Департамент образования г. Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXX Московская математическая олимпиада

Математический праздник

В. Д. Арнольд, А. Д. Блинков, Т. И. Голенищева-Кутузова, Е. С. Горская, С. А. Дориченко, А. А. Заславский, П. И. Захаров, Т. В. Караваева, А. К. Ковальджи, А. А. Кустарёв, С. В. Маркелов, Г. А. Мерзон, Н. М. Нетрусова, Г. Ю. Панина, М. А. Раскин, И. В. Раскина, Б. Р. Френкин, А. В. Хачатурян, И. В. Ященко

Москва
11 февраля 2007 года

6 класс

Задача 1. По двум телевизионным каналам одновременно начали показывать один и тот же фильм. На первом канале фильм разбили на части по 20 минут каждая и вставили между ними двухминутные рекламные паузы. А на втором канале фильм разбили на части по 10 минут каждая и вставили между ними минутные рекламные паузы. На каком канале фильм закончится раньше? **[*4 балла*]**

(*И. Раскина, Т. Караваева*)

Ответ. На первом канале.

Решение. На первом канале между началом каждой части и началом следующей проходит 22 минуты. За это время на втором канале пройдут две части по 10 минут и две минутные рекламные паузы. Следовательно, началу каждой части на первом канале соответствует тот же момент фильма на втором.

Когда на первом канале начнется последняя часть, до конца фильма останется 20 минут, рекламы уже не будет. На втором же канале покажут две части по 10 минут с минутной рекламной паузой, поэтому на первом канале фильм закончится на одну минуту раньше.

Задача 2. В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.) **[*4 балла*]** (*А. Хачатурян*)

Ответ. Тройка.

Решение. Разложим число 2007 на простые множители:

$$2007 = 3 \cdot 3 \cdot 223.$$

Отсюда можно было бы сделать вывод, что отметки Вовочки — это две двойки и три тройки. Но на самом деле надо еще доказать, что нет других вариантов отметок. Посмотрим, как еще можно разложить 2007 на множители: $2007 = 9 \cdot 223 = 3 \cdot 669$. Поскольку отметки 9 не бывает, эти разложения числа 2007 не могли возникнуть из Вовочкиных отметок. Так как троек у Вовочки больше, чем двоек, и последняя отметка, как ни переставляй множители,— тройка, можно надеяться, что тройку в четверти он получит.

Задача 3. Волк с тремя поросятами написал детектив «Три поросенка—2», а потом вместе с Красной Шапочкой и ее бабушкой кулинарную книгу «Красная Шапочка—2». В издательстве выдали гонорар за обе книжки поросенку Наф-Нафу. Он забрал свою долю и передал оставшиеся 2100 золотых монет Волку. Гонорар за каждую книгу делится поровну между ее авторами. Сколько денег Волк должен взять себе? **[*5 баллов*]** (*А. Блинков*)

Ответ. 700 золотых монет.

Решение. За книгу «Три поросенка—2» каждый автор должен получить четверть гонорара. Но так как Наф-Наф свою долю уже забрал, Волку причитается 1/3 остатка. За книгу «Красная шапочка—2» ему также полагается 1/3 гонорара. Поэтому всего он должен получить треть переданной ему суммы.

Задача 4. В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трех улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города. **[*6 баллов*]** (*Г. Панина*)

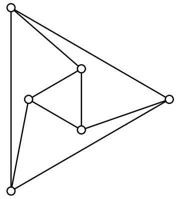
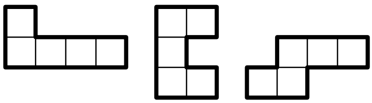


Рис. 1

Решение. План города может быть, например, таким, как на рис. 1.

Задача 5. Нарисуйте, как из данных трех фигурок, использовав каждую ровно один раз, сложить фигуру, имеющую ось симметрии. **[*7 баллов*]** (*С. Маркелов*)



Решение. Из предложенных фигурок можно сложить четыре различные фигуры, имеющие ось симметрии. Две из них приведены на рисунке. У одной из них ось симметрии вертикальная, а у другой проходит по диагонали. Это не случайно — ось симметрии фигуры, нарисованной по клеточкам, может быть либо параллельна сторонам клеток, либо идти под углом 45° к ним.

