

Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXXV Московская
математическая олимпиада

Математический праздник

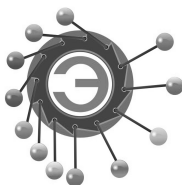
Москва
19 февраля 2012 года

Задачи и решения подготовили:

*В. Д. Арнольд, А. Г. Банникова, М. А. Берштейн, А. Д. Блинков,
Т. И. Голенищева-Кутузова, В. М. Гуровиц, А. А. Заславский,
Т. В. Караваева, В. А. Клепцын, С. В. Маркелов, Г. А. Мерзон,
Н. М. Нетрусова, М. А. Раскин, И. В. Раскина, Д. В. Селегей,
А. В. Хачатурян, А. В. Шаповалов, Д. Э. Шноль, И. В. Яценко.*

При поддержке

Яndex

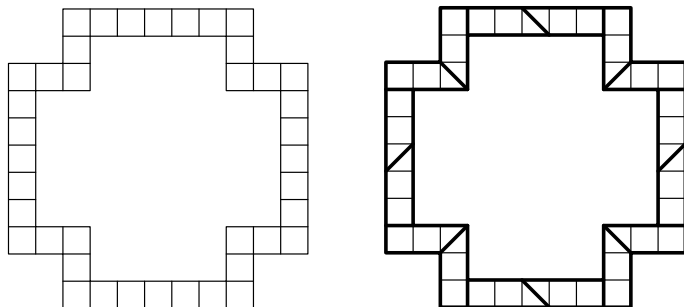


Экспериментаниум
музей занимательных наук

6 класс

Задача 1. Разрежьте рамку (см. рис.) на 16 равных частей.

[4 балла] (А. В. Шаповалов)



Ответ. Можно разрезать так (см. рис. справа).

Задача 2. Пазл Пете понравился, он решил его склеить и повесить на стену. За одну минуту он склеивал вместе два куска (начальных или ранее склеенных). В результате весь пазл соединился в одну цельную картину за 2 часа. За какое время собралась бы картина, если бы Петя склеивал вместе за минуту не по два, а по три куска? [5 баллов] (А. В. Шаповалов)

Ответ. За час.

Решение 1. Каждое склеивание уменьшает на 1 количество кусков на столе. Раз после 120 склеиваний получился один кусок (целый пазл), то до начала работы был 121 кусок. Теперь если за минуту склеивать по три куска (т. е. уменьшать количество кусков на 2), то один кусок останется через 60 минут.

Решение 2. За минуту Петя делал одно склеивание и на сбор пазла потратил 2 часа. Если бы он склеивал по три куска, он делал бы два склеивания за минуту, т. е. работал бы вдвое быстрее и потратил бы, стало быть, 1 час.

Комментарий. Время, затраченное на склеивание всего пазла, не зависит от того, в каком порядке Петя брал кусочки. Он мог, например, добавлять по одному кусочку к уже склеенной части. А мог вместо этого склеить кусочки по парам или тройками, а потом склеивать их между собой. Все равно в первом случае у него ушло бы 2 часа, а во втором — 1 час. В первом решении этот факт доказан с помощью подсчета общего числа кусочков. А во втором решении принимается за очевидный. Поэтому, строго говоря, второе решение неполно: в нем получен верный ответ, но не доказана его единственность.

Задача 3. Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?

[5 баллов] (И. В. Раскина)

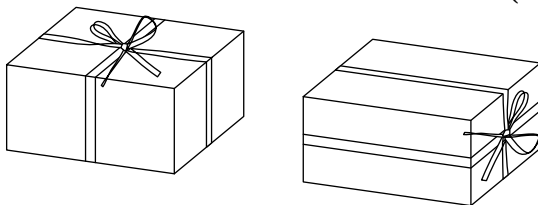
Ответ. 1001.

