стратегию для Вадима. Разобьем доски на k троек и в каждой будем играть по этой схеме. Если Паша ходит в одну из троек, то мы отвечаем по правилам для этой тройки. В конце игры будет k нулей и $2k$ единиц.

□

Задача 3. Прямоугольник разбит на несколько (более одного) прямоугольников со сторонами, параллельными сторонам исходного, таким образом, что любая горизонтальная и любая вертикальная прямая вместе с прямоугольником делит и какой-то из прямоугольников разбиения. Докажите, что какой-то из прямоугольников разбиения не имеет общих точек с границей исходного.

Решение. Выберем левый верхний прямоугольник и пойдем по его правой стороне вниз. Идем, пока в какой-то прямоугольник не уткнемся. Рассмотрим теперь путь влево и путь вправо. Хотя бы один из них должен быть блокирован. Если это путь влево, то мы идем туда до остановки, а потом вверх, пока не упремся. Точно упремся, так как там первый прямоугольник. В охваченной с трех сторон нашим путем области точно найдется нужный нам прямоугольник, так как извне туда прямоугольники залезть не могли. Если блокирован путь вправо, то идем туда до остановки и снова смотрим возможные пути (теперь вверх и вниз). Если вниз путь блокирован, то идем туда, а потом снова налево. С учетом первого блокировавшего прямоугольника получим прежнюю ситуацию. Если блокирован путь вверх, то мы опять нашли область, которая с трех сторон охвачена нашим путем. При этом она не может полностью заполниться прямоугольниками с верхними основаниями из-за последнего блока. Следовательно, есть искомый.

□

Задача 4. Петя построил граф с n вершинами. Вася за один ход может выбрать $2 \leqslant k \leqslant n$ вершин, заплатить Пете k монет, стереть между этими k вершинами все проведённые рёбра, а все рёбра, которых не было, провести. Найдите наименьшее число монет, которым должен запастись Вася, чтобы любой граф Пети за несколько ходов сделать связным.

Ответ: Понадобится n монет.

Решение. Если в графе изначально нет ребер, то, так или иначе, придется затронуть все вершины хотя бы по разу, поэтому монет не меньше n. Почему за n всегда можно справиться: рассмотрим все $k \leqslant n$ компонент связности графа, возьмем по одной вершине из каждой. Заплатив k монет мы добьемся полной связности.

□

Задача 5. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка P. Рассмотрим проекции точки P на стороны треугольника ABC. Докажите, что можно так выбрать еще одну точку на плоскости, что вместе с тремя проекциями они образуют параллелограмм, не выходящий за пределы треугольника ABC.

Решение. Остроугольный треугольник ABC разбивается на три треугольника AOB, BOC и COA, где O – центр описанной окружности ABC. Не умаляя общности можно считать, что точка P лежит внутри или на сторонах треугольника AOB. Пусть точки D, E и F – проекции на BC, AC и AB соответственно. Рассмотрим параллелограмм $DFEX$. Достаточно доказать, что $\angle XEF \leqslant \angle CEF$. Про вторую пару углов утверждение будет аналогично. Опустим перпендикуляр OH на сторону BC. Точки B, F, P и D лежат на одной окружности. Тогда $\angle BFD = \angle BPD$. $\angle PBD \geqslant \angle OBH$, тогда $90° - \angle PBD \leqslant 90° - \angle OBH$, следовательно, $\angle BPD \leqslant \angle BOH$. При этом $\angle BOH = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC$. Тогда $\angle BFD = \angle BPD \leqslant \angle BOH = \angle BAC$, так что $\angle BFD \leqslant \angle BAC$.

□

Задача 6. Все стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равны, а $\angle BCD = 2\angle ACE$. Найдите $\angle ACE$.

Ответ: 30°.

Решение. Повернем треугольник ABC относительно точки C так, чтобы B совпало с точкой D. Точка A перейдет в A'. Легко понять, что треугольники ACE и $A'CE$ равны. При этом D – центр описанной окружности $A'CE$, а в треугольнике DEA' все стороны равны, поэтому $\angle ACE = \angle A'CE = \frac{1}{2}\angle A'DE = 30°$. □

Задача 7. Дано простое число p. Последовательность натуральных чисел a_n для всех натуральных n удовлетворяет соотношению $a_{n+1} = pa_n - (p-1)\cdot s(a_n)$, где $s(x)$ – наибольшая точная p-я степень, не превосходящая x. Докажите, что либо все члены последовательности – точные p-е степени, либо среди членов последовательности не встретится ни одной точной p-й степени.

Решение.

Понятно, что если $a_1 = m^p$, то все следующие $a_n = m^p$. Иначе, допустим, a_{l+1} – первая точная p–я степень. То есть $q^p < a_l < (q+1)^p$, тогда

$$a_{l+1} < p(q+1)^p - (p-1)q^p = q^p + p\cdot C_p^1 q^{p-1} + \dots < (q+p)^p.$$

Последнее верно, т.к. каждое слагаемое справа, начиная с третьего, больше, чем слева в $p, p^2, \dots, p^{p-1}$ раз, ну а первые два слагаемых одинаковы.