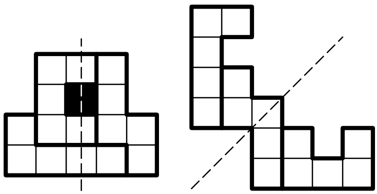


Рис. 2

Попробуйте найти остальные два решения.

Задача 6. Кощей Бессмертный похитил у царя трех дочерей. Отправился Иван-царевич их выручать. Приходит он к Кощею, а тот ему и говорит:

«Завтра поутру увидишь пять заколдованных девушек. Три из них — царевы дочери, а еще две — мои. Для тебя они будут неотличимы, а сами друг дружку различать смогут. Я подойду к одной из них и стану у нее спрашивать про каждую из пятерых: „Это царевна?“. Она может отвечать и правду, и неправду, но ей дозволено назвать царевнами ровно двоих (себя тоже можно называть). Потом я так же опрошу каждую из остальных девушек, и они тоже должны будут назвать царевнами ровно двоих. Если после этого угадаешь, кто из них и вправду царевны, отпущу тебя восвояси невредимым. А если еще и догадаешься, которая царевна старшая, которая средняя, а которая младшая, то и их забирай с собой.»

Иван может передать царевнам записку, чтобы научить их, кого назвать царевнами. Может ли он независимо от ответов Кощеевых дочерей:

а) вернуться живым [***4 балла***];

б) увезти царевен с собой? [***5 баллов***] (*И. Раскина*)

Ответ. а) да; б) да.

Решение. а) Пусть все царевны назовут царевнами Кощеевых дочек (см. рис. 3, сверху). Тогда Кощеевых дочек назовут не менее трех раз, а царевен — не более чем дважды. Так Иван их и отличит.

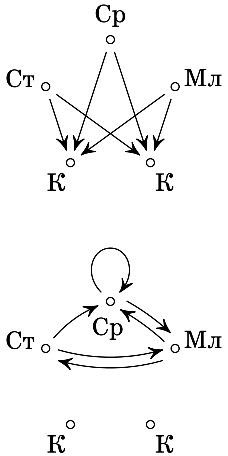


Рис. 3

Любое из решений пункта б), конечно, годится и для пункта а).

б) **Первое решение.** Пусть старшая дочь назовет царевнами среднюю и младшую, младшая — среднюю и старшую, а средняя — себя и младшую (см. рис. 3, снизу). Тогда Иван сразу узнает среднюю царевну — это единственная девушка, которая назвала царевной себя, и ее назвали царевной по крайней мере еще две девушки. После этого Иван узнает младшую царевну (ее назвала средняя), а потом и старшую (ее назвала младшая).

Заметим, что Иван мог бы рассуждать и иначе. Три царевны называют друг друга по кругу: образуют «треугольник», в котором каждая девушка называет следующую. Поскольку ни одна из них не называет царевной дочерей Кощея, а тех всего две, то дочери Кощея не могут входить ни в какой подобный «треугольник». Так можно понять, какие из девушек царевны. Потом, используя остальные ответы, нетрудно установить и старшинство.

Второе решение. Пусть та царевна, которая будет отвечать Кощею первой, назовет среднюю и младшую царевен, вторая по счету — старшую и младшую, последняя — старшую и среднюю. Тогда дочери Кощея — те две девушки, которых не назвали трое остальных. Ошибки быть не может, ведь каждую царевну называют как минимум двое. Теперь Иван знает, кто царевны, а старшинство определяется без труда.

7 класс

Задача 1. Даша и Таня живут в одном подъезде. Даша живет на 6 этаже. Выходя от Даши, Таня пошла не вниз, как ей было нужно, а вверх. Дойдя до последнего этажа, Таня поняла свою ошибку и пошла вниз на свой этаж. Оказалось, что Таня прошла в полтора раза больше, чем если бы она сразу пошла вниз. Сколько этажей в доме?

[***4 балла***] (*Т. Голенищева-Кутузова, И. Ященко*)

Ответ. 7 этажей.

Решение. Пусть с шестого этажа Тане надо было спуститься на n этажей. Тогда Таня прошла «лишний путь» вверх до последнего этажа и обратно до шестого. Длина лишнего пути $1{,}5n - n = 0{,}5n$ этажей. Половину этого лишнего пути Таня шла вверх, а половину — вниз. Значит, вверх она поднялась на $n/4$ этажей.

