

Угадай последовательность

Алексей Иванович Сгибнев

a.i.sgibnev@gmail.com

Продолжим последовательность

0) 1, 2, 3, 4, ...;

а) 2, 4, 6, 8, ...;

б) 1, 3, 5, 7, ...;

в) 5, 10, 15, 20, ...;

г) 1, 4, 9, 16, ...;

д) 2, 6, 12, 20, ...;

е) 1, 8, 27, 64, ...;

Свернем в формулу

n	1	2	3	4
?	2	4	6	8
	1	3	5	7
	1	4	9	16
	1	8	27	64
	2	6	12	20
	1	3	6	10

1. Продолжим цепочку равенств

$$1 + 3 = ?$$

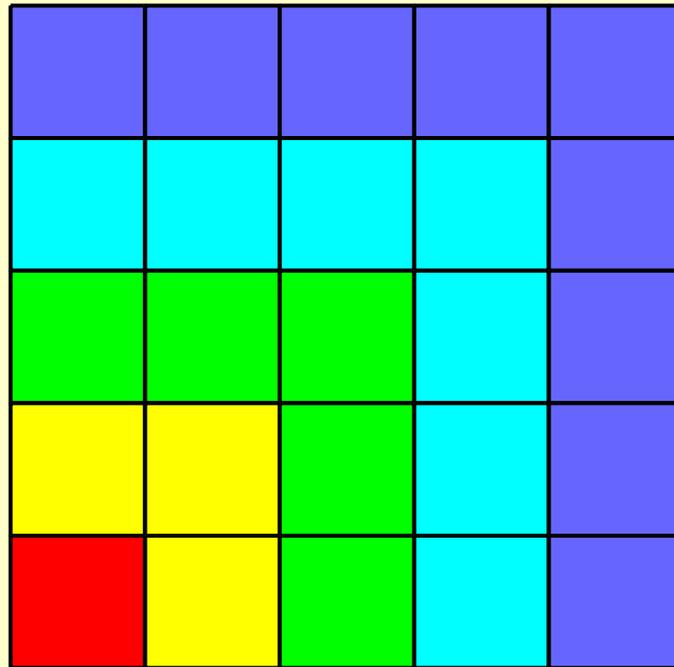
$$1 + 3 + 5 = ?$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = ?$$

$$?? = ??$$

«Смотри!»

$$n = 5$$



$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

2. Сумма натуральных чисел

$$1 + 2 = 3 = ?$$

$$1 + 2 + 3 = 6 = ?$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = ?$$

$$?? = ??$$

$$1 + 2 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$$

$$1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

$$?? = ??$$

Доказательство суммированием (метод Гаусса)

