

Департамент образования г. Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

**LXXI Московская
математическая олимпиада**

Математический праздник

В. Д. Арнольд, М. А. Ахманова, Д. В. Баранов, М. А. Берштейн,
А. Д. Блинков, Т. И. Голенищева-Кутузова, Е. С. Горская,
А. А. Заславский, Т. В. Караваева, В. А. Клепцын, Ю. Г. Кудряшов,
Н. А. Кулакова, С. В. Маркелов, Г. А. Мерзон, Н. М. Нетрусова,
Е. А. Новодворская, И. В. Раскина, А. В. Хачатурян, Д. Э. Шноль,
И. В. Яценко

Москва
17 февраля 2008 года

6 класс

Задача 1. Сегодня 17.02.2008. Наташа заметила, что в записи этой даты сумма первых четырёх цифр равна сумме последних четырёх. Когда в этом году такое совпадение случится в последний раз?

[3 балла] (Н. М. Нетрусова)

Ответ. 25 декабря 2008 года.

Решение. Нетрудно проверить, что в оставшиеся дни до конца года такого совпадения больше не будет.

Задача 2. Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разных размеров и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает громко барабанить. Какое наибольшее число зайчат сможет начать барабанить? [3 балла] (Д. В. Баранов)

Ответ. 6 зайчат.

Решение. Все зайчата барабанить не могут, так как заведомо не будет барабанить зайчонок, которому достанется самый маленький барабан. С другой стороны, если дать этому же зайчонку и самые короткие палочки, то все остальные зайчата будут барабанить.

Задача 3. На складе лежало несколько целых головок сыра. Ночью пришли крысы и съели 10 головок, причём все ели поровну. У нескольких крыс от обжорства заболели животы. Остальные 7 крыс следующей ночью доели оставшийся сыр, но каждая крыса смогла съесть вдвое меньше сыра, чем накануне. Сколько сыра было на складе первоначально? [5 баллов] (А. Д. Блинков, И. В. Раскина)

Ответ. 11 головок сыра.

Решение. Пусть всего было k крыс ($k > 7$), тогда каждая съела в первую ночь по $10/k$ головок сыра. Во вторую ночь каждая крыса съела вдвое меньше, то есть $5/k$ головок. Все 7 крыс съели тем самым $35/k$ головок. Это целое число. Единственный делитель числа 35, превышающий 7, — само число 35. Поэтому $35/k = 1$, и всего на складе до нашествия крыс было $10 + 1 = 11$ головок сыра.

Задача 4. Разрежьте какой-нибудь квадрат на квадратики двух разных размеров так, чтобы маленьких было столько же, сколько и больших. [6 баллов] (Д. Э. Шноль)

Первое решение. См. рис. 1. Получить это решение можно так. Пусть квадратики одного вида имеют сторону a клеточек, другого — b клеточек, а итоговый квадрат — c клеточек. Тогда площадь исходного квадрата равна $c^2 = na^2 + nb^2$.

Числа, удовлетворяющие этому равенству, можно получить, умножив равенство $5^2 = 4^2 + 3^2$ на $n = k^2$. Квадрат при $n = 4$ разрезать не

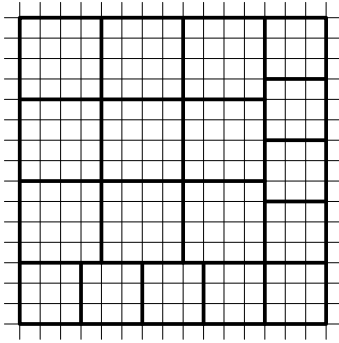


Рис. 1

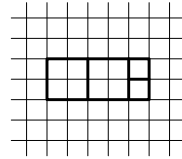


Рис. 2

удается, при $n = 9$ получим $a = 4$, $b = 3$, $c = 15$. Пример разрезания для данных чисел представлен на рисунке.

Второе решение. См. рис. 2. Составим, например, из двух квадратов 2×2 и двух квадратов 1×1 прямоугольник 5×2 (как показано на рисунке). Из десяти таких прямоугольников можно составить квадрат 10×10 . Разумеется, таким образом можно получить много других решений.