Решение. Если разделить 77 на количество минут в часе, получится количество часов в сутках. Если разделить 91 на количество минут в часе, получится количество секунд в минуте. Значит, на количество минут в часе и 77, и 91 делятся нацело. Поскольку в часе, очевидно, более одной минуты, в часе получается 7 минут — ни на какое другое число, большее единицы, 77 и 91 одновременно не делятся. Тогда в сутках $77 : 7 = 11$ часов и $11 \cdot 91 = 1001$ секунда.

Комментарий. То же решение можно изложить алгебраически. А именно, пусть в сутках $a > 1$ часов, в часе $b > 1$ минут, в минуте $c > 1$ секунд. Тогда $77 = ab$, $91 = bc$. С другой стороны, $77 = 7 \cdot 11$ и $91 = 7 \cdot 13$, причем числа 7, 11, 13 простые, т. е. дальше на множители разложить нельзя. Значит, $b = 7$, откуда $a = 11$, $c = 13$. Всего секунд в сутках получается $abc = 1001$.

Задача 4. Торт упакован в коробку с квадратным основанием. Высота коробки вдвое меньше стороны этого квадрата. Ленточкой длины 156 см можно перевязать коробку и сделать бантик сверху (как на рисунке слева). А чтобы перевязать её с точно таким же бантиком сбоку (как на рисунке справа), нужна ленточка длины 178 см. Найдите размеры коробки.

[6 баллов]
(И. В. Раскина)



Ответ. 22 см × 22 см × 11 см.

Решение. При первом способе завязывания лента охватывает дважды длину, дважды ширину и четыре раза высоту коробки, т. е. её длина равна шести сторонам основания плюс бантик. При втором способе завязывания лента охватывает дважды длину, четырежды ширину и два раза высоту коробки, т. е. её длина

равна семи сторонам основания плюс бантик. Теперь понятно, что разница в длинах лент $178 - 156 = 22$ см в точности равна стороне основания коробки. Итак, размеры коробки $22 \text{ см} \times 22 \text{ см} \times 11 \text{ см}$. Проверим: в первом случае на обхватывание коробки уходит $22 \times 6 = 132$ см, 24 см идёт на бантик. Во втором — $22 \times 7 = 154$ см и те же 24 см на бантик.

Задача 5. Замените в равенстве

$$\text{ПИРОГ} = \text{КУСОК} + \text{КУСОК} + \text{КУСОК} + \dots + \text{КУСОК}$$

одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными так, чтобы равенство было верным, а количество «кусков пирога» было бы наибольшим из возможных.

[8 баллов]

(И. В. Раскина)

Ответ. Максимальное количество «кусков» равно семи, например: $\text{ПИРОГ} = 95207$, $\text{КУСОК} = 13601$.

Решение. Пример для семи «кусков» приведён выше. Покажем, что больше семи «кусков» быть не может. Для этого удобно условие переписать как пример на умножение $\text{ПИРОГ} = \text{КУСОК} \cdot n$, где n — количество «кусков».

Понятно, что если «кусков» 10 или больше, то правая часть превысит 100000, так что решений не будет.

Невозможно решение и для девяти «кусков». Для того чтобы число $\text{ПИРОГ} = \text{КУСОК} \cdot 9$ было пятизначным, надо, чтобы K равнялось 1. Но тогда ПИРОГ и начинается, и кончается на девятку, а этого быть не должно.

Теперь докажем, что и восьми «кусков» быть не может. Пусть $\text{КУСОК} \cdot 8 = \text{ПИРОГ}$. Так как в слове ПИРОГ все цифры разные, то $\text{ПИРОГ} \leq 98765$, а тогда $\text{КУСОК} \leq 98765/8 = 12345,675$, то есть $\text{КУСОК} \leq 12345$. Тогда понятно, что $K = 1$ и $G = 8$. Буква O обозначает цифру, произведение которой на 8 оканчивается на неё же. Легко убедиться, что это может быть только ноль. Поскольку цифры 0 и 1 уже заняты, а $U \leq 2$ и $C \leq 3$, то $U = 2$ и $C = 3$. Итак, есть только одна возможность: $\text{КУСОК} = 12301$. Но это число не подходит, так как $12301 \cdot 8 = 98408$, а в 98408 цифры повторяются, чего не должно быть.