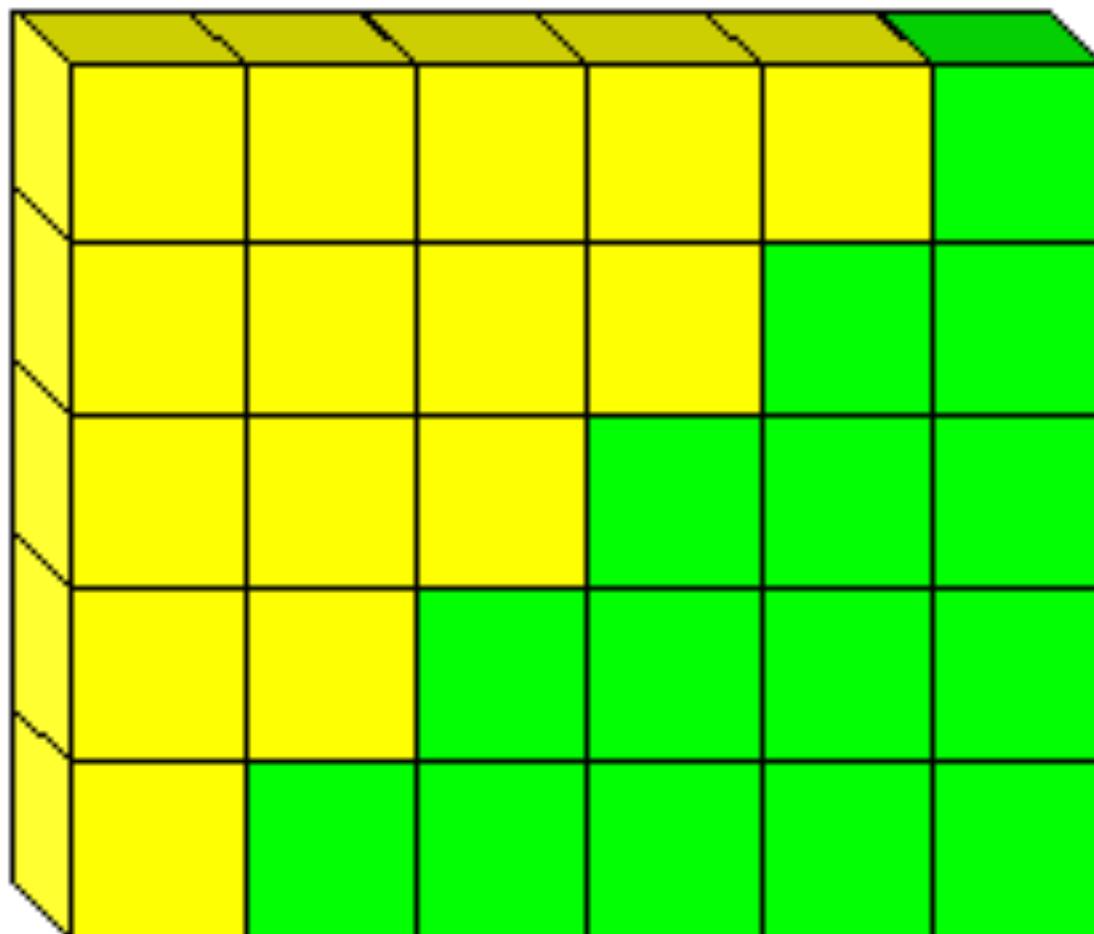
$$S = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n,$$

$$S = n + (n - 1) + \dots + 2 + 1.$$

$$\begin{aligned} 2S &= (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) + (n + 1) = \\ &= n(n + 1). \end{aligned}$$

