Полуфинал Московского турнира математических боёв. Лига 9А

Задача 1. В треугольнике ABC на стороне AC нашлись такие точки D и E, что $AB = AD$ и $BE = EC$ (E между A и D). Точка F — середина дуги BC окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что точки B, E, D, F лежат на одной окружности.

Задача 2. Верно ли, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей?

Задача 3. Для всех натуральных $n > 1$ найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\underbrace{\overline{xx\ldots x}}_{2n\text{ цифр}} - \underbrace{\overline{yy\ldots y}}_{n\text{ цифр}}} = \underbrace{\overline{zz\ldots z}}_{n\text{ цифр}},$$

где x, y, z — цифры.

Задача 4. Какое из чисел больше: 31^{111} или 17^{138}?

Задача 5. На доске выписаны все целые числа от 1 до 14, каждое — по одному разу. Двое играющих по очереди стирают по одному числу до тех пор, пока не останется ровно два числа. Если их сумма — точный квадрат, то выигрывает второй, иначе — первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 6. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1, C_1 так, что медианы A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны прямым AB, BC, CA. Определите, в каком отношении точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника ABC.

Задача 7. На шахматной доске размером 1000×1000 стоит чёрный король и 499 белых ладей. Докажите, что при произвольном начальном расположении фигур король может стать под удар белой ладьи, как бы ни играли белые.

Задача 8. Солдат должен проверить отсутствие мин на участке, включающем границу и имеющем форму равностороннего треугольника. Радиус действия его детектора равен половине высоты треугольника. Солдат выходит из одной вершины треугольника. Какой путь он должен выбрать, чтобы пройти наименьшее возможное расстояние и выполнить задание?