Приведённый пример для семи «кусков» не единственный, есть ещё три: $14051 \cdot 7 = 98357$, $12351 \cdot 7 = 86457$, $12051 \cdot 7 = 84357$. Разумеется, достаточно было привести один пример.

Задача 6. Известно, что Шакал всегда лжет, Лев говорит правду, Попугай просто повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, ответит как попало), а Жираф дает честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (а на первый вопрос отвечает как попало). Мудрый Ёжик в тумане наткнулся на Шакала, Льва, Попугая и Жирафа и решил выяснить, в каком порядке они стоят. Спросив всех по очереди «Ты Шакал?», он понял только лишь, где Жираф. Спросив всех в том же порядке: «Ты Жираф?», он смог ещё понять, где Шакал, но полной ясности так и не наступило. И лишь после того как на вопрос «Ты Попугай?» первый ответил «Да», Ежу, наконец, стало ясно, в каком порядке стояли животные. Так в каком же?

[9 баллов] (А. В. Хачатурян)

Ответ. Попугай, Лев, Жираф, Шакал.

Решение. На первый вопрос «Ты Шакал?» Лев и Шакал заведомо скажут «нет». Поэтому узнать Жирафа и не узнать Попугая Ёж может только в одном случае: если Жираф ответит «Да», а Попугай «Нет». То же можно сказать и о втором вопросе «Ты Жираф?» — на него Лев и Жираф скажут «Нет» (Жираф думает, что его спрашивают, Шакал ли он), стало быть, Шакал распознается потому, что только он один и сказал «Да».

Поскольку ответа первого животного на третий вопрос хватило Ежу для определения всех (а до этого ответа информации не хватало), первым не стоял ни Жираф, ни Шакал (их ответы Ёжик мог предсказать заранее, и они ему ничего нового бы не сказали). Первым не мог стоять и Лев (он на третий вопрос ответил бы «нет»), т. е. первым был Попугай, который повторил ответ четвёртого на предыдущий вопрос. Теперь понятно, что четвёртый — Шакал. У нас осталось две возможности расстановки:

(1): Попугай, Жираф, Лев, Шакал и (2): Попугай, Лев, Жираф, Шакал. Рассмотрим их.

Если бы имел место порядок (1), то Ёжик уже после первого опроса понял бы, что третий не Попугай, ведь он не повторил ответ второго. А тогда после второго опроса (когда он знал и Жирафа, и Шакала) все бы однозначно определились, и последний вопрос не понадобился бы. А вот в случае порядка (2) варианты Попугай, Лев, Жираф, Шакал и Лев, Попугай, Жираф, Шакал действительно не различались бы до последнего вопроса.

7 класс

Задача 1. Квадрат 3×3 заполнен цифрами так, как показано на рисунке слева. Разрешается ходить по клеткам этого квадрата, переходя из клетки в соседнюю (по стороне), но ни в какую клетку не разрешается попадать дважды.

1	8	4
6	3	9
5	7	2

↑	8	4
6	3	9
5	7	↓

Петя прошел, как показано на рисунке справа, и выписал по порядку все цифры, встретившиеся по пути, — получилось число 84937561. Нарисуйте другой путь так, чтобы получилось число побольше (чем больше, тем лучше).

[4 балла]

(И. В. Яценко)

Ответ. Наибольшее число, которое можно получить, — 573618492 (см. рис.).

1	8	4
6	3	9
5	7	2

Комментарии. 1. Объясним, как задачу можно было бы решать (от участников этого не требовалось).

Заметим, что получить число, большее приведенного в условии, можно, начав обход с числа 9 (например, нетрудно получить число 94836572). Однако если обойти все клетки доски, то получится 9-значное число, которое, конечно, будет больше любого 8-значного.