Тогда a_{l+1} может быть равно $(q+1)^p, (q+2)^p, \dots, (q+(p-1))^p$. Но также $a_{l+1} = pa_l - (p-1)q^p \equiv q^p \pmod p$. Противоречие, например, по МТФ (ну или просто скобки там раскрыть по биному).

□

Задача 8. У Полины и Веры есть две шахматные доски 100×100. Обе они каким-то образом нумеруют каждую ячейку числами от 1 до 10000. Возможно ли, что для каждых двух чисел a и b, имеющих общую сторону в доске Полины, эти два числа достижимы одним ходом коня в доске Веры (то есть конь может сходить из одной из клеток в другую)?

Ответ: Нет.

Решение. Заметим, что доску Полины мы можем пронумеровать любым удобным нам образом и вопрос задачи состоит лишь в том, существует ли на доске Веры удовлетворяющая условиям задачи перестановка. Предположим, что существует. Для удобства пронумеруем клетки доски Полины подряд слева направо, сверху вниз. Для первых двух строк нумерация показана на рисунке ниже.

1	2	3	4	...	99	100
101	102	103	104	...	199	200

Любой квадрат 2×2 на доске Полины должен соответствовать некоторому ромбу на доске Веры. Тогда рассмотрим цепочку из 99 квадратов, соединяющих два соседних угла доски Полины.

В нашей нумерации это квадраты $1-2-101-102$, $2-3-102-103$, …, $99-100-199-200$.

Каждый из них перейдёт в некоторый ромб на доске Веры. При этом угловая клетка должна обязательно переходить в угловую, так как только у таких ровно два соседа.

Без ограничения общности будем считать, что клетка 1 осталась на месте в левом верхнем углу. Тогда квадрат $1-2-101-102$ перейдёт на доске Веры в единственно возможный ромб, при этом клетка с числом 102 будет находиться строго ниже и правее клетки с числом 2. Так как на доске Полины квадрат $2-3-102-103$ имеет с квадратом $1-2-101-102$ общую сторону $2-102$, то аналогичная общая сторона будет и у соответствующих ромбов на доске Веры. Тогда, так как клетка с числом 3 является вершиной ромба, противоположной клетке с числом 102, то, не смотря на то, что тут уже есть варианты как именно построить ромб, она точно будет выше и левее клетки с числом 103.

По тем же соображениям, клетка с числом 4 будет на доске Веры выше и левее клетки с числом 104, клетка с числом 5 выше и левее клетки с числом 105 и так далее, клетка с числом 100 выше и левее клетки с числом 200.

Но тогда клетка с числом 100 не сможет оказаться угловой на доске Веры, так как единственная угловая клетка, у которой есть клетки одновременно правее и ниже её уже занята числом 1. Таким образом мы получили противоречие, следовательно, такой расстановки чисел не существует.

□

Задача 9. Пусть $p(n)$ – произведение всех ненулевых цифр числа n. Вычислите

$$p(1) + p(2) + \dots + p(2023).$$

Ответ: 194883.

Решение. Разобьем сумму на три блока $p(1)+p(2)+\ldots+p(999)$, $p(1000)+p(1001)+\ldots+p(1999)$ и $p(2000)+p(2001)+\ldots+p(2023)$. Понятно, что достаточно научиться идейно считать первый блок. Второй блок будет отличаться от первого на единицу за счет первого слагаемого, в остальном первые единицы на произведения не повлияют. А третий блок руками сделается.

Вернемся к первому блоку. Рассмотрим произведение $(1+1+2+3+4+5+6+7+8+9)(1+1+2+3+4+5+6+7+8+9)(1+1+2+3+4+5+6+7+8+9)=46^3$. Легко видеть, что вклад каждого трехзначного числа ровно один раз встретится при раскрытии скобок (дополнительная единица выбирается там, где стоит ноль в числе). Следовательно, мы еще учли фейковую комбинацию 000. Тогда получаем, что наша сумма равна $(46^3-1)+46^3+2\cdot(46+46+14)=194883$. □

Задача 10. При каком наибольшем M неравенство

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\geqslant\frac{M}{(a+b+c)^2}$$

выполнено для всех неотрицательных a, b, c, из которых никакие два не равны нулю?

Ответ: $M=10$.

Решение. Легко видеть, что при $M=10$ на наборе $(t,t,0)$ будет точное равенство, а значит больше точно быть не может (При большем M на том же наборе левая часть останется прежней, а правая увеличится). Осталось проверить, что при этом значении неравенство всегда выполнено. Пусть c – минимальное из чисел набора. Введем две новые переменные: $x=a+\frac{c}{2}$, $y=b+\frac{c}{2}$. Тогда $\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\geqslant\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$. Левая же часть будет равна $\frac{10}{(x+y)^2}$. Теперь достаточно доказать неравенство между данными двумя частями. Домножим обе части на $(x+y)^2$ и преобразуем: $2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{2}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}\geqslant 7$. Остается заметить, что $\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2\geqslant 2$, а $2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{2}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}\geqslant 5$. Последнюю оценка верна, поскольку при $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$ неравенство $2t+\frac{2}{t}\geqslant 5$ эквивалентно неравенству $\frac{(2t-1)(t-2)}{t}\geqslant 0$, а это верно. □