Департамент образования г. Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXXII Московская математическая олимпиада

Математический праздник

В. Д. Арнольд, М. А. Берштейн, А. Д. Блинков, Т. И. Голенищева-Кутузова, Е. С. Горская, Т. В. Караваева, Н. А. Кулакова, С. В. Маркелов, Г. А. Мерзон, Н. М. Нетрусова, М. А. Раскин, И. В. Раскина, А. В. Хачатурян, Д. Э. Шноль, М. И. Ященко, И. В. Ященко

Москва
15 февраля 2009 года

6 класс

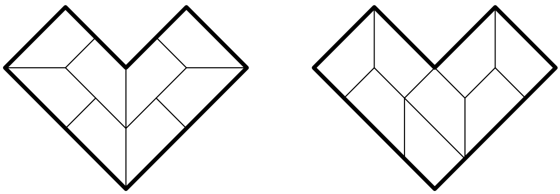
Задача 1. У 2009 года есть такое свойство: меняя местами цифры числа 2009, нельзя получить меньшее четырёхзначное число (с нуля числа не начинаются). В каком году это свойство впервые повторится снова? **[*3 балла*]** (*И. В. Раскина*)

Ответ. В 2022 году.

Решение. В 2010, 2011, ..., 2019 годах и в 2021 году в номере года есть единица, и если её поставить на первое место, число заведомо уменьшится. Число 2020 можно уменьшить до 2002. А вот число 2022 нельзя уменьшить, переставляя цифры.

Задача 2. Разрежьте фигуру на 8 одинаковых частей. **[*4 балла*]** (*Фольклор*)

Ответ. Разрезать фигуру можно несколькими способами. Два способа приведены на рисунке.



Задача 3. В парке росли липы и клёны. Клёнов среди них было 60%. Весной в парке посадили липы, после чего клёнов стало 20%. А осенью посадили клёны, и клёнов стало снова 60%. Во сколько раз увеличилось количество деревьев в парке за год? **[*6 баллов*]** (*Д. Э. Шноль*)

Ответ. В 6 раз.

Первое решение. До начала посадок липы составляли $2/5$, а клёны — $3/5$ всех деревьев в парке. К лету число клёнов не изменилось, однако они стали составлять $1/5$ всех деревьев. Следовательно, количество всех деревьев в парке увеличилось втрое. При этом липы составляли $4/5$ всех деревьев.

К зиме не изменилось количество лип, но они стали составлять $2/5$ всех деревьев. Следовательно, количество всех деревьев увеличилось ещё вдвое. Таким образом, за год количество деревьев увеличилось в 6 раз.

Второе решение. Сначала лип было в 1,5 раза меньше, чем клёнов, а потом стало в 4 раза больше. При этом количество клёнов не менялось. Значит, лип стало в $1{,}5 \cdot 4 = 6$ раз больше. Заметим, что к концу года отношение числа клёнов к числу лип стало таким же, как было в начале.

Поскольку осенью количество лип не менялось, количество клёнов тоже увеличилось в шесть раз. То есть число деревьев в парке увеличилось в шесть раз.

Задача 4. Если у осьминога чётное число ног, он всегда говорит правду. Если нечётное, то он всегда лжёт. Однажды зелёный осьминог сказал тёмно-синему:

— У меня 8 ног. А у тебя только 6.

— Это у меня 8 ног,— обиделся тёмно-синий.— А у тебя всего 7.

— У тёмно-синего действительно 8 ног,— поддержал фиолетовый и похвастался: — А вот у меня целых 9!

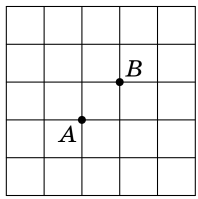
— Ни у кого из вас не 8 ног,— вступил в разговор полосатый осьминог.— Только у меня 8 ног!

У кого из осьминогов было ровно 8 ног?

[*7 баллов*] (*И. В. Раскина*)

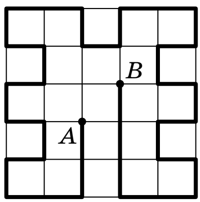
Ответ. 8 ног у полосатого осьминога.

Решение. Если фиолетовый осьминог говорит правду, то у него чётное число ног. Но в таком случае он не может сказать, что у него 9 ног. Значит, фиолетовый осьминог лжёт. Поэтому у тёмно-синего осьминога не 8 ног. Но тёмно-синий говорит, что у него 8 ног, то есть лжёт. Поэтому у него нечётное число ног. Сказав, что у тёмно-синего осьминога 6 ног, зелёный солгал. Поэтому он солгал и в первый раз, и у него не 8 ног. Итак, первое утверждение полосатого осьминога верно. Значит, верно и второе, и у него действительно 8 ног. А у остальных осьминогов нечётное число ног.