И 9-значное число тоже тем больше, чем больше его первая цифра. Можно заметить, что 9-значного числа, начинающегося с 9, построить не удастся. И вообще, ни для какой из черных клеток (см. рис. ниже) не существует начинающегося в ней пути, проходящего по всем клеткам доски (см. следующий комментарий).

Поэтому наибольшее число получится, если начать с самой большой белой клетки, т. е. с цифры 5. Дальше надо перейти к ее наибольшему соседу, цифре 7, потом к ее наибольшему соседу, цифре 3. Но если дальше пойти в наибольшего соседа цифры 3, цифру 9, обойти все клетки квадрата не получится. Аналогично не надо идти в цифру 8. Поэтому из 3 надо ходить в 6. Далее путь единственен.

2. Раскрасив квадратик в шахматном порядке (см. рис.), объясним, почему нельзя обойти все клетки, начиная с черной. Действительно, ход из черной клетки всегда приводит в белую. Всего черных клеток четыре, поэтому белых клеток на любом таком пути тоже не более четырех — все пять белых клеток так не обойти.

Задача 2. Квадрат разрезали на несколько частей. Переложив эти части, из них всех сложили треугольник. Затем к этим ча-

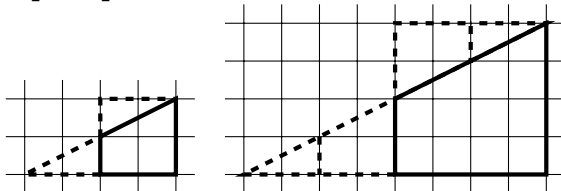
стям добавили еще одну фигурку — и оказалось, что и из нового набора фигурок можно сложить как квадрат, так и треугольник.

Покажите, как такое могло бы произойти (нарисуйте, как именно эти два квадрата и два треугольника могли бы быть составлены из фигурок).

[4 балла]

(С. В. Маркелов, В. А. Клепцын)

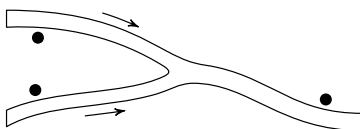
Ответ. Например:



Задача 3. См. задачу 4 для 6 класса.

Задача 4. На каждом из двух рукавов реки за километр до их слияния стоит по пристани, а еще одна пристань стоит в двух километрах после слияния (см. рисунок). Лодка добралась от одной из пристаней до другой (неизвестно, какой) за 30 минут, от другой до третьей за 18 минут. За сколько минут она может добраться от третьей пристани до первой? (Скорость течения реки постоянна и одинакова во всех ее частях. Собственная скорость лодки также постоянна.)

[6 баллов] (В. М. Гуровиц)



Ответ. Либо за 24, либо за 72 минуты.

Решение. Обозначим пристани в порядке посещения A , B и C . Подумаем, какая из них могла стоять после слияния.

- Пристань B не могла стоять после слияния. Действительно, иначе лодка шла бы к ней 3 км по течению, а от нее — те же 3 км, но против течения. Но по условию время первой части пути больше, чем время второй.

- Пусть после слияния стоит пристань A . Тогда 1 км против течения лодка проходит за $30/3 = 10$ минут, а 1 км по течению — за $18 - 10 = 8$ минут. Соответственно, путь из C в A (3 км по течению) занимает $3 \cdot 8 = 24$ минуты.

• Наконец, пусть после слияния стоит пристань C . В этом случае 1 км по течению лодка проходит за $18/3 = 6$ минут, а 1 км против течения — за $30 - 6 = 24$ минуты. Соответственно, путь из C в A (3 км против течения) занимает $3 \cdot 24 = 72$ минуты.

Задача 5. Вася написал верное утверждение:

«В этой фразе $1/3$ всех цифр — цифры 3, а $1/2$ всех цифр — цифры 1».

А Коля написал фразу:

«В этой фразе $1/\dots$ всех цифр — цифры *, доли цифр * и * одинаковы и равны $1/\dots$, а доля всех остальных цифр составляет $1/\dots$ ».

Вставьте вместо звёздочек три разные цифры, а вместо многоточий — три разных числа так, чтобы получилось верное утверждение.

