Департамент образования г. Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Дом научно-технического творчества молодёжи
Московский центр непрерывного математического образования

LXVIII Московская математическая олимпиада

Математический праздник

В. Д. Арнольд, А. Д. Блинков, Е. Ю. Бунькова, Д. Н. Вельтищев, М. Н. Вельтищев, Т. И. Голенищева-Кутузова, Е. С. Горская, Т. В. Караваева, Е. В. Корицкая, Ю. Г. Кудряшов, А. К. Кулыгин, Н. М. Нетрусова, А. В. Хачатурян, А. С. Чеботарев, И. В. Ященко

Москва
13 февраля 2005 года

6 класс

Задача 1. Таракан Валентин объявил, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Ему не поверили, и правильно: на самом деле Валентин всё перепутал и думал, что в метре 60 сантиметров, а в минуте 100 секунд. С какой скоростью (в «нормальных» м/мин) бегает таракан Валентин?
[*3 балла*] (А. Хачатурян.)

Ответ. 18 м/мин.

Решение. Валентин пробегает $50 \cdot 60 = 3000$ см за 100 с, то есть его скорость 30 см/с, что составляет 18 м/мин.

Задача 2.

На автобусе ездил Андрей
На кружок и обратно домой,
Заплатив 115 рублей,
Покупал он себе проездной.

В январе он его не достал,
И поэтому несколько дней
У шофёра билет покупал
Он себе за 15 рублей.

А в иной день кондуктор с него
Брал 11 только рублей.
Возвращаясь с кружка своего
Всякий раз шёл пешком наш Андрей.

За январь сколько денег ушло,
Посчитал бережливый Андрей:
С удивлением он получил
Аккурат 115 рублей!

Сосчитайте теперь поскорей,
Сколько раз был кружок в январе? [*3 балла*]
(А. Блинков, Д. Вельтищев, М. Вельтищев.)

Ответ. 9 раз.

Решение. Количество рублей, потраченных Андреем в те дни, когда он покупал билет у шофёра, делится на 5; на 5 делится и общее количество потраченных им в январе рублей. Значит, и в другие дни общее количество потраченных денег делилось на 5. Поэтому, количество дней, когда Андрей покупал билет у кондуктора, делится на 5. Числа 0 и 10 не годятся; числа, большие 10 — тем более, поэтому единственный возможный вариант — 5 дней. Тогда остальных дней $\frac{115-11\cdot 5}{15} = 4$, а кружок был 9 раз.

Задача 3. Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки; кому какая достанется — определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят её уравнять их кучки, и тогда она заберёт излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты.

а) Придумайте, как Лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 80 конфет (ни больше, ни меньше). [*2 балла*]

б) Может ли Лиса сделать так, чтобы в итоге съесть ровно 65 конфет?
[*4 балла*] (И. Раскина.)

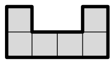
Ответ. а) 10, 10 и 80; б) нет.

Решение. а) Лиса раскладывает конфеты так: 10, 10 и 80. Если ей достанется кучка из 80 конфет, то медвежатам достанется поровну конфет, и они не будут жаловаться. Если ей достанется кучка из 10 конфет, то, для того чтобы уравнять доли медвежат, ей придётся съесть еще 70 конфет.

Примечание. Можно показать, что это — единственный способ действия Лисы. В самом деле, поскольку в итоге лиса съест 80 конфет, то медвежата съедят по $\frac{100-80}{2} = 10$ конфет. Так как у одного из медвежат количество конфет не менялось, то в кучке, доставшейся ему по жребию, было 10 конфет. Следовательно, какая бы кучка ни досталась Лисе по жребию, среди двух оставшихся обязательно есть кучка из 10 конфет. То есть кучек по 10 конфет по крайней мере две (если бы такая кучка из 10 конфет была лишь одна, то она по жребию могла достаться Лисе, и среди двух оставшихся не нашлось бы кучки из 10 конфет). Следовательно, Лиса может разложить конфеты по кучкам так, чтобы в итоге получить ровно 80 конфет, единственным способом.

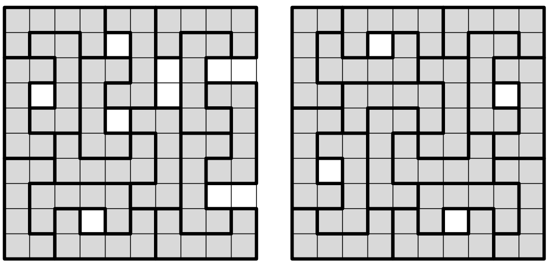
б) Покажем, что число конфет, съеденных Лисой, всегда чётно (и поэтому не может быть равным 65). В итоге медвежата съели поровну конфет, поэтому суммарное число конфет, съеденных медвежатами, чётно. Так как 100 — чётное число, то Лиса также съела чётное число конфет.

