Департамент образования г. Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXXIII Московская математическая олимпиада

Математический праздник

Москва
14 февраля 2010 года

Задачи и решения подготовили:

В. Д. Арнольд, М. А. Берштейн, А. Д. Блинков, Т. И. Голенищева-Кутузова, А. А. Заславский, А. Л. Канунников, Т. В. Караваева, В. А. Клепцын, С. В. Маркелов, Г. А. Мерзон, Н. М. Нетрусова, М. А. Раскин, И. В. Раскина, А. И. Сгибнев, Б. Р. Френкин, А. В. Хачатурян, И. А. Шанин, А. В. Шаповалов, Д. Э. Шноль, И. В. Ященко.

6 класс

Задача 1. На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным кольцам, получится 5 кусков, если по желтым — 7 кусков, а если по зеленым — 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трех цветов? **[*3 балла*]** (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 21 кусок.

Решение. Заметим, что количество частей всегда на 1 больше количества разрезов. Значит, красных колец 4, желтых — 6, а зеленых — 10. Таким образом, всего разрезов $4+6+10=20$, а частей 21.

Задача 2. В Лесогории живут только эльфы и гномы. Гномы лгут, говоря про свое золото, а в остальных случаях говорят правду. Эльфы лгут, говоря про гномов, а в остальных случаях говорят правду. Однажды два лесогорца сказали:

А: Все мое золото я украл у Дракона.

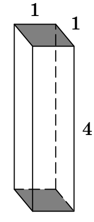
Б: Ты лжешь.

Определите, эльфом или гномом является каждый из них. **[*4 балла*]** (*И. В. Раскина*)

Ответ. Оба гномы.

Решение. Предположим, что *А* эльф. Тогда он сказал правду, а *Б* солгал. Но ни гномы, ни эльфы не лгут, говоря про эльфов. Значит, *А* гном. Говоря про золото, он солгал. Поэтому *Б* сказал про *А* правду. Это мог сделать только гном.

Задача 3. Поросенок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы. **[*5 баллов*]** (*А. В. Шаповалов*)



Ответ. Например, он может сложить башню из четырех кубиков, «завернуть» ее в квадрат 4×4, а низ и верх заклеить квадратами 1×1.

Задача 4. В обменном пункте совершаются операции двух типов: 1) дай 2 евро — получи 3 доллара и конфету в подарок; 2) дай 5 долларов — получи 3 евро и конфету в подарок.

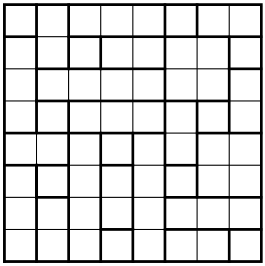
Когда богатенький Буратино пришел в обменник, у него были только доллары. Когда ушел — долларов стало поменьше, евро так и не появились, зато он получил 50 конфет. Во сколько долларов обошелся Буратино такой «подарок»?

[***6 баллов***] (*И. В. Раскина*)

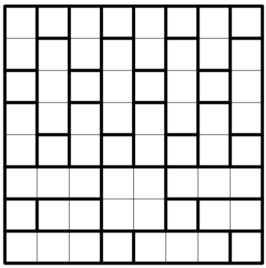
Ответ. В 10 долларов.

Решение. Поскольку Буратино получил 50 конфет, он совершил ровно 50 операций. При этом все полученные евро он вновь обменял на доллары. Поэтому на каждые 3 операции первого типа приходилось по 2 операции второго типа. То есть Буратино 30 раз получал по 3 доллара и 20 раз отдавал по 5 долларов. Значит, он потратил $20 \cdot 5 - 30 \cdot 3 = 10$ долларов.

Задача 5. Саша разрезал шахматную доску 8×8 по границам клеток на 30 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались даже углами (см. рис.). Попытайтесь улучшить его достижение, разрезав доску на большее число прямоугольников с соблюдением того же условия. [***По 2 балла за каждый прямоугольник сверх 30***] (*А. В. Шаповалов*)



Ответ. На рисунке доска разрезана на 35 прямоугольников. Можно доказать (от участников олимпиады это, разумеется, не требовалось), что на большее число прямоугольников разрезать доску не удастся. Доказательство это довольно громоздкое, и помещать его полностью мы не станем. Частично оно приведено после решения шестой задачи.