[6 баллов] (А. В. Шаповалов)

Ответ. «В этой фразе $1/2$ всех цифр — цифры 1, доли цифр 2 и 5 одинаковы и равны $1/5$, а доля всех остальных цифр составляет $1/10$ » (или «...доли цифр 0 и 2 одинаковы...» или «...доли цифр 0 и 5 одинаковы...»).

Решение. Объясним, как задачу можно было бы решать (от участников этого не требовалось).

Если какое-то из замененных многоточием чисел хотя бы трехзначное, то всего в этой фразе не менее 100 цифр, что невозможно (тогда одно из чисел состоит минимум из 30 знаков, но тогда всего цифр не менее 10^{30} и т. д. — ясно, что так быть не может). Поэтому все числа или однозначные, или двузначные, а цифр всего от 9 до 12.

Цифр «1» не менее 4, их доля не менее $4/12 = 1/3$, поэтому знаменатель первой дроби однозначный, т. е. цифр меньше 12.

Все знаменатели — делители количества цифр, большие единицы. Поэтому цифр не может быть ни 11 (у числа 11 нет отличных от единицы однозначных делителей), ни 9 (четыре слагаемых вида $1/3$ и $1/9$ в сумме не дадут 1).

Значит, всего цифр 10, а доля цифр «1» равна $1/2$. Остальные дроби могут быть равны $1/5$ и $1/10$. Сумма долей должна быть равна 1: $1/2 + 1/5 + 1/5 + 1/10 = 1$. В знаменателях по разу встретились цифры 0, 2 и 5, любые две можно упомянуть явно, тогда их доля будет $1/5$, а на долю единственной оставшейся цифры придется $1/10$.

Задача 6. Победив Кащея, потребовал Иван золота, чтобы выкупить Василису у разбойников. Привел его Кащей в пещеру и сказал:

«В сундуке лежат золотые слитки. Но просто так их унести нельзя: они заколдованы. Переложил себе в суму один или несколько. Потом я переложу из сумы в сундук один или несколько, но обязательно другое число. Так мы будем по очереди перекладывать их: ты в суму, я в сундук, каждый раз новое число. Когда новое перекладывание станет невозможным, сможешь унести свою суму со слитками».

Какое наибольшее число слитков может унести Иван, как бы ни действовал Кащей, если в сундуке исходно лежит а) 13; б) 14 золотых слитков? Как ему это сделать?

[8 баллов за оба пункта, 5 баллов за один]
(А. В. Шаповалов)

Ответ. а) 13; б) 13.

Решение. Иван будет действовать так, что каждый раз ход Кащея будет единственным: все остальные числа либо встречались на предыдущих ходах, либо слишком велики — у Ивана в этот момент нет столько слитков. Будем записывать ходы игры следующим образом: количество переложённых слитков (число слитков у Ивана после хода).

а) +2 (2), -1 (1), +3 (4), -4 (0), +6 (6), -5 (1), +7 (8), -8 (0), +10 (10), -9 (1), +11 (12), -12 (0), +13 (13).

В конце все возможные ходы сделаны, у Ивана все 13 слитков, значит, их он может забрать.

б) Будем действовать так же, как в предыдущем пункте. После хода «+13 (13)» не сделан только ход 14, но он невозможен, поэтому Иван может унести 13 слитков.

Докажем, что 14 слитков Иван унести не может. Допустим, в какой-то момент в сумке оказалось 14 слитков. Значит, в сундуке слитков нет, то есть последним сходил Иван. Но тогда всего сделано нечетное число ходов, и поэтому какое-то из чисел от 1 до 14 не встретилось. Кащей может сделать ход с этим числом, значит, уносить слитки пока нельзя.

Комментарий. Можно заметить, что для 17, 21 и вообще $4k + 1$ слитка задача решается аналогично пункту а), а для 14, 18 и вообще $4k + 2$ слитков — аналогично пункту б). Можно подумать над решением задачи и в оставшихся случаях (когда слитков $4k$ или $4k + 3$).