Если она поднялась на один этаж ($n/4 = 1$), то Таня живет на 4 этажа ниже Даши и в доме 7 этажей. Если же $n/4$ равно 2 или больше, то Тане пришлось бы спуститься с шестого этажа минимум на 8 этажей вниз, что невозможно.

Задача 2. См. задачу 2 для 6 класса.

Задача 3. У Алены есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или 210 часов ожидания. Когда Алена садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился. Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алена говорила по телефону ровно половину времени поездки? [***6 баллов***] (*А. Хачатурян*)

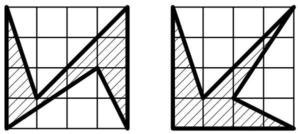
Ответ. 11 часов 40 минут.

Первое решение. Во время разговора энергия аккумулятора расходуется в $\frac{210}{6} = 35$ раз быстрее, чем в то время, когда разговор не ведется. Пусть Алена проговорила x часов. Тогда энергии аккумулятора осталось на $(6 - x)$ часов разговора или на $35 \cdot (6 - x)$ часов ожидания. По условию это время также равно x часов ожидания, поэтому $35 \cdot (6 - x) = x$, откуда $x = \frac{35 \cdot 6}{36} = \frac{35}{6}$ часов, то есть 5 ч 50 мин. И, значит, вся поездка продолжалась 11 ч 40 мин.

Второе решение. Если бы Алена говорила $210 \cdot 6$ часов и молчала $210 \cdot 6$ часов, то телефон бы полностью разрядился $210 + 6 = 216$ раз. Так как на на самом деле телефон разрядился один раз, Алена говорила $\frac{210 \cdot 6}{216}$ часов и молчала $\frac{210 \cdot 6}{216}$ часов, то есть ехала она $2 \cdot \frac{210 \cdot 6}{216}$ часов. После сокращения получаем 11 часов 40 минут.

Примечание. Ответ в этой задаче является средним гармоническим чисел 6 и 210 (*средним гармоническим* чисел a и b называется число $\frac{2}{1/a + 1/b} = \frac{2ab}{a+b}$).

Задача 4. На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4×4. Отметьте еще два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) площади 6 клеток. [***6 баллов***] (*Т. Голенищева-Кутузова, И. Ященко*)

Ответ. 

Решение. Можно попытаться найти решение, просто пробуя различные пары вершин внутри квадрата 4×4 и стараясь сделать получаемый шестиугольник поуже. При этом удобнее считать не площадь шестиугольника, а площадь оставшейся части квадрата — она должна быть равна 10 клеткам.

Для подсчета площади можно разбить оставшуюся часть на прямоугольные треугольники и вспомнить, что площадь прямоугольного треугольника, катеты которого идут по линиям сетки, равна половине площади прямоугольника со сторонами a и b (см. рис. 4, сверху) и равна $\frac{ab}{2}$ (эта формула верна и для произвольного прямоугольного треугольника). Те из вас, кто знает более общую формулу: площадь треугольника со стороной a и опущенной на нее высотой h равна $\frac{ah}{2}$ (см. рис. 4, снизу), могут сразу найти площадь произвольного треугольника, не разбивая его на прямоугольные.

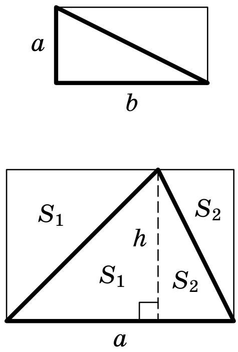
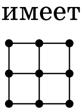
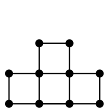


Рис. 4

Задача 5. См. задачу 5 для 6 класса.

Задача 6. Буратино ходит по улицам города, на одном из перекрестков которого зарыт клад. На каждом перекрестке ему по радио сообщают, приблизился он к кладу или удалился (по сравнению с предыдущим перекрестком). Радио либо всегда говорит правду, либо всегда лжет (но Буратино не знает, лжет оно или нет).

Сможет ли Буратино точно узнать, где закопан клад, если план города имеет вид:

а)  [***4 балла***], б)  [***5 баллов***]?

(Перекрестки отмечены точками.) (*Т. Голенищева-Кутузова*)

Ответ. а) Нет, не всегда; б) да, всегда сможет найти.