Задача 6. На краю круглого вращающегося стола через равные промежутки стояли 30 чашек с чаем. Мартовский Заяц и Соня сели за стол и стали пить чай из каких-то двух чашек (не обязательно соседних). Когда они допили чай, Заяц повернул стол так, что перед каждым опять оказалось по полной чашке. Когда и эти чашки опустели, Заяц снова повернул стол (возмож-

но, на другой угол), и снова перед каждым оказалась полная чашка. И так продолжалось до тех пор, пока весь чай не был выпит. Докажите, что если бы Заяц всегда поворачивал стол так, чтобы его новая чашка стояла через одну от предыдущей, то им бы тоже удалось выпить весь чай (т. е. тоже каждый раз обе чашки оказывались бы полными). [*8 баллов*] (*И. В. Раскина*)

Решение. Раскрасим чашки через одну в синий и красный цвет. Пусть Мартовский Заяц вначале пил из красной чашки. Докажем, что вначале Соня пила из синей чашки. В самом деле, если бы она пила из красной, то после любого поворота стола опорожнялись бы две чашки одного цвета. Поскольку и тех, и других по 15, а выпиваются они парами, в конце остались бы две чашки разного цвета, которые никаким поворотом стола нельзя было бы одновременно поместить перед Соней и Мартовским Зайцем. Теперь ясно, почему Заяц мог всегда поворачивать стол, ставя перед собой чашку через одну от только что выпитой, — при этом перед ним по очереди предстали бы все красные, а перед Соней — все синие чашки.

Комментарий к задаче 5. Теперь, как мы и обещали, поговорим о наибольшем возможном количестве прямоугольников в задаче 5. Именно, покажем, что их не может быть более 36. Рассуждения, которые мы используем, похожи на те, что применены для решения задачи 6 из варианта 7 класса. Доказательство начнется с оценки количества прямоугольников разной формы.

Одноклеточные прямоугольники. Прямоугольников 1×1 на доску поместится не более шестнадцати. В самом деле, мы можем разбить доску на квадраты 2×2: их ровно 16, и в каждом не более одного прямоугольника 1×1.

Двухклеточные прямоугольники. Прямоугольников 2×1 на доску поместится не более тринадцати. Пусть на доске N таких прямоугольников. Для доказательства окружим доску прямоугольной каемкой шириной в полклетки, а также окружим такой каемкой каждый размещенный на доске прямоугольник 2×1. (См. рисунок к первому решению задачи 7.6.) Площадь окаймленного прямоугольника 2×1 будет равна 6. Понятно, что окаймленные прямоугольники будут целиком лежать на окаймленной доске и не будут накладываться друг на друга. Значит, их общая площадь, равная $6N$, не должна превосходить площади окаймленной доски (81), откуда $N \leqslant 13$.

Прочие прямоугольники. Теперь оценим количество «многоклеточных» прямоугольников, площадь которых превышает 2.

Пусть теперь среди прямоугольников, на которые разрезана доска, x одноклеточных и y двухклеточных. Тогда всех остальных, площадь которых равна как минимум 3, не больше чем $\frac{64-x-2y}{3}$. Значит, общее число прямоугольников не превосходит

$$\frac{64-x-2y}{3}+x+y=\frac{64+2x+y}{3}\leqslant\frac{64+2\cdot 16+13}{3}=36\frac{1}{3}<37.$$

Но, к сожалению, для 36 прямоугольников такие оценки не проходят — существует даже целых два набора прямоугольников, для которых по количеству клеток все вроде бы сходится. Однако более тонкий анализ взаимного расположения прямоугольников показывает, что разрезать доску на такие наборы все же невозможно.

7 класс

Задача 1. У Юры есть калькулятор, который позволяет умножать число на 3, прибавлять к числу 3 или (если число делится на 3 нацело) делить на 3. Как на этом калькуляторе получить из числа 1 число 11? **[*3 балла*]** (*Т. И. Голенищева-Кутузова*)

Ответ. Например, $((1\cdot 3\cdot 3\cdot 3)+3+3):3=11$ или $(1\cdot 3+3):3+3+3+3=11$.