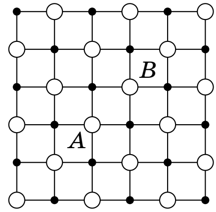
Задача 5. Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка A на плане) до своего отеля (точка B). Турист хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрёстке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.

[*7 баллов*] (*И. В. Ященко*)



Решение. Один из возможных маршрутов туриста изображён на рисунке. Двигаясь по этому пути, турист пройдёт 34 улицы (улицей мы называем отрезок между двумя соседними перекрёстками). Докажем, что более длинный маршрут невозможен.

Всего в Старом городе 36 перекрёстков. Всякий раз, когда турист проходит очередную улицу, он попадает на новый перекрёсток. Таким образом, больше чем 35 улиц турист пройти не сможет (начальный перекрёсток A не считается). Покажем, что посетить 35 перекрёстков (и, следовательно, пройти 35 улиц) любознательный турист тоже не сможет. Для этого раскрасим перекрёстки в чёрный и белый цвета в шахматном порядке (см. рисунок). Всякий раз, проходя улицу, турист попадает на перекрёсток другого цвета. И отель, и вокзал расположены на белых перекрестках. Поэтому любой маршрут содержит чётное число улиц, а число 35 нечётно.



Задача 6. а) Скупой рыцарь хранит золотые монеты в шести сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну в эти два сундука. Ещё он заметил, что если открыть любые 3, 4 или 5 сундуков, то тоже можно переложить лежащие в них монеты таким образом, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга так и не узнал, можно ли разложить все монеты поровну по всем шести сундукам. Можно ли, не заглядывая в заветные сундуки, дать точный ответ на этот вопрос? **[*5 баллов*]**

б) А если сундуков было восемь, а Скупой рыцарь мог разложить поровну монеты, лежащие в любых 2, 3, 4, 5, 6 или 7 сундуках?

[*5 баллов*] (*И. В. Раскина*)

Ответ. а) Можно; б) нельзя.

а) **Первое решение.** Разделим сундуки на три пары. Общее количество монет в каждой паре сундуков чётно, поэтому чётно и число монет во всех шести сундуках. Теперь разделим сундуки на две тройки. Число монет в каждой тройке кратно трём, поэтому кратно трём и общее число монет во всех сундуках. Итак, это общее число монет делится на 2 и 3, а значит, и на 6 (так как 2 и 3 взаимно просты). Следовательно, все монеты можно разложить поровну по 6 сундукам.

Второе решение. Для начала заметим, что число монет во всех сундуках имеет одинаковую чётность. Ведь поделить поровну содержимое двух сундуков с разной чётностью монет нельзя.

Затем обратим внимание на то, что общее количество монет в первых трёх сундуках кратно трём. Если заменить сундук № 3 на сундук № 4, то делимость на 3 не нарушится. Это означает, что число монет в четвёртом сундуке даёт тот же остаток при делении на 3, что и в третьем. Таким же образом про любые два сундука можно доказать, что число монет в одном даёт тот же остаток при делении на 3, что и в другом. Поэтому остатки от деления всех этих чисел на 3 одинаковы.

Если числа дают одинаковые остатки при делении как на 2, так и на 3, то их разность делится на 2 и на 3, то есть делится и на 6. Это означает, что у любых двух (а значит, и у всех шести) чисел остатки при делении на 6 равны между собой. Сумма шести таких чисел будет кратна 6. Поэтому все монеты можно разложить поровну по всем сундукам.

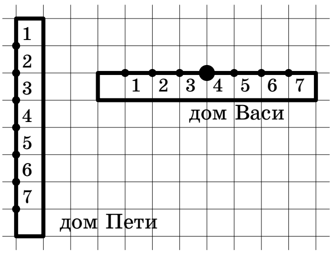
б) Рассуждая так же, как в пункте а), можно доказать, что все восемь чисел, соответствующие количествам монет в сундуках, дают одинаковые остатки при делении на 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Значит, эти числа дают одинаковые остатки при делении на 420 (420 — это наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4, 5, 6 и 7). Но поскольку 420 не кратно 8, эти числа могут иметь различные остатки при делении на 8, что помешает поровну разложить монеты по восьми сундукам.