Задача 4. Незнайка разместил без наложений в квадрате 10×10 только 13 фигур («скобок»), изображённых на рисунке. Попробуйте разместить больше.



[За каждую скобку сверх тринадцати — ***2 балла***] (А. Хачатурян.)

Ответ. Можно разместить 14, 15 или даже 16 «скобок». Больше разместить нельзя, так как 17 «скобок» занимают уже 102 клетки.



Задача 5. В числах МИХАЙЛО и ЛОМОНОСОВ каждая буква обозначает цифру (разным буквам соответствуют разные цифры). Известно, что у этих чисел произведения цифр равны. Могут ли оба числа быть нечётными? [***6 баллов***] (А. Хачатурян.)

Ответ. Нет.

Решение. Заметим, что использованы 10 различных букв, поэтому каждая цифра обозначена какой-нибудь буквой, в частности, среди этих цифр есть нуль. Таким образом, произведение цифр одного (а значит, и второго) числа равно нулю. Следовательно, в записи обоих чисел есть нуль. В словах МИХАЙЛО и ЛОМОНОСОВ общие буквы М, Л и О, поэтому нуль обозначает одна из них. Это не могут быть Л и М, поскольку числа не могут начинаться с нуля. Значит, нуль обозначен буквой О. В числе МИХАЙЛО на конце нуль, то есть оно чётное.

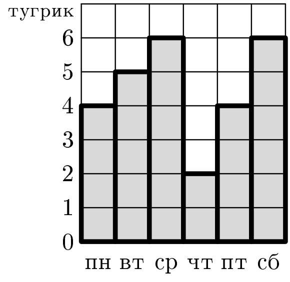
Задача 6. В Пустоземье живут три племени: эльфы, гоблины и хоббиты. Эльф всегда говорит только правду, гоблин всегда лжёт, а хоббит через раз говорит то правду, то ложь. Однажды за круглым столом пировало несколько пустоземцев, и один из них сказал, указав на своего левого соседа: «Он — хоббит». Сосед сказал: «Мой правый сосед солгал». В точности ту же фразу затем повторил его левый сосед, потом её же произнёс следующий по кругу, и так они говорили «Мой правый сосед солгал» много-много кругов, да и сейчас ещё, возможно, говорят. Определите, из каких племён были пирующие, если известно, что за столом сидело а) девять [*4 балла*]; б) десять [*4 балла*] жителей Пустоземья. Объясните своё решение. (А. Заславский, А. Хачатурян.)

Ответ. а) Все были хоббитами; б) пять гоблинов и пять эльфов.

Решение. Рассмотрим того, про кого сказали, что он — хоббит, и для удобства назовём его Боб. Боб не согласился с тем, что он хоббит, следующий не согласился с ним, а значит, подтвердил, что Боб хоббит, и так далее — все говорящие через раз подтверждали или отрицали, что Боб хоббит. Если пирующих было 9 (нечётное число), то на следующем круге каждый говорил противоположное к тому, что сказал на предыдущем, так что все они хоббиты, а первый хоббит про Боба сказал сначала правду, что вполне возможно. Мы решили пункт а) задачи. Для решения пункта б) заметим, что, поскольку 10 — чётное число, то говорящие на каждом круге говорят одно и то же, поэтому хоббитов среди них нет. Тогда и Боб — не хоббит, а сказавший так про него его правый сосед солгал, то есть он гоблин. Сам же Боб уличил гоблина во лжи, так что он эльф. Его сосед слева снова гоблин, и так далее — за столом сидят, чередуясь, пять гоблинов и пять эльфов.

7 класс

Задача 1. На рисунке изображено, как изменялся курс тугрика в течение недели. У Пети было 30 рублей. В один из дней недели он обменял все свои рубли на тугрики. Потом он обменял все тугрики на рубли. Затем он ещё раз обменял все вырученные рубли на тугрики, и в конце концов, обменял все тугрики обратно на рубли.



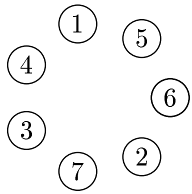
Напишите, в какие дни он совершал эти операции, если в воскресенье у него оказалось 54 рубля. (Достаточно привести пример.) [*3 балла*]

(И. Ященко.)

Ответ. Во вторник он обменял свои рубли на 6 тугриков, продал их в среду и получил 36 рублей. В пятницу он обменял полученные рубли на 9 тугриков. Продав их в субботу, он получил 54 рубля.