Ж У Р Н А Л К В А Н Т И К

Д Л Я Л Ю Б О З Н А Т Е Л Ь Н Ы Х

Вышел в свет первый номер нового журнала для школьников 5—8 классов — «Квантик». Журнал посвящен занимательным вопросам и задачам по математике, лингвистике, физике и другим естественным наукам. Вы узнаете много интересного об окружающем мире.

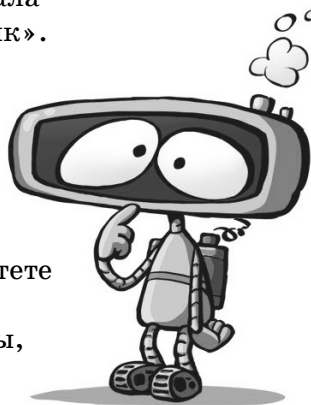
На страницах этого номера вы прочтете о замечательном учёном, узнаете о президенте, который доказывал теоремы, проделаете увлекательные эксперименты с листом Мёбиуса, поломаете голову над простыми с виду задачками, научитесь строить некоторые правильные многоугольники. Вас ожидает встреча с удивительными числами, забавными задачами в картинках, причудами лингвистики и другими, часто довольно неожиданными вещами.

В каждом номере журнала ищите задачи нашего конкурса — попробовать свои силы может каждый, а победителей ждут призы.

«Квантик» выходит ежемесячно. Подписаться можно в отделениях связи Почты России, подписной индекс 84252.

Все номера всегда можно купить в магазине МЦНМО по адресу: Москва, Бол. Власьевский пер., д. 11. Телефон магазина: (499) 241-72-85.

Наш электронный адрес: kvantik@mcsme.ru, сайт: www.kvantik.com, телефон: (499) 241-74-83.



Информация о наборе в 5—8 классы с углубленным изучением математики в 2012 году

Школа	Телефон	Адрес, URL	Классы	Сроки
2	(499) 137-17-69 (499) 137-69-31	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская») www.sch2.ru	7, 8	с 23 марта по 25 мая
54	(499) 245-99-72 (499) 245-54-25	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная») moscowschool54.ru	8	с февраля по май
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая») sch57.msk.ru	8	с 21 марта по средам в 16 ⁰⁰
179	(495) 692-48-51	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд») www.179.ru	8	с 16 марта по пятницам в 16 ⁰⁰
192	(499) 137-33-55 (499) 137-72-85	Ленинский просп. 34-А (м. «Ленинский просп.») www.sch192.ru	5, 7; доб. в 8	с 6 апреля по пятницам в 16 ⁰⁰
218	(495) 976-63-45 (495) 976-19-85	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская») school218.ru	8 (ИУП), 5—7 (дифф.обр.)	апрель—май
1543	(495) 433-16-44 (495) 434-26-44	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная») www.1543.ru	8	апрель
Интел- лектуал	(495) 445-52-10	ул. Кременчугская, 13 (м. «Славянский бульвар») int-sch.ru	5; доб. в 7	рег. на сайте с января, собес. с марта

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.
 Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте www.mcsme.ru

*X устная городская олимпиада по математике для 6—7 классов
 состоится 9 марта 2012 года.*

На олимпиаду приглашаются школьники, получившие диплом призера или грамоту хотя бы на одном из следующих математических соревнований (текущего или прошлого учебного года):

- Математический праздник (13.02.11 или 19.02.12),
- IX городская устная олимпиада (13.03.11),
- Зимний турнир Архимеда (23.01.11 или 22.01.12),
- Весенний турнир Архимеда для 5 класса (в личном зачете, 3.04.11).

Для участия в олимпиаде необходимо предварительно зарегистрироваться до 27 февраля 2012 г. Подробности на сайте olympiads.mcsme.ru/ustn/

Оперативная информация об олимпиадах — на сайте www.olimpiada.ru
 Страница Математического праздника (задания, решения, списки победителей) www.mcsme.ru/matprazdnik/