Задача 5. Автостоянка в Цветочном городе представляет собой квадрат 7×7 клеточек, в каждой из которых можно поставить машину. Стоянка обнесена забором, одна из сторон угловой клетки удалена (это ворота). Машина ездит по дорожке шириной в клетку. Незнайку попросили разместить как можно больше машин на стоянке таким образом, чтобы любая могла выехать, когда прочие стоят. Незнайка расставил 24 машины так, как показано на рис. 3. Попробуйте расставить машины по-другому, чтобы их поместилось больше. [1 балл за 25 машин и по 2 балла за каждую машину сверх 25] (А. В. Хачатурян)

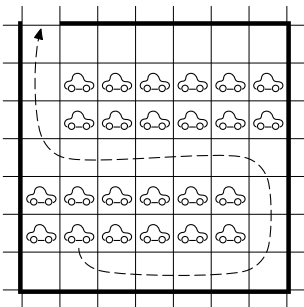


Рис. 3

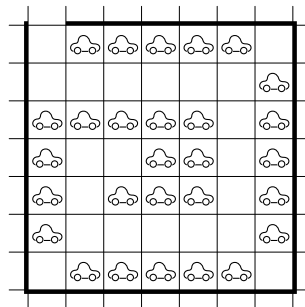
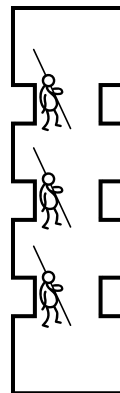


Рис. 4

Ответ. Можно поставить 28 машин, например, так, как показано на рис. 4. Можно ли поставить больше, жюри неизвестно.

Задача 6. Василиса Премудрая решила запереть Кощея в прямом коридоре, разделенном тремя проходами на четыре комнаты, причем в каждом проходе, облокотившись на одну из стен, стоит толстый усталый стражник. Каждый раз, когда Кощей переходит из одной комнаты в другую, стражник переходит к противоположной стене и облокачивается на нее. Если все стражники облокачатся на одну стену, она не выдержит и рухнет, а Кощей выйдет на свободу. Может ли Василиса изначально так прислонить стражников и разместить Кощея, чтобы он никогда не смог выбраться? [8 баллов] (Е. А. Новодворская)



Ответ. Да, может.

Решение. Пусть, например, Василиса посадила Кощея в самую северную комнату, а стражников прислонила так: к западной — к восточной — к западной стене («ЗВЗ»). Покажем, что как бы Кощей не ходил, стражники никогда не будут прислоняться к одной стене.

Заметим, что в любой момент выполняется следующее условие: стражники южнее Кощея остались в исходном положении, а положение стражников севернее Кощея изменилось. Действительно, это условие выполнено вначале и не нарушается при переходе Кощея из комнаты в комнату.

Значит, если Кощей в какой-то момент оказался в самой северной комнате, то все стражники остались в положении «ЗВЗ». Если Кощей оказался во второй комнате, то первый (самый северный) стражник поменял положение, а два других остались в исходном положении, то есть стражники приняли положение «ВВЗ». Если же Кощей оказался в третьей комнате, то стражники приняли положение «ВЗЗ». Наконец, если Кощей оказался в самой южной комнате, то все стражники изменили свое положение, то есть приняли положение «ВЗВ».

Значит, ни в какой момент все стражники не прислоняются к одной стене.

7 класс

Задача 1. Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число. [4 балла] (И. В. Яценко)

Ответ. 251.

Решение. Искомое число является делителем числа 2008. Разложим число 2008 на простые множители: $2008 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 251$. Выпишем

все делители числа 2008: 1, 2, 4, 8, 251, 502, 1004, 2008. Найдя сумму цифр каждого из них, заметим, что условие задачи выполняется только для числа 251 ($2008 = 251 \cdot (2 + 5 + 1)$).

Задача 2. В кубке Водоканала по футболу участвовали команды «Помпа», «Фильтр», «Насос» и «Шлюз». Каждая команда сыграла с каждой по одному разу (за победу давалось 3 очка, за ничью — 1, за проигрыш — 0). Команда «Помпа» набрала больше всех очков, команда «Шлюз» — меньше всех. Могло ли оказаться так, что «Помпа» обогнала «Шлюз» всего на 2 очка? [4 балла] (А. А. Заславский)

Ответ. Да, могло. Пример приведен в таблице:

команда	П	Ф	Н	Ш	о
Помпа	—	1	1	3	5
Фильтр	1	—	3	0	4
Насос	1	0	—	3	4
Шлюз	0	3	0	—	3

З а м е ч а н и я. 1. Так как «Помпа» обогнала «Фильтр», а «Фильтр» обогнал «Шлюз», разница очков между «Шлюзом» и «Помпой» не может быть меньше двух. Можно показать, что все разницы от 2 до 9 очков между «Помпой» и «Шлюзом» реализуются.

