Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного математического образования

## LXXIX Московская математическая олимпиада

# Математический праздник

Москва
21 февраля 2016 года

Задачи и решения подготовили:

*Н. И. Авилов, А. В. Антропов, В. Д. Арнольд, Е. В. Бакаев, А. Г. Банникова, А. Д. Блинков, М. А. Волчкевич, Т. И. Голенищева-Кутузова, С. А. Дориченко, М. А. Евдокимов, А. А. Заславский, О. А. Заславский, Т. В. Казицына, Н. Ю. Медведь, Г. А. Мерзон, М. А. Раскин, И. В. Раскина, С. К. Смирнов, А. В. Хачатурян, А. В. Шаповалов, Д. Э. Шноль, И. В. Ященко*

При поддержке

## *6 класс*

**Задача 1.** У Незнайки есть пять карточек с цифрами: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ и $\boxed{5}$. Помогите ему составить из этих карточек два числа — трёхзначное и двузначное — так, чтобы первое число делилось на второе. **[*3 балла*]** (*А. В. Шаповалов*)

**Ответ.** $\boxed{5}\boxed{3}\boxed{2}$ и $\boxed{1}\boxed{4}$ $(532:14=38)$ или $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{5}$ и $\boxed{4}\boxed{3}$ $(215:43=5)$.

*Комментарий.* Конечно, эта задача решается подбором, но полезно при этом пользоваться свойствами делимости чисел. Например, подбирая двузначное число, не нужно рассматривать:

а) ни 15, ни 25, ни 35, ни 45 (из оставшихся карточек нельзя сложить число, кратное 5);

б) ни 24, ни 42 (из оставшихся карточек нельзя сложить чётное число);

в) ни 12, ни 32, ни 52 (из оставшихся карточек нельзя сложить число, кратное 4);

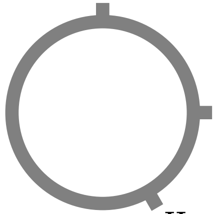
г) 54 (из оставшихся карточек нельзя сложить число, кратное 9).

Но даже после учёта этих соображений остаётся некоторый перебор вариантов, быстрее справиться с которым помогает определённое везение и то, что обычно называют «чувством числа».

**Задача 2.** В маленьком городе только одна трамвайная линия. Она кольцевая, и трамваи ходят по ней в обоих направлениях. На кольце есть остановки Цирк, Парк и Зоопарк. От Парка до Зоопарка путь на трамвае через Цирк втрое длиннее, чем не через Цирк. От Цирка до Зоопарка путь через Парк вдвое короче, чем не через Парк. Какой путь от Парка до Цирка — через Зоопарк или не через Зоопарк — короче и во сколько раз? **[*5 баллов*]**
(*А. В. Шаповалов*)

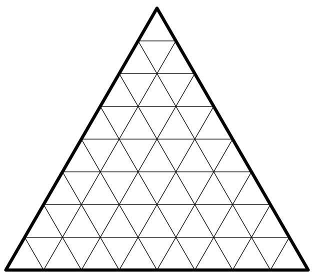
**Ответ.** Путь не через Зоопарк короче в 11 раз.

**Решение.** Сядем в трамвай на остановке Зоопарк и поедем через Цирк к Парку, а потом, не покидая трамвай, вернёмся к Зоопарку. Вторая часть пути втрое короче первой, то есть первая занимает три четверти полного круга, а вторая — четверть. Отметим на схеме Зоопарк и Парк и где-то на более длинной дуге между ними отметим Цирк (см. рис.). Теперь на том же трамвае поедем из Цирка к Зоопарку (при этом проезжая Парк, как видно на схеме).

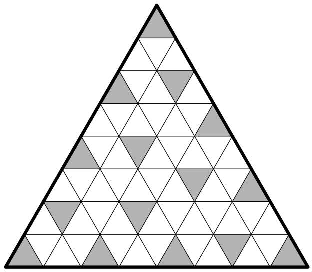



Доехав до Зоопарка, на том же трамвае вернёмся к Цирку, описав круг. Первая часть пути вдвое короче второй, то есть занимает треть круга. Это значит, что путь (всё на том же трамвае) от Цирка к Парку не пройдёт через Зоопарк и составит $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ часть полного круга. Путь же через Зоопарк равен $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ круга, что в $11$ раз длиннее.

**Задача 3.** Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольнички со стороной 1 (см. рис.). Какое наименьшее количество треугольничков надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что по краям) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольничка? Приведите пример и докажите, что меньшее количество треугольничков закрасить нельзя. **[*6 баллов*]** (*Н. И. Авилов*)



**Ответ.** 15 треугольничков. Пример см. на рисунке.



**Решение.** Всего точек пересечения линий $1+2+3+\ldots$ $\ldots+9=45$, а у треугольничка три вершины, так что по крайней мере $45:3=15$ треугольничков придётся закрасить.

*Комментарий.* Можно показать, что существует только один (с точностью до осевой симметрии) способ закрасить 15 треугольничков.