Решение. а) Всегда, когда Буратино приближается к перекрестку A, он удаляется от перекрестка C (см. рис. 5, *а*). Поэтому, Буратино не сможет различить следующие две ситуации:

1) Клад закопан на перекрестке A и радио говорит правду;

2) Клад закопан на перекрестке C и радио лжет.

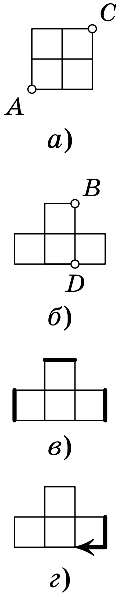


Рис. 5

б) Заметим, что если Буратино знает, что радио говорит правду, то он сможет найти клад. Действительно, двигаясь по улице BD сверху вниз (см. рис. 5, *б*), он найдет горизонтальную улицу, на которой лежит клад. Затем, двигаясь по этой горизонтальной улице слева направо, он найдет точное местоположение клада. Если же Буратино знает, что радио лжет, то он все равно сможет найти клад (действуя тем же способом, но заменяя указания радио на противоположные).

Теперь Буратино остается выяснить, лжет ли радио.

Пусть вначале Буратино предположит, что радио говорит правду, и попытается найти клад. Действуя, как описано выше, он найдет точку T, в которой может быть зарыт клад, либо (если сообщения радио будут противоречивы) поймет, что радио лжет.

Аналогично, предположив, что радио лжет, Буратино найдет точку L, в которой предположительно лежит клад, либо сможет установить, что радио говорит правду.

Итак, проделав это, Буратино либо уже установил, говорит ли радио правду, либо нашел две точки T и L, в одной из которых точно находится клад.

Рассмотрим на плане города три отрезка (см. рис. 5, *в*). Хотя бы на одном из них не лежит ни T, ни L. Поэтому Буратино может встать в один из концов этого отрезка и совершить переход в соседнюю точку, не лежащую на этом отрезке (рис. 5, *г*).

При этом он приблизится как к T, так и к L.

Таким образом Буратино определит, лжет ли радио, и узнает, где находится клад.

ИНФОРМАЦИЯ
о наборе в 5—8 классы с углубленным изучением математики в 2007 году

Школа	Телефон	Адрес	Классы	Сроки
2	137–17–69 137–69–31	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская»)	7, 8	приём заявлений с 31 января
57	291–85–72 291–54–58	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая»)	8	с 4 апреля по средам в 16^{00}
91	290–35–58	ул. Поварская, 14 (м. «Арбатская»)	8	5, 9, 12, 16 и 19 апреля в 16^{00}
179	692–48–51 692–01–05	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	6, 8; доб. в 7	с 15 марта; добор с 10 марта
192	137–33–55 137–72–85	Ленинский просп. 34-А (м. «Ленинский просп.»)	5	март—май по пятницам в 16^{00}
218	976–19–85	Дмитровское ш., 5а	7, 8	с 15 марта
444	465–60–52	ул. Ниж. Первомайская, 14, м. «Первомайская»	8	март
1101	339–77–39	ул. Академика Варги, 34 (м. «Тёплый стан»)	7	с 1 марта по средам в 15^{00}
1514	131–80–38 131–80–33	ул. Крупской, 12 (м. «Университет»)	доб. в 8	с февраля по субботам в 15^{30}
1537	188–17–74	ул. Проходчиков, 9 (м. «ВДНХ»)	8	конец марта
1543	433–16–44 434–26–44	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8	апрель
Интеллектуал	445–52–10	ул. Кременчугская, 13 (м. «Парк Победы»)	5, 7; доб. в 6, 8	с февраля

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно. Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте www.mccme.ru

Дорогой друг!

Для тебя в Москве работают бесплатные математические кружки. Подробная информация на странице www.mccme.ru/circles/

Приглашаем тебя посетить

- интернет-библиотеку на сайте www.math.ru
- полянку математических этюдов www.etudes.ru

На сайте www.problems.ru тебя ждут тысячи занимательных задач.

Оперативную информацию об олимпиадах ты можешь найти на сайте www.olimpiada.ru

Страница Математического праздника (задания, решения, списки победителей) www.mccme.ru/matprazdnik/