2. Решение единственно с точностью до перестановки «Фильтра» и «Насоса», но доказывать это не требуется.

3. Утверждение задачи выполняется для любого количества команд, большего трех.

Задача 3. Дима живет в девятиэтажном доме. Он спускается на лифте со своего этажа на первый за 1 минуту. Из-за маленького роста Дима не достаёт до кнопки своего этажа. Поэтому, поднимаясь вверх, он нажимает ту кнопку, до которой может дотянуться, а дальше идет пешком. Весь путь вверх занимает 1 минуту 10 секунд. Лифт движется вверх и вниз с одинаковой скоростью, а Дима поднимается вдвое медленнее лифта. На каком этаже живет Дима?

[6 баллов] (Д. Э. Шноль)

Ответ. Дима живет на седьмом этаже.

Первое решение. Рассмотрим ту часть пути, которую Дима вниз едет на лифте, а вверх идет пешком. С одной стороны путь пешком занимает вдвое больше времени, а с другой — больше на 10 секунд. Значит, эту часть пути он проехал за 10 секунд, а прошел пешком за 20 секунд. Поскольку весь путь на лифте занимает 60 секунд, то пешком он шел $1/6$ пути.

Заметим, что пешком он шел целое число промежутков между этажами. Поскольку дом девятиэтажный, пешком он шел 1 промежуток, а ехал 5. Значит, Дима живет на 7-м этаже.

Второе решение. Пусть лифт движется со скоростью v этажей в секунду, Дима живет на n -м этаже, а выходит обычно на m -м. Тогда

$$\begin{cases} \frac{n-1}{v} = 60; \\ \frac{m-1}{v} + \frac{n-m}{v} \cdot 2 = 70, \end{cases}$$

откуда $m-1+2n-2m=70v$. Подставим $v = \frac{n-1}{60}$ из первого уравнения:

$$2n - m - 1 = \frac{n-1}{6} \cdot 7$$

$$12n - 6m - 6 = 7n - 7$$

$$5n + 1 = 6m.$$

Так как $m < 9$, нетрудно найти, что $n = 7$, а $m = 6$.

Задача 4. См. задачу 6 для 6 класса.

Задача 5. Сережа вырезал из картона две одинаковые фигуры. Он положил их с нахлестом на дно прямоугольного ящика. Дно оказалось полностью покрыто. В центр дна вбили гвоздь. Мог ли гвоздь проткнуть одну картонку и не проткнуть другую?

[8 баллов] (С. В. Маркелов)

Ответ. Да, мог.

Решение. Пусть картонки изначально лежат одна на другой и их края совпадают. Если картонки являются квадратными, перенеся одну вдоль другой и наложив их, легко сложить прямоугольник, но его центр будет лежать внутри обеих (см. рис. 5, а). Это можно исправить, заметив, что центр получившегося прямоугольника *не совпадает* с центром первой квадратной картонки. Поэтому, вырезав небольшую дырочку из первой картонки в центре прямоугольника, мы можем получить решение (см. рис. 5, б).

У задачи существуют и другие решения, см. рис. 6. Обратите внимание: в этом решении вторую картонку, прежде чем переносить, нужно *перевернуть*.

Примечание. Если картонки не накладываются друг на друга и полностью покрывают дно прямоугольного ящика, то гвоздь в центре ящика обязательно воткнется на границе, разделяющей картонки. Это утверждение кажется очевидным, но строго доказать его удалось лишь в 2002 году (см.: А. Я. Канель-Белов. Решение задачи 1.5 // Математическое просвещение. Третья серия, 2002. Вып. 6. С. 139–140).