В найденной нами раскраске ни одна вершина не закрашена дважды. Сторона 8 большого треугольника — минимальная, при которой такое «экономное» закрашивание возможно. Оно заведомо невозможно, если длина стороны кратна трём. Более сложный вариант этой задачи (для треугольника со стороной 2015) опубликован в разделе «Задачи» журнала «Математика в школе» (№ 1 за 2016 год).

**Задача 4.** Аня захотела вписать в каждую клетку таблицы $5\times 8$ по одной цифре таким образом, чтобы каждая цифра встречалась ровно в четырёх рядах. (Рядами мы считаем как столбцы, так и строчки таблицы.) Докажите, что у неё ничего не получится. **[*6 баллов*]** (*Е. В. Бакаев*)

**Решение.** Будем считать, что в таблице 5 строк и 8 столбцов, и предположим, что Ане расставить цифры удалось. Заметим, что каждая цифра в таблице может встретиться не более чем 4 раза. В самом деле, если среди четырёх рядов, где она встречается, есть два вертикальных ряда и два горизонтальных, то на их пересечениях есть ровно четыре клетки для нашей цифры (написана она может быть в двух, трёх или во всех четырёх клетках), а если три ряда в одном направлении и один в другом, то только три клетки.

Однако цифр всего 10, а клеток 40, поэтому цифр каждого вида ровно по 4, и расположены они именно на пересечениях двух горизонтальных и двух вертикальных рядов. Это, в частности, означает, что в каждом столбце одинаковые цифры присутствуют парами, что невозможно, так как в столбце нечётное число цифр (пять).

**Задача 5.** Робот придумал шифр для записи слов: заменил некоторые буквы алфавита однозначными или двузначными числами, используя только цифры 1, 2 и 3 (разные буквы он заменял разными числами). Сначала он записал шифром сам себя: РОБОТ = 3112131233. Зашифровав слова КРОКОДИЛ и БЕГЕМОТ, он с удивлением заметил, что числа вышли совершенно одинаковыми! Потом Робот записал слово МАТЕМАТИКА. Напишите число, которое у него получилось. Обоснуйте свой ответ. **[*7 баллов*]**

(*А. В. Хачатурян*)

**Ответ.** 2232331122323323132.

**Решение.** Рассмотрим слово РОБОТ = 3112131233. В нём 5 букв и 10 цифр, так что все коды двузначные и определяются без труда. Напишем все двенадцать возможных кодов и те буквы, которые мы точно знаем:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 = | 11 = | 21 = | 31 = Р |
| 2 = | 12 = О | 22 = | 32 = |
| 3 = | 13 = Б | 23 = | 33 = Т |

Теперь подумаем, как запишется слово КРОКОДИЛ = = БЕГЕМОТ. Начинается оно с Б = 13, то есть К = 1. Теперь мы можем записать начало слова: КРОКО... = 13112112... Начинаем его читать как слово БЕГЕМОТ: Б = 13, Е $\neq$ 1, то есть Е = 11, а тогда Г = 2, иначе второе Е не получается. Ну а М начинается на 2, то есть М = 2*. Теперь посмотрим на конец слова, там ...ОТ, то есть ...1233. Это значит, что Л = 3 и И = 23, а Д заканчивается на 1, то есть Д = *1. Звёздочка — единственная оставшаяся неразгаданной цифра. Разгадать её нетрудно: 31 = Р, 11 = Е, так что Д = *1 = 21.

Тогда М $= 22$, и мы раскрыли почти весь шифр:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 = К | 11 = Е | 21 = Д | 31 = Р |
| 2 = Г | 12 = О | 22 = М | 32 = |
| 3 = Л | 13 = Б | 23 = И | 33 = Т |

Теперь мы знаем всё, что нужно, чтобы записать шифром слово МАТЕМАТИКА, кроме одного — как шифруется буква А. Но раз Робот смог записать это слово, значит, для А должен найтись код. И этот код 32, ибо все остальные использованы.

**Задача 6.** Сорок детей водили хоровод. Из них 22 держали за руку мальчика и 30 держали за руку девочку. Сколько девочек было в хороводе? [*8 баллов*] (*Е. В. Бакаев*)

**Ответ.** 24 девочки.

**Решение.** $22 + 30 = 52$, значит, $52 - 40 = 12$ детей держали за руку и мальчика, и девочку. Значит, $30 - 12 = 18$ детей держали за руки только девочек. Эти 18 детей держали $18 \cdot 2 = 36$ девочкиных рук, и ещё 12 держали по одной девочкиной руке, так что всего у девочек было $36 + 12 = 48$ рук. Стало быть, девочек было $48 : 2 = 24$.

*Комментарий*. Расстановка детей в хороводе, соответствующая условиям задачи, существует, например, такая, как на рисунке. Возможны и другие расстановки.


Зная ответ (24 девочки и, стало быть, 16 мальчиков), можно заметить, что девочек больше, чем мальчиков, ровно на столько, на сколько ребят, держащих за руку девочку, больше, чем тех, кто держит за руку мальчика: $24 - 16 = 30 - 22 = 8$. Это не случайное совпадение. Зная этот факт, можно легко решить задачу. Но доказать сам факт не очень просто. Приведём одно из возможных доказательств.

Обозначим за $