Комментарий. Заметим, что на Юрином калькуляторе любое число можно увеличить на 1: $(x\cdot 3+3):3=x+1$. Поэтому, в принципе, из единицы на нем можно получить любое натуральное число.

Задача 2. На вертикальную ось надели несколько колес со спицами. Вид сверху изображен на рис. 1. После этого колеса повернули. Новый вид сверху изображен на рис. 2. Могло ли колес быть: а) три; б) два?

[*5 баллов: а) 2 балла, б) 3 балла*]

(*Т. И. Голенищева-Кутузова, В. А. Клепцын, И. В. Ященко*)

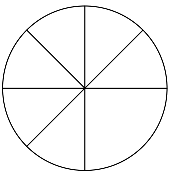


Рис. 1

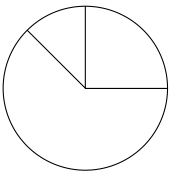


Рис. 2

Ответ. а) Да; б) нет.

Решение. а) См. рис. 3.

б) Из рис. 2 видно, что у каждого из колес не более 3 спиц. Но из

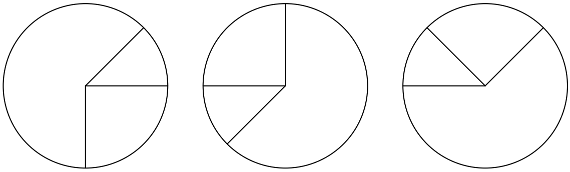


Рис. 3

первого рисунка видно, что всего у колес не менее 7 спиц. Так как $3 \cdot 2 = 6 < 7$, двух колес не хватит.

Задача 3. Маленькие детки кушали конфетки. Каждый съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но все же больше одной конфеты. Сколько всего конфет было съедено?

[*5 баллов*] (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 21 конфета.

Решение. Выберем из детей одного — к примеру, Петю. Если из всех остальных конфет забрать 7, останется столько же, сколько у Пети. Значит, удвоенное число конфет Пети равно общему числу конфет без семи. То же можно сказать про любого из детей, значит, у всех детей конфет поровну — скажем, по одной кучке.

Ясно, что каждый съел на целое число кучек меньше остальных вместе. Поэтому 7 делится на размер кучки. Значит (так как по условию каждый съел больше 1 конфеты), в кучках по 7 конфет, т. е. каждый съел на кучку меньше остальных вместе. Петя съел одну кучку, следовательно, остальные — две. Значит, всего кучек три, а конфет — 21.

Это же решение можно записать и алгебраически.

Обозначим через S общее число конфет, которые съели дети. Если один из детей съел a конфет, то по условию все остальные съели $a+7$ конфет, и тем самым все вместе съели $S = a + (a+7) = 2a + 7$ конфет. Такое рассуждение справедливо для каждого ребенка, поэтому все дети съели одно и то же количество конфет: по $a = (S-7)/2$ штук.

Обозначим теперь через N число детей. Тогда условие записывается как $a = a(N-1) - 7$, откуда $7 = a(N-2)$. Число 7 простое, поэтому один из сомножителей равен 1, а другой 7. Но по условию $a > 1$, поэтому $a = 7$, $N - 2 = 1$. Тем самым $N = 3$, и была съедена $S = aN = 21$ конфета.

Задача 4. В конкурсе пения участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трех исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причем за Петуха и Ворону было в сумме подано 15 голосов, за Ворону и Кукушку — 18 голосов, за Кукушку и Петуха — 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырех названных им чисел отличается от правильного не более чем на 13. Сколько судей проголосовали за Ворону? **[*6 баллов*]** (*И. В. Раскина*)

Ответ. 13 судей.

Решение. Число голосов, поданных за Петуха и Ворону, не может быть больше $15+13=28$. Аналогично, за Ворону и Кукушку в сумме не может быть подано больше $18+13=31$ голоса, а за Кукушку и Петуха — не больше $20+13=33$ голосов. Сложив эти три количества поданных голосов, мы получим удвоенное число всех голосов (каждый голос вошел в два из трех слагаемых). Таким образом, общее число членов жюри не больше $(28+31+33)/2=46$. С другой стороны, из первого объявления Дятла оно не меньше $59-13=46$. Тем самым, членов жюри ровно 46, а все неравенства на самом деле обращаются в равенства.