Например, в первом сундуке могла быть 421 монета, а в остальных семи — по одной. Тогда в двух сундуках в сумме либо 2, либо 422 монеты, оба числа чётные. В трёх сундуках в сумме либо 3, либо 423 монеты, каждое из этих чисел делится на 3 и т. д. В семи сундуках в сумме 7 или 427 монет. Оба числа делятся на 7. Однако общее число монет 428 на 8 не делится. То есть в этом случае на восемь сундуков разложить монеты поровну не получится.

С другой стороны, во всех сундуках изначально могло храниться, например, поровну монет. Поэтому точно ответить на вопрос, не зная, что лежит в сундуках, нельзя.

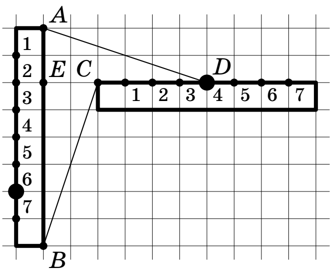
7 класс

Задача 1. Петя и Вася живут в соседних домах (см. план). Вася живёт в четвёртом подъезде. Известно, что Пете, чтобы добежать до Васи кратчайшим путем (не обязательно идущим по сторонам клеток), безразлично, с какой стороны обегать свой дом. Определите, в каком подъезде живёт Петя.



[*5 баллов*] (*А. В. Хачатурян*)

Ответ. В шестом подъезде.



Решение. Кратчайший путь от точки A до Васиного подъезда — отрезок AD. Кратчайший путь от точки B до Васиного подъезда — это путь по отрезку BC, а далее — по отрезку CD. Так как треугольники AED и

CEB равны, $AD = BC$. Поэтому пути от точек A и B до Васиного подъезда отличаются на 4 клетки.

Так как пути от Петиного подъезда через «верхний» угол (т. е. через точку A) и через «нижний» угол (т. е. через точку B) равны, путь от Петиного подъезда до точки A должен быть длиннее на 4 клетки, чем путь до точки B. Значит, Петя живёт в шестом подъезде.

Задача 2. На каждом из двух огородов Дед посадил по одинаковому количеству репок. Если в огород заходит Внучка, то она выдёргивает ровно 1/3 репок, имеющихся к этому моменту. Если заходит Жучка, то она выдёргивает 1/7 репок, а если заходит Мышка, то она выдёргивает только 1/12 репок. К концу недели на первом огороде осталось 7 репок, а на втором — 4. Заходила ли Жучка во второй огород? **[*5 баллов*]** (*Т. И. Голенищева-Кутузова, М. И. Ященко*)

Ответ. Да, заходила.

Первое решение. Каждый раз после того, как в огород заходит Внучка, на нем остаётся 2/3 имевшихся до того репок, после визита Жучки — 6/7, а после визита Мышки — 11/12. Поэтому количество репок на огороде не может стать кратным 7 после визита ни одного из этих персонажей, а перестать делиться на 7 может только после визита Жучки. Так как в конце недели количество репок на первом огороде делится на 7, исходное количество репок на этом огороде тоже делилось на 7.

Вначале на втором огороде было столько же репок, сколько на первом, а в конце осталось 4. Поэтому в какой-то момент число репок там перестало делиться на 7. Значит, Жучка заходила во второй огород.

Второе решение. Так как во втором огороде меньше репок, туда кто-то заходил. Подумаем, кто туда заходил последним. Если это была Мышка, то до её визита на огороде было $4 : \frac{11}{12} = 4\frac{4}{11}$ репки. Если это была Жучка, то до её визита на огороде было $4 : \frac{6}{7} = 4\frac{2}{3}$ репки. Так как число репок всегда целое, это могла быть только Внучка, и до её прихода на огороде было $4 : \frac{2}{3} = 6$ репок.

Число репок до посещения Внучки меньше 7, значит, до этого в огород кто-то заходил. Аналогично предыдущему можно убедиться, что это могла быть только Жучка (и до её прихода на огороде было $6 : \frac{6}{7} = 7$ репок).

Комментарий. Так как огород с 7 репками не мог получиться после визита одного из персонажей, больше в огород никто не заходил. То есть Дед посадил на каждом огороде по 7 репок.

Задача 3. У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зелёный: «Вместе у нас 27 ног», жёлтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног? [*5 баллов*] (*Д. Э. Шноль*)

Ответ. У зелёного осьминога 6 ног, а у остальных по 7 ног.

Решение. Так как осьминоги противоречат друг другу, то возможны два случая: либо все осьминоги лгут, либо ровно один из них говорит правду.

Если все осьминоги лгут, то у каждого из них по 7 ног. Значит, вместе у них 28 ног. Но тогда синий осьминог сказал правду — противоречие.

