Московский турнир матбоев. Полуфинал
Лига 11А. 27 ноября 2005

1. В клетках таблицы $n \times n$ первоначально стоят нули. Разрешается прибавить единицу к n клеткам, стоящим в попарно различных строках и попарно различных столбцах. Докажите, что такими операциями можно получить любую таблицу, в которой все числа – целые неотрицательные и все суммы чисел по строкам и столбцам равны.

2. В пространстве даны два тетраэдра. Известно, что их проекции на любую плоскость являются многоугольниками с одинаковым числом вершин. Докажите, что тетраэдры гомотетичны.

3. Дана последовательность x_n:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{1 - 2x_n}, \quad n = 1,2,\ldots$$

   Докажите, что она непериодическая.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что числа 1, 2, ..., $3n$ можно разбить на n групп по три числа, в каждой из которых одно равно сумме двух других.

5. Конструктор состоит из прямоугольных деталей, уложенных в один слой в прямоугольную коробку. В бракованном наборе у каждой детали одно из двух горизонтальных измерений оказалось немного меньше стандартного. Верно ли, что у коробки также можно уменьшить одно горизонтальное измерение и при этом детали по-прежнему можно будет уложить в нее в один слой?

6. Найдите все натуральные k, при которых выражение

$$\sin kx \, \sin^k x + \cos kx \, \cos^k x - \cos^k 2x$$

   принимает при всех x одно и то же значение.

7. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а точки A', B', C' симметричны A, B, C относительно противоположных сторон треугольника. Докажите, что окружности, описанные около треугольников OAA', OBB', OCC', имеют, помимо O, еще одну общую точку.

8. Пусть $S(d)$ — сумма цифр числа d. Докажите, что при бесконечно многих n уравнение $x + S(x) + S(S(x)) = n$ имеет по крайней мере три решения.

Московский турнир матбоев. Полуфинал
Лига 10А. 27 ноября 2005

1. В клетках таблицы $n \times n$ первоначально стоят нули. Разрешается прибавить единицу к n клеткам, стоящим в попарно различных строках и попарно различных столбцах. Докажите, что такими операциями можно получить любую таблицу, в которой все числа – целые неотрицательные и все суммы чисел по строкам и столбцам равны.

2. Дана последовательность x_n:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{1 - 2x_n}, \quad n = 1,2,\ldots$$

   Докажите, что она непериодическая.

3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что числа 1, 2, ..., $3n$ можно разбить на n групп по три числа, в каждой из которых одно равно сумме двух других.

4. Конструктор состоит из прямоугольных деталей, уложенных в один слой в прямоугольную коробку. В бракованном наборе у каждой детали одно из двух горизонтальных измерений оказалось немного меньше стандартного. Верно ли, что у коробки также можно уменьшить одно горизонтальное измерение и при этом детали по-прежнему можно будет уложить в нее в один слой?

5. Найдите все натуральные k, при которых выражение

$$\sin kx \, \sin^k x + \cos kx \, \cos^k x - \cos^k 2x$$

   принимает при всех x одно и то же значение.

6. Проекции двух выпуклых n-угольников на любую прямую равны. Верно ли, что равны сами многоугольники?

7. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а точки A', B', C' симметричны A, B, C относительно противоположных сторон треугольника. Докажите, что окружности, описанные около треугольников OAA', OBB', OCC', имеют, помимо O, еще одну общую точку.

8. Пусть $S(d)$ — сумма цифр числа d. Докажите, что при бесконечно многих n уравнение $x + S(x) + S(S(x)) = n$ имеет по крайней мере три решения.