Наконец, число проголосовавших за Ворону можно найти как разницу общего числа членов жюри и суммы проголосовавших за Кукушку и Петуха: $46-33=13$ голосов.

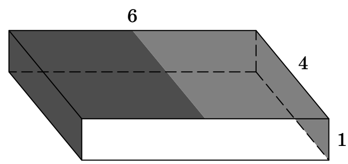
Задача 5. а) Поросенок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

б) А может ли Наф-Наф добиться, чтобы при этом каждые два квадрата граничили друг с другом?

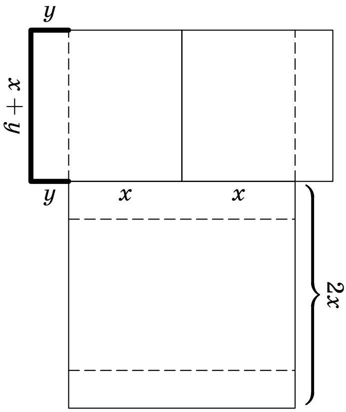
[*7 баллов: а) 3 балла, б) 4 балла*] (*А. В. Шаповалов*)

Решение. а) См. решение задачи 3 шестого класса.

б) На рисунке показано, как можно параллелепипед $1\times4\times6$ оклеить двумя квадратами 4×4 и одним квадратом 6×6. Большим квадратом оклеены три грани: передняя, нижняя и задняя, а каждым из меньших квадратов — половина верхней грани и одна из двух боковых.



Комментарий. Подобрать размеры параллелепипеда и квадратов можно, например, так.



Нарисуем развертку из трех квадратов, каждые два из которых граничат друг с другом (см. рисунок; линии сгиба обозначены пунктиром), и попробуем подобрать размеры квадратов так, чтобы из нее можно было сложить параллелепипед. Пусть сторона нижнего квадрата равна $2x$. Один из отрезков, на которые разбита нижняя сторона другого квадрата, равен x. Обозначим второй через y.

При складывании параллелепипеда боковая сторона нижнего квадрата должна приклеиваться к жирной линии. Поэтому их длины должны быть равны: $y+(x+y)+y=2x$, откуда $3y=x$. Если взять $y=1$, $x=3$, получается приведенный выше пример.

Задача 6. Легко разместить комплект кораблей для игры в «Морской бой» на доске 10×10 (см. рис. 4). А на какой наименьшей квадратной доске можно разместить этот комплект? (Напомним, что согласно правилам корабли не должны соприкасаться даже углами.) **[*8 баллов*]** (*А. Д. Блинков*)

Ответ. На доске 7×7.

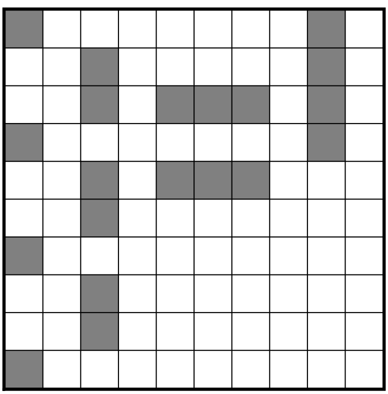


Рис. 4

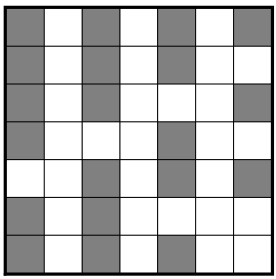
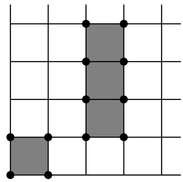


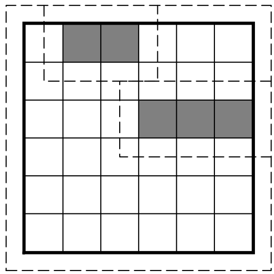
Рис. 5

Решение. Пример расстановки кораблей на доске 7×7 изображен на рис. 5. Остается доказать, что на доске 6×6 корабли расставить нельзя.