Если же три осьминога солгали, а четвёртый сказал правду, то у солгавших осьминогов должно быть по 7 ног, а у сказавшего правду — либо 6, либо 8. Поэтому вместе у них либо 27, либо 29 ног, то есть правду сказал зелёный осьминог.

Таким образом, у зелёного осьминога 6 ног, а у остальных по 7 ног.

Задача 4. Скупой рыцарь хранит золотые монеты в 77 сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну по этим двум сундукам. Потом он заметил, что если открыть любые 3, или любые 4, ..., или любые 76 сундуков, то тоже можно так переложить лежащие в них монеты, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга не успел проверить, можно ли разложить все монеты поровну по всем 77 сундукам. Можно ли, не заглядывая в сундуки, дать точный ответ на этот вопрос? [*6 баллов*] (*И. В. Раскина*)

Ответ. Да: все монеты можно разложить поровну по всем сундукам.

Решение. Разделим сундуки на 11 групп по 7 сундуков в каждой. Общее количество монет в каждой группе сундуков должно делиться на 7, значит, на 7 делится и общее число монет во всех 77 сундуках.

Теперь разделим сундуки на 7 групп по 11 сундуков. Теперь число монет в каждой группе делится на 11, значит, общее число монет делится на 11.

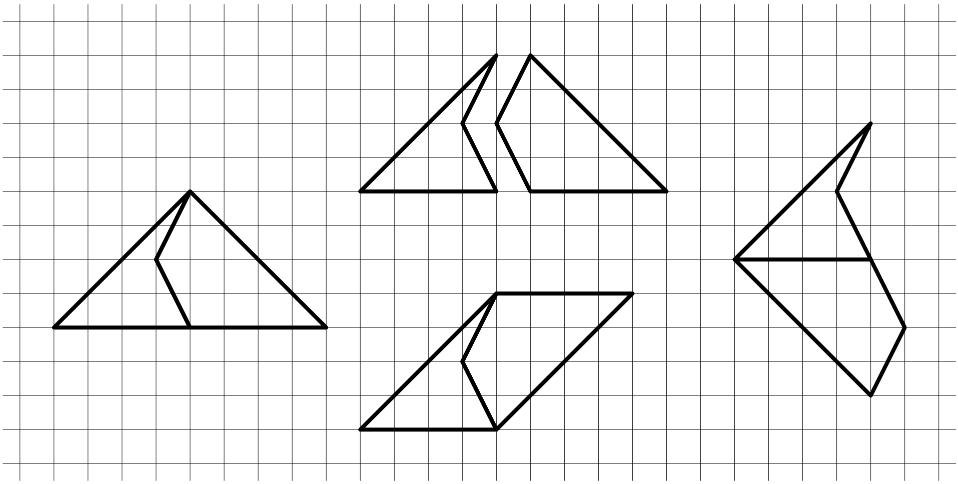
Итак, общее число монет делится на простые числа 7 и 11, а значит, делится и на их произведение 77. Следовательно, все монеты можно разложить поровну по 77 сундукам.

См. также задачу 6 для 6 класса.

Задача 5. Начертите два четырёхугольника с вершинами в узлах сетки, из которых можно сложить а) как треугольник, так и пятиугольник; б) и треугольник, и четырёхугольник, и пятиугольник. Покажите, как это можно сделать.

[***а) — 5 баллов; б) — 4 балла***] (*Д. Э. Шноль*)

Решение. Один из возможных примеров показан на рисунке.



Задача 6. Используя в качестве чисел любое количество монет достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей, а также (бесплатные) скобки и знаки четырёх арифметических действий, составьте выражение со значением 2009, потратив как можно меньше денег.

[***За 28 руб. — 3 балла; за 26 руб. — 5 баллов; за 24 руб. — 7 баллов; за 23 руб. — 10 баллов***] (*И. В. Ященко*)

Ответ. Число 2009 можно получить за 23 рубля следующим способом: $2009 = (2\cdot(2+1)+1)(2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot(2+1)\cdot(2+1)-1)$.

Решение. Объясним, как эту задачу можно было бы решать. Заметим, что выражение можно составлять из произвольных чисел, заменив каждое из них на сумму соответствующего числа единиц. В частности, 2009 можно получить как сумму 2009 единиц.

Но так как произведение обычно больше суммы, выгоднее числа не складывать, а умножать. Если разложить 2009 на простые множители, получится выражение $7\cdot7\cdot41$ стоимостью $7+7+41=55$ рублей.