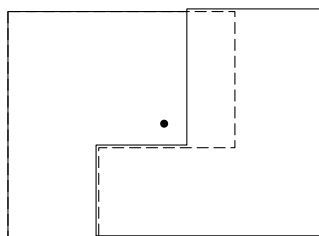
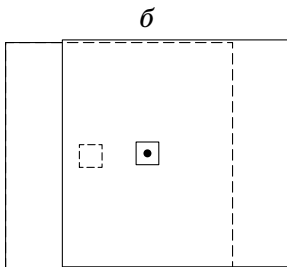
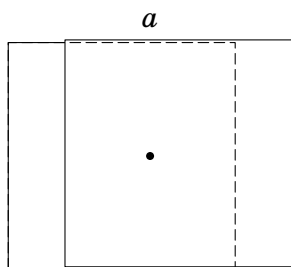


Рис. 5

Рис. 6

Задача 6. Вася постоял некоторое время на остановке. За это время проехал один автобус и два трамвая. Через некоторое время на эту же остановку пришел Шпион. Пока он там сидел, проехало 10 автобусов. Какое минимальное число трамваев могло проехать за это время? И автобусы, и трамваи ходят с равными интервалами, причем автобусы ходят с интервалом 1 час. [9 баллов] (М. А. Ахманова)

Ответ. 4 трамвая.

Решение. Приведем сначала пример, когда за время наблюдений Шпиона проехало четыре трамвая: пусть автобусы ходят в 9:00, 10:00, ..., а трамваи ходят с интервалом 1 час 58 минут — в 10:01, 11:59, 13:57, 15:55, 17:53, 19:51, 21:49, ... Тогда Вася мог стоять с 10:01 до 11:59, а Шпион наблюдать с 12:00 до 21:00.

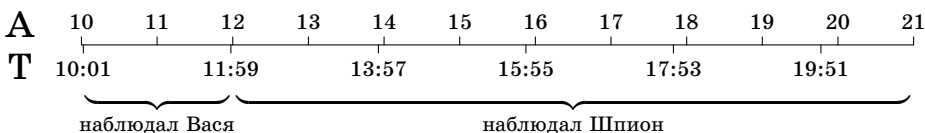


Рис. 7

Докажем теперь, что за время наблюдений Шпиона не могло пройти меньше четырех трамваев.

Для этого докажем, что интервал трамвая меньше двух часов. Действительно, если интервал составляет хотя бы два часа, то Вася стоял не менее двух часов, а значит за это время проехал по крайней мере два автобуса, что противоречит условию.

С другой стороны, пока наблюдал Шпион, прошло десять автобусов. Между 1-м и 3-м из них прошло два часа, значит за это время проехал хотя бы один трамвай. Аналогично между 3-м и 5-м автобусом, между 5-м и 7-м и между 7-м и 9-м проехало еще хотя бы три трамвая. Значит, Шпион увидел по крайней мере четыре трамвая.

ИНФОРМАЦИЯ О НАБОРЕ В 5–8 КЛАССЫ с углубленным изучением математики в 2008 году

Школа	Телефон	Адрес	Классы	Сроки
2	137–17–69 137–69–31	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская»)	7, 8	приём заявлений с 31 января
54	245–99–72 245–54–25	ул. Доватора, 5 (м. «Спортивная»)	8	с марта по май
57	291–85–72 291–54–58	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая»)	8	с 26 марта по средам в 16 ⁰⁰
179	692–48–51	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	6, 7, 8	март
192	137–33–55 137–72–85	Ленинский просп. 34-А (м. «Ленинский просп.»)	5, 7; доб. в 6, 8	март–май по пятницам в 16 ⁰⁰
218	976–19–85	Дмитровское ш., 5а	6–8	запись на собеседов. с 17 марта
444	465–60–52	ул. Ниж. Первомайская, 14, м. «Первомайская»	8	март
1514	131–80–38 131–80–33	ул. Крупской, 12 (м. «Университет»)	5; доб. в 8	с февраля; добор март–апрель
1543	433–16–44 434–26–44	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8	апрель
Интел- лектуал	445–52–10	ул. Кременчугская, 13 (м. «Парк Победы»)	5, 7; доб. в 6, 8	запись с февраля, экс. с конца марта

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.
 Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте www.mcsme.ru

*VI устная олимпиада по математике для 6–7 классов
состоится 16 марта 2008 года.*

Приглашаются школьники, получившие диплом или грамоту

1. Математического праздника (11.02.07 или 17.02.08),
2. V городской устной олимпиады (10.12.06),
3. Зимнего турнира Архимеда (21.01.07 или 20.01.08),
4. Весеннего турнира Архимеда для 5 класса (в личном зачете, 8.04.07).

Для участия в олимпиаде необходимо предварительно зарегистрироваться с 18 февраля по 10 марта.

Подробности на сайте <http://olympiads.mcsme.ru/ustn/>

Оперативную информацию об олимпиадах можно найти на сайте www.olimpiada.ru

Страница Математического праздника (задания, решения, списки победителей) www.mcsme.ru/matprazdnik/