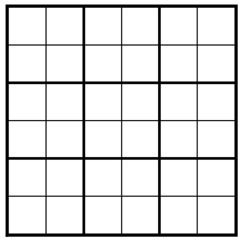
Доказательство 1. Будем считать не клетки, а *узлы* доски, занимаемые кораблями. Корабль 1×4 занимает $2 \cdot 5 = 10$ узлов, корабль 1×3 занимает 8 узлов, корабль 1×2 — 6 узлов, корабль 1×1 — 4 узла; причем по правилам расстановки один узел не может принадлежать более чем одному кораблю. Значит, все корабли занимают $10 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 50$ узлов, и выставить их все на доску с меньшим числом узлов невозможно. Но всего на доске 6×6 имеется лишь $(6+1)^2 = 49 < 50$ узлов.



Ту же идею можно оформить иначе. А именно, заключим каждый корабль в прямоугольник, увеличив его на полклетки в каждую сторону. Такие прямоугольники не могут пересекаться и занимают всего $10 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 50$ клеток. А если бы все корабли можно было разместить на доске 6×6, то все соответствующие прямоугольники располагались бы на доске 7×7, на которой имеется лишь $49 < 50$ клеток. (Отметим, что каждая клетка этой новой доски содержит ровно один узел старой — поэтому вычисление и получается точно таким же, как в первом доказательстве.)



Доказательство 2. Разрежем доску 6×6 на 9 квадратов 2×2. Каждый такой квадрат при расстановке по правилам может содержать клетки только одного корабля. Но всего кораблей 10, поэтому их на такой доске разместить нельзя. (Отметим, что это рассуждение доказывает, что на доску 6×6 все 10 кораблей нельзя было бы поставить, даже если все они имели бы размеры 1×1.)



ИНФОРМАЦИЯ О НАБОРЕ В 5—8 КЛАССЫ

с углубленным изучением математики в 2010 году

Школа	Телефон	Адрес, URL	Классы	Сроки
2	(499) 137-17-69 (499) 137-69-31	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская») www.sch2.ru	7, 8	с 19 марта по 14 мая
54	(499) 245-99-72 (499) 245-54-25	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная») moscowschool54.narod.ru	8	с февраля по май по пятницам с 9^{15}
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая») www.sch57.msk.ru	8	с 31 марта по средам в 16^{00}
179	(495) 692-48-51	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд») www.179.ru	8	собеседование в марте—апреле
192	(499) 137-33-55 (499) 137-72-85	Ленинский просп. 34-А (м. «Ленинский просп.») www.sch192.ru	5, 7; доб. в 8	март—май по пятницам в 16^{00}
218	(495) 976-19-85	Дмитровское ш., 5а school218.ru	6–8	запись на собеседование с 1 апреля
1543	(495) 433-16-44 (495) 434-26-44	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная») www.1543.ru	8	апрель
Интеллектуал	(495) 445-52-10	ул. Кременчугская, 13 (м. «Славянский бульвар») int-sch.ru	5, 7; доб. в 8	запись с февраля, экз. с конца марта

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.
Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте www.mccme.ru

---

VIII городская устная олимпиада по математике для 6—7 классов
состоится 28 февраля 2010 года (воскресенье).

На олимпиаду приглашаются школьники, получившие диплом призера или грамоту хотя бы на одном из следующих математических соревнований (текущего или прошлого учебного года):

1. Математический праздник (14.02.10 или 15.02.09),
2. VII городская устная олимпиада (01.03.09),
3. Зимний турнир Архимеда (24.01.10 или 18.01.09),
4. Весенний турнир Архимеда для 5 класса (в личном зачете, 5.04.09).

Для участия в олимпиаде необходимо предварительно зарегистрироваться до 22 февраля 2010 г. Подробности на сайте olympiads.mccme.ru/ustn/

Оперативная информация об олимпиадах — на сайте www.olimpiada.ru

Страница Математического праздника (задания, решения, списки победителей) www.mccme.ru/matprazdnik/