Задача 2. Можно ли расставить числа а) от 1 до 7 [***3 балла***]; б) от 1 до 9 [***3 балла***] по кругу так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей? (С. Токарев, А. Спивак.)

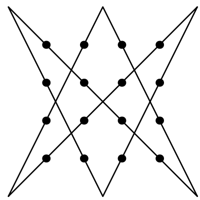
Ответ. а) Да, см. рис.; б) нет.



Решение. б) Заметим, что нечётное число не делится на чётное, а значит, не может стоять в окружении чисел одинаковой чётности. Отсюда следует, что нечётные числа стоят парами. Однако среди чисел 1, 2, ..., 9 нечётных чисел пять, и поэтому из них нельзя образовать пары.

Задача 3. Зачеркните все шестнадцать точек, изображённых на рисунке, шестью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя отрезков по линиям сетки. [***4 балла***] (А. Спивак.)

Ответ. Пример изображён на рисунке.



Примечание. Можно доказать, что этот пример единственен с точностью до поворота на 90°.

Задача 4. Бумага расчерчена на клеточки со стороной 1. Ваня вырезал из неё по клеточкам прямоугольник и нашёл его площадь и периметр. Таня отобрала у него ножницы и со словами «Смотри, фокус!» вырезала с краю прямоугольника по клеточкам квадратик, квадратик выкинула и объявила: «Теперь у оставшейся фигуры периметр такой же, какая была площадь прямоугольника, а площадь — как был периметр!» Ваня убедился, что Таня права.

а) Квадратик какого размера вырезала и выкинула Таня? [***2 балла***]

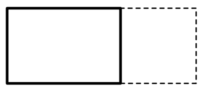
б) Приведите пример такого прямоугольника и такого квадрата. [***3 балла***]

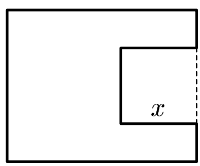
в) Прямоугольник каких размеров вырезал Ваня? [***4 балла***]

(А. Хачатурян.)

Ответ. а) 2×2; б) см. рис. к п. в) решения; в) 3×10 или 4×6.

Решение. а) Квадратик не мог иметь общий угол с прямоугольником (см. рис), так как тогда периметр остался бы прежним или уменьшился (убедитесь сами!), а площадь бы уменьшилась. Значит квадрат примыкает только к одной из сторон прямоугольника (см. рис). Пусть сторона квадрата x. Тогда Таня, вырезав квадрат, уменьшила площадь фигуры на x^2, при этом периметр увеличился на две стороны квадрата, то есть на $2x$.





Таким образом,

$$\text{исходная площадь} - x^2 = \text{площадь полученной фигуры},$$
$$\text{исходный периметр} + 2x = \text{периметр полученной фигуры}.$$

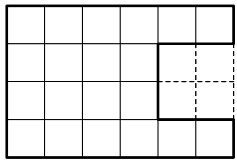
По условию

$$\text{исходная площадь} = \text{периметр полученной фигуры},$$
$$\text{исходный периметр} = \text{площадь полученной фигуры}.$$

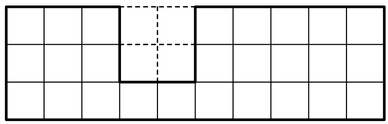
Отсюда

$$\text{исходная площадь} - x^2 = \text{исходный периметр},$$
$$\text{исходный периметр} + 2x = \text{исходная площадь}.$$

Значит, $x^2 = 2x$, откуда $x = 2$.



в) Пусть стороны прямоугольника m и n. Тогда из решения пункта а) следует, что $mn = 2m + 2n + 4$. Наша задача — найти все возможные пары чисел m и n, удовлетворяющие этому равенству.



Можно рассуждать так. Ясно, что m и n превосходят 2, иначе квадрат 2×2 вырезать нельзя. Пусть $m \geqslant n$. Тогда, при $m \geqslant n \geqslant 5$, $2m + 2n + 4 \leqslant 4m + 4 < 5m \leqslant mn$. Значит, $2 < n < 5$. Подставляя $n = 3$, находим $m = 10$, а при $n = 4$ получаем $m = 6$. Таким образом, прямоугольники могли быть только такие, как показано на рисунках — 3×10 и 4×6.

Можно рассуждать иначе. Равенство $mn = 2m + 2n + 4$ можно записать в виде $(n-2)(m-2) = 8$. Поскольку m и n превосходят 2, задача сводится к поиску разложений числа 8 на два натуральных множителя.