$$\mathbf{S = n(n+1)/2.}$$

Доказательство с помощью картинки



3. Вспомогательная задача

$$1 + 3 = 4$$

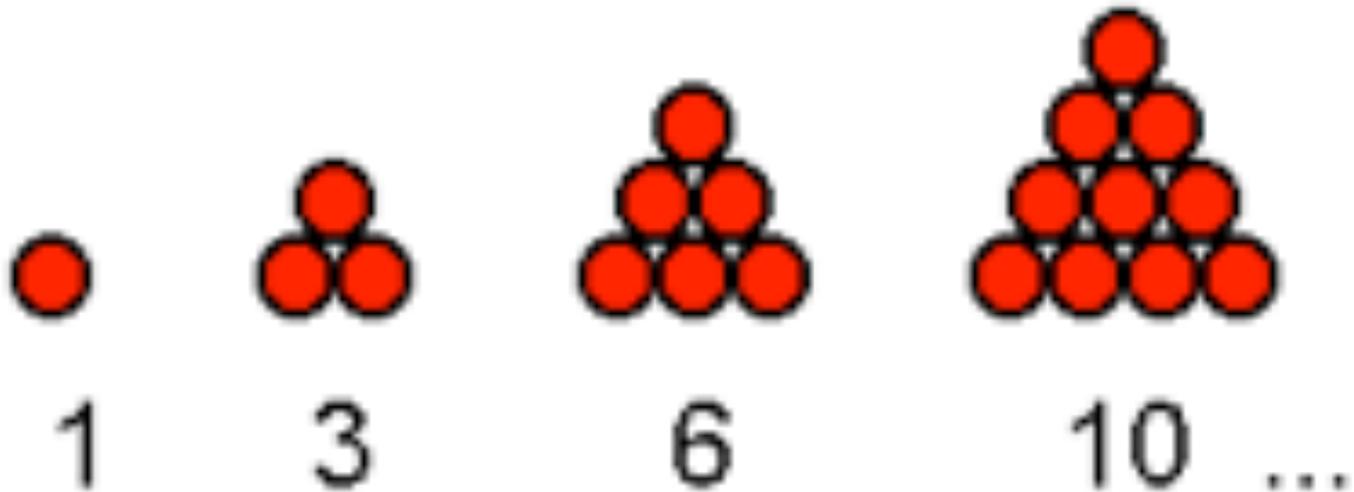
$$3 + 6 = 9$$

$$6 + 10 = 16$$

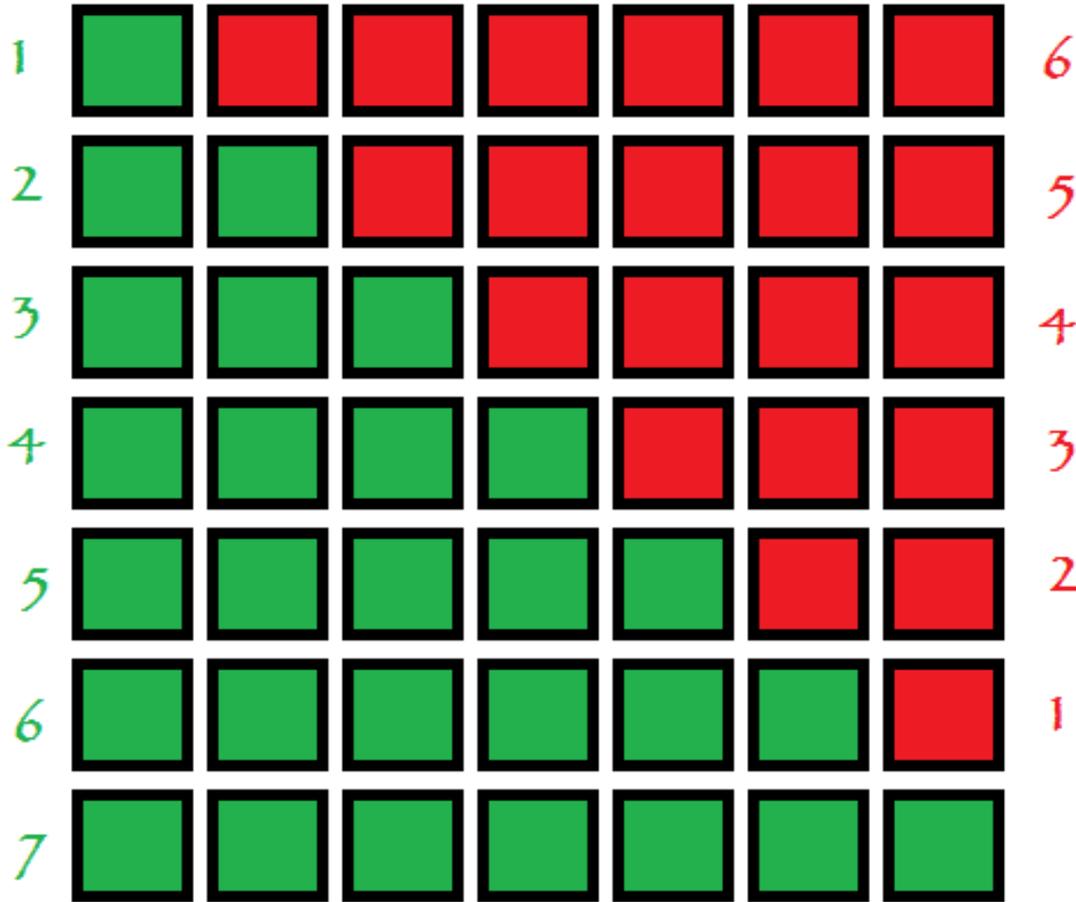
$$10 + 15 = 25$$

$$?? + ?? = ??$$

Это треугольные числа



Сумма двух соседних треугольных чисел равна квадрату:



4. Сумма квадратов

$$1^2 + 2^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6};$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6};$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6}.$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6} .$$

Докажем с помощью таблицы

1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1
2	2	2	2	...	2	2	2	2	2	2	2	...	2	2	2	2
3	3	3	3	...	3	3	3	3	3	3	3	...	3	3	3	3
4	4	4	4	...	4	4	4	4	4	4	4	...	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
...
n-1	n-1	n-1	n-1	...	n-1	...	n-1	n-1	n-1	n-1						
n	n	n	n	...	n	n	n	n	n	n	n	...	n	n	n	n

Сумма чисел в таблице равна

$$n(n+1)(2n+1)/2$$

1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1
2	2	2	2	...	2	2	2	2	2	2	2	...	2	2	2	2
3	3	3	3	...	3	3	3	3	3	3	3	...	3	3	3	3
4	4	4	4	...	4	4	4	4	4	4	4	...	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
...
n-1	n-1	n-1	n-1	...	n-1	...	n-1	n-1	n-1	n-1						
n	n	n	n	...	n	n	n	n	n	n	n	...	n	n	n	n

1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1
2	2	2	2	...	2	2	2	2	2	2	2	...	2	2	2	2
3	3	3	3	...	3	3	3	3	3	3	3	...	3	3	3	3
4	4	4	4	...	4	4	4	4	4	4	4	...	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
...
n-1	n-1	n-1	n-1	...	n-1	...	n-1	n-1	n-1	n-1						
n	n	n	n	...	n	n	n	n	n	n	n	...	n	n	n	n

Докажем с помощью картинки



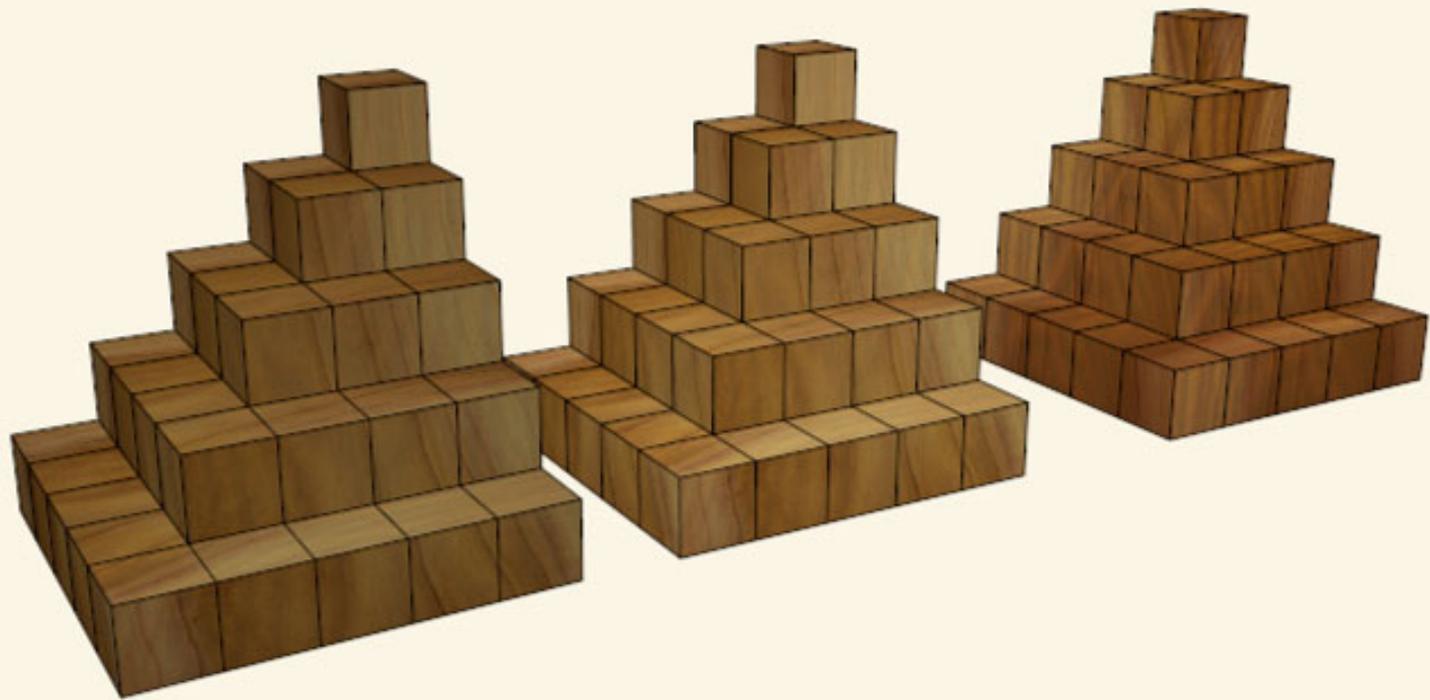
$$1^2$$

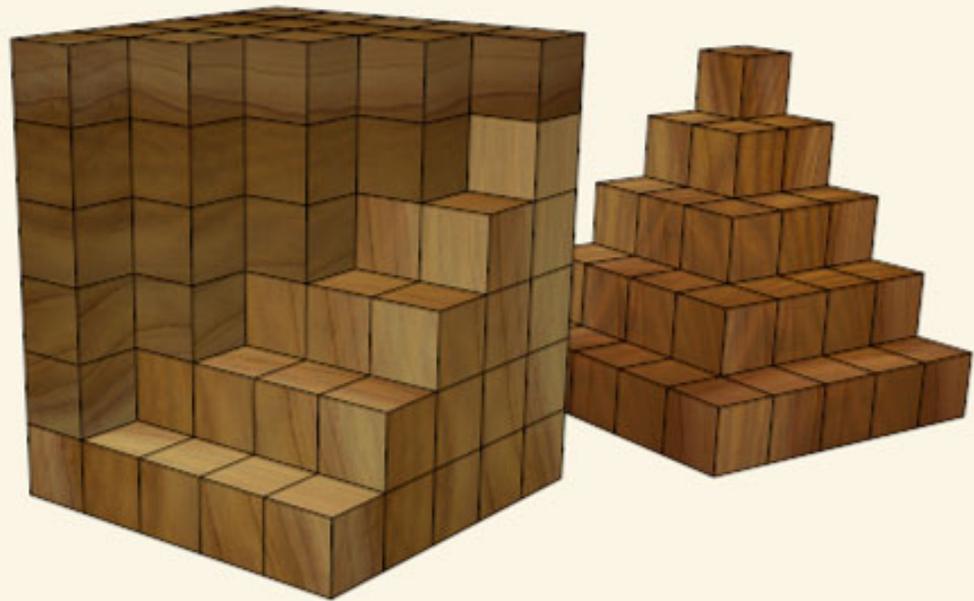
$$2^2$$

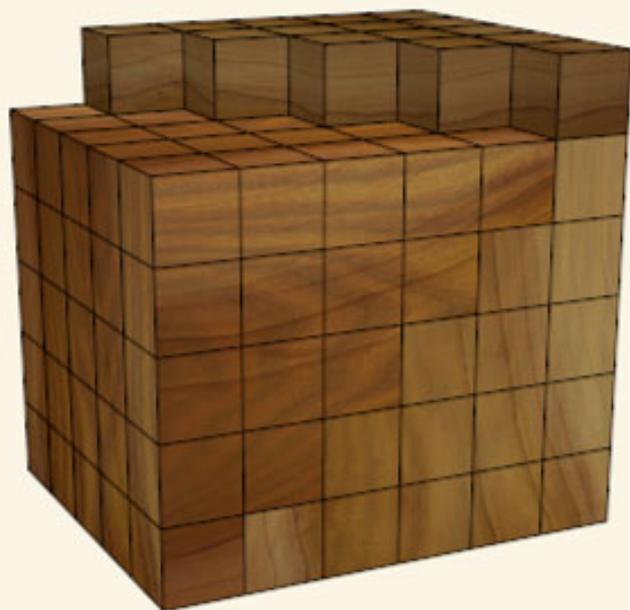
$$3^2$$

$$4^2$$

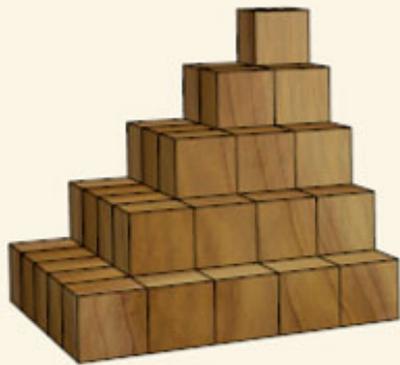
$$5^2$$











$$\cdot 6 =$$



Сумма кубов

$$1 + 8 = ?$$

$$1 + 8 + 27 = ?$$

$$1 + 8 + 27 + 64 = ?$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 .$$

Докажем с помощью таблицы

1	2	3	4	5	...	$n-1$	n
2	4	6	8	10	...	$2(n-1)$	$2n$
3	6	9	12	15	...	$3(n-1)$	$3n$
4	8	12	16	20	...	$4(n-1)$	$4n$
5	10	15	20	25	...	$5(n-1)$	$5n$
...
$n-1$	$2(n-1)$	$3(n-1)$	$4(n-1)$	$5(n-1)$...	$(n-1)(n-1)$	$(n-1)n$
n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$...	$(n-1)n$	nn

1	2	3	4	5	...	n-1	n
2	4	6	8	10	...	2(n-1)	2n
3	6	9	12	15	...	3(n-1)	3n
4	8	12	16	20	...	4(n-1)	4n
5	10	15	20	25	...	5(n-1)	5n
...
n-1	2(n-1)	3(n-1)	4(n-1)	5(n-1)	...	(n-1)(n-1)	(n-1)n
n	2n	3n	4n	5n	...	(n-1)n	nn

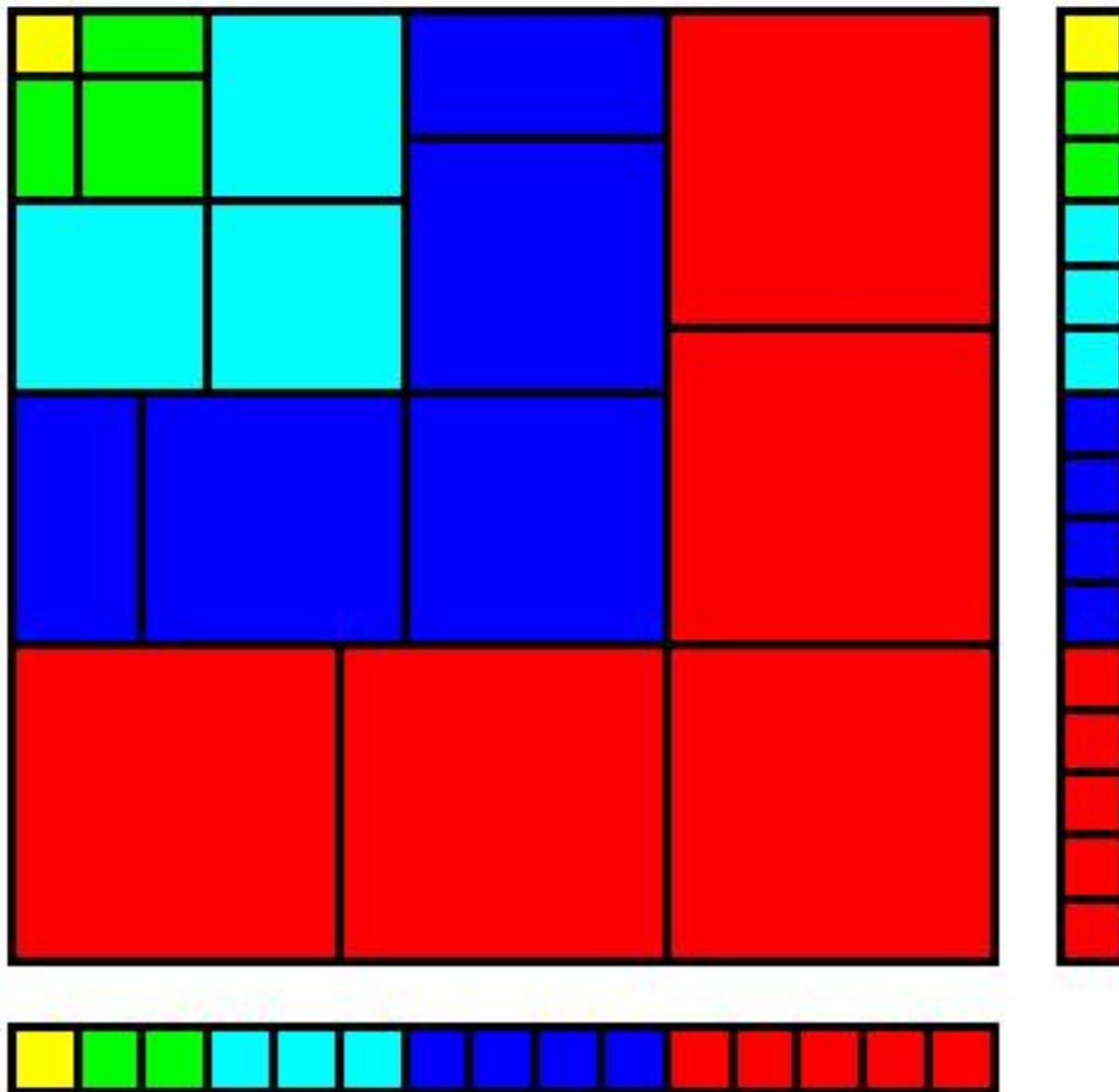
Найдем сумму всех чисел таблицы

Обозначим $1 + 2 + \dots + n = s$.

Тогда сумма чисел по столбцам равна

$$\begin{aligned} 1s + 2s + 3s + \dots + ns &= (1 + 2 + \dots + n)s = \\ &= (1 + 2 + \dots + n)^2. \end{aligned}$$

Докажем с помощью картинки



А дальше?...

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = ?$$

Для тех, кому интересно

$$3 + 5 = 8$$

$$7 + 9 + 11 = 27$$

$$13 + 15 + 17 + 19 = 64$$

$$?? = ??$$

Для тех, кому интересно-2

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3}$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3}$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3}$$

$$?? = ??$$

Для тех, кому интересно-3

$$2 + 3 + 4 = 1 + 8$$

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 8 + 27$$

$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 27 + 64$$

$$?? = ??$$

Для тех, кому интересно-4

$$1 - 4 = - (1 + 2)$$

$$1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3$$

$$1 - 4 + 9 - 16 = - (1 + 2 + 3 + 4)$$

$$?? = ??$$

