Московский турнир матбоев. Финал

Лига 11А. 18 декабря 2005

1. В пространстве даны две окружности: одна вписана в основание куба с ребром 1, вторая описана около его боковой грани. Найти наименьшее расстояние между точками этих окружностей.

2. Доказать, что для любого натурального n число $n+[\sqrt{n}]$, где через $[x]$ обозначено ближайшее к x целое число, не является полным квадратом.

3. Конечно или бесконечно множество таких пар натуральных чисел (m,n), что в разложения m и n на простые множители входят одни и те же простые числа (в разных степенях) и в разложения $m+1$ и $n+1$ также входят одни и те же простые множители.

4. На плоскости даны 2005 непересекающихся отрезков и 2007 не лежащих на этих отрезках точек. Доказать, что из этих точек можно выбрать две так, чтобы соединяющий их отрезок не пересекал ни одного из данных.

5. На плоскости даны три точки A, B, C. Построить четвертую вершину параллелограмма $ABCD$, пользуясь только круглым блюдцем, диаметр d которого больше любого из расстояний между данными точками (можно проводить окружности диаметра d, через точки расстояние между которыми не превышает d).

6. Найти все непрерывные функции f такие, что для любого действительного x

$$f(x^2)+f(x)=x^2+x.$$

7. Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношениями

$$a_1=1, \quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{4a_n}.$$

   Доказать, что при всех $n>1$ $\sqrt{\frac{2}{2a_n^2-1}}$ — натуральное число.

8. При каком наибольшем N существует такой однокруговой турнир N шахматистов, что:
   - каждый участник сыграл вничью не более одной партии;
   - нельзя найти четырех участников, первый из которых выиграл у трех остальных, второй у третьего и четвертого, третий у четвертого.

Московский турнир матбоев. Финал
Лига 10А. 18 декабря 2005

1. Доказать неравенство

$$\frac{a+b-2c}{\sin(C/2)}+\frac{b+c-2a}{\sin(A/2)}+\frac{a+c-2b}{\sin(B/2)}\geq 0,$$

где a, b, c — стороны произвольного треугольника, A, B, C — его углы

2. Доказать, что для любого натурального n число $n+[\sqrt{n}]$, где через $[x]$ обозначено ближайшее к x целое число, не является полным квадратом.

3. Конечно или бесконечно множество таких пар натуральных чисел (m,n), что в разложения m и n на простые множители входят одни и те же простые числа (в разных степенях) и в разложения $m+1$ и $n+1$ также входят одни и те же простые множители.

4. На плоскости даны 2005 непересекающихся отрезков и 2007 не лежащих на этих отрезках точек. Доказать, что из этих точек можно выбрать две так, чтобы соединяющий их отрезок не пересекал ни одного из данных.

5. На плоскости даны три точки A, B, C. Построить четвертую вершину параллелограмма $ABCD$, пользуясь только круглым блюдцем, диаметр d которого больше любого из расстояний между данными точками (можно проводить окружности диаметра d, через точки расстояние между которыми не превышает d).

6. Найти все непрерывные функции f такие, что для любого действительного x

$$f(x^2)+f(x)=x^2+x.$$

7. Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношениями

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{4a_n}.$$

Доказать, что при всех $n>1$ $\sqrt{\frac{2}{2a_n^2-1}}$ — натуральное число.

8. При каком наибольшем N существует такой однокруговой турнир N шахматистов, что:
- каждый участник сыграл вничью не более одной партии;
- нельзя найти четырех участников, первый из которых выиграл у трех остальных, второй у третьего и четвертого, третий у четвертого.