Задача 5. Решите ребус 250·ЛЕТ+МГУ = 2005·ГОД. (Разными буквами обозначены разные цифры, а одинаковыми — одинаковые; при этом некоторыми буквами могут быть обозначены уже имеющиеся цифры 2, 5 и 0.)

а) Найдите хотя бы одно решение ребуса; [*4 балла*]

б) Докажите, что других решений нет. [*4 балла*]

(Д. Вельтищев, М. Вельтищев.)

Ответ. $250 \cdot 984 + 615 = 2005 \cdot 123$.

Решение.

1) Заметим, что при Л $\leqslant 7$ левая часть не превосходит $250 \cdot 800 + 1000 = 201000$, а правая не меньше $2005 \cdot 102 = 204510$. Значит, Л $= 8$ или Л $= 9$. | Л $= 8$; 9

2) Если ГОД $\geqslant 124$, то число в правой части не меньше $2005 \cdot 124 = 248620$, а в левой части — не больше $250 \cdot 987 + 1000 = 247750$. Значит, ГОД $\leqslant 123$ и $\text{Г} = 1$, а потому $\text{О} = 0$ или $\text{О} = 2$.

$\text{Г} = 1$
$\text{О} = 0;\ 2$

3) Выражение в правой части и число 250 делятся на 5, поэтому либо $\text{У} = 5$, либо $\text{У} = 0$. Покажем, что второй случай невозможен. В самом деле, если $\text{У} = 0$, то правая часть оканчивается нулём и потому чётна, а значит, Д чётно. При этом $\text{О} = 2$ (так как $\text{О} \neq 0$), и минимальное значение Д равно 4, то есть ГОД $\geqslant 124$. Это противоречит пункту 2). Значит, $\text{У} = 5$, откуда следует, что Д нечётно.

$\text{У} = 5$
$\text{Д} = 2k + 1$

4) Для цифры Д есть всего 3 значения: $\text{Д} = 3$, $\text{Д} = 7$, и $\text{Д} = 9$. Рассмотрим остатки от деления на 50 выражений в левой и правой частях. Слева будет остаток 15 (так как $\text{Г} = 1$ и $\text{У} = 5$), значит, он должен быть таким же справа, что возможно лишь при $\text{Д} = 3$.

$\text{Д} = 3$

5) Определим значение О. Допустим, что $\text{О} = 0$. Тогда справа получаем $2005 \cdot 103 = 206515$, а значит, цифра Т чётна (иначе в разряде десятков слева не получится единицы). Тогда ЛЕТ $\geqslant 824$, а $\text{М} \geqslant 6$ (остальные цифры заняты), и правая часть окажется меньше левой. Значит, $\text{О} = 2$.

$\text{О} = 2$

6) Имеем ГОД $= 123$. Случай $\text{Л} = 8$ не годится (слишком мало), остаётся $\text{Л} = 9$. По тем же соображениям $\text{Е} \geqslant 8$, а так как цифра 9 занята, то $\text{Е} = 8$. Далее легко видеть, что $\text{Т} = 4$ и $\text{М} = 6$.

$\text{Л} = 9$
$\text{Е} = 8$

Примечание. Вполне возможны и иные рассуждения (даже решение прямым подбором), но приведённое решение одновременно решает пункты а) и б).

Задача 6. На острове Невезения с населением 96 человек правительство решило провести пять реформ. Каждой реформой недовольна ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое максимальное число людей правительство может ожидать на митинге? (Приведите пример и докажите, что больше нельзя.) [***8 баллов***] (Е. Корицкая.)

Ответ. 80.

Решение. Пусть x — число людей, вышедших на митинг. Рассмотрим общее число «недовольств». С одной стороны, каждой реформой недовольно ровно 48 жителей, а значит, общее число недовольств равно $48 \cdot 5 = 240$. С другой стороны, каждый вышедший на митинг недоволен хотя бы тремя реформами. Следовательно, общее число недовольств не меньше, чем $3x$. Таким образом, $240 \geqslant 3x$, откуда $x \leqslant 80$. Итак, искомое число не больше 80.

Приведём пример, когда на площадь выйдет ровно 80 человек. Выберем среди жителей острова 80 человек и разобьём их на пять групп по 16 человек. Пусть против первой реформы возражают люди из первых трёх групп, против второй — люди из второй, третьей и четвёртой групп, против третьей — люди из третьей, четвёртой и пятой групп, против четвёртой — люди из четвёртой, пятой и первой групп, а против пятой — люди из пятой, первой и второй групп. Тогда против каждой реформы возражают ровно $3 \cdot 16 = 48$ человек, и на митинг выйдут выбранные 80 человек.