Теперь можно попробовать получить более дешёвым способом эти сомножители. Ясно, что если число стоит рядом с дешёвым, то и само оно не слишком дорогое. Например, 41 стоит рядом с числом

$40 = 5\cdot2\cdot2\cdot2$. Поэтому 41 можно получить за 12 рублей: $5\cdot2\cdot2\cdot2 + 1$. Аналогично $7 = 2\cdot3+1$. Воспользовавшись этим, можно получить 2009 за 24 рубля: $(2\cdot3+1)(2\cdot3+1)(5\cdot2\cdot2\cdot2+1)$.

Можно попробовать удешевить один из сомножителей по-другому: например, представить 41 как $42-1 = 2\cdot3\cdot7-1 = 2\cdot3\cdot(2\cdot3+1) - 1$. Снова получилось 12 рублей.

Итак, дальше удешевлять отдельные сомножители так не получается, но можно попробовать применить ту же идею для каких-то их произведений. Например, можно представить $7\cdot7 = 49$ как $48+1 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3+1$ или $50-1 = 5\cdot5\cdot2-1$. К сожалению, это не позволяет улучшить результат (24 рубля). Зато если представить $7\cdot41 = 287$ как $288-1 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3-1$, то получится выражение для 2009 всего за 23 рубля: $2009 = (2\cdot3+1)(2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3-1)$.

Этот результат наилучший. Однако жюри неизвестно доказательство этого, не использующее компьютерного перебора.

Комментарии. 1. Докажем, что 2009 нельзя получить за 20 рублей, используя только операции сложения и умножения. Для этого докажем, что за 20 рублей нельзя получить больше, чем $3^6\cdot2 = 1458 < 2009$. Рассмотрим выражение ценой 20 рублей с наибольшим значением. Во-первых, ясно, что в этом выражении нет умножения на 1. Во-вторых, это выражение представляет собой произведение некоторых натуральных чисел. Действительно, фрагмент вида $a+b\cdot c$ можно заменить на $(a+b)\cdot c$, сохранив цену, но увеличив значение выражения. Во-третьих, каждый сомножитель меньше 5. Действительно, $5+a$ можно заменить на $2\cdot3+a$, сохранив цену, но увеличив значение выражения. Наконец, все четвёрки можно заменить на $2\cdot2$. Значит, выражение является произведением нескольких двоек и троек с суммой 20. Так как $3\cdot3 > 2\cdot2\cdot2$ (то есть три двойки выгодно заменить на две тройки), из таких выражений максимальное значение имеет $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot2 = 1458$.

2. У нас получилось, что оптимальный пример состоит из произведения двоек и троек. Это связно с тем, что 2 и 3 — ближайшие целые числа к постоянной Эйлера $e = 2{,}718\ldots$

ИНФОРМАЦИЯ О НАБОРЕ В 5–8 КЛАССЫ
с углубленным изучением математики в 2009 году

Школа	Телефон	Адрес	Классы	Сроки
2	137–17–69 137–69–31	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская»)	7, 8	приём заявлений с 31 января
54	245–99–72 245–54–25	ул. Доватора, 5 (м. «Спортивная»)	8	с февраля по май
57	291–85–72 291–54–58	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая»)	8	с 11 марта по средам в 16^{00}
179	692–48–51	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	7, 8	собеседование в марте
192	137–33–55 137–72–85	Ленинский просп. 34-А (м. «Ленинский просп.»)	5; доб. в 8	март—май по пятницам в 16^{00}
218	976–19–85	Дмитровское ш., 5а	5–8	запись на собеседо- вание с 30 марта
1543	433–16–44 434–26–44	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8	апрель
Интел- лектуал	445–52–10	ул. Кременчугская, 13 (м. «Парк Победы»)	5, 7	запись с февраля, экз. с конца марта

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.
Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте www.mccme.ru

---

VII городская устная олимпиада по математике для 6—7 классов
состоится 1 марта 2009 года (воскресенье).

На олимпиаду приглашаются школьники, получившие диплом призера или грамоту хотя бы на одном из следующих математических соревнований (текущего или прошлого учебного года):

1. Математический праздник (17.02.08 или 15.02.09),
2. VI городская устная олимпиада (16.03.08),
3. Зимний турнир Архимеда (20.01.08 или 18.01.09),
4. Весенний турнир Архимеда для 5 класса (в личном зачете, 6.04.08).

Для участия в олимпиаде необходимо предварительно зарегистрироваться, указав фамилию, имя, класс, школу, округ, вид награды и в каком соревновании она получена.

Подробности на сайте olympiads.mccme.ru/ustn/

Оперативную информацию об олимпиадах можно найти на сайте www.olimpiada.ru

Страница Математического праздника (задания, решения, списки победителей) www.mccme.ru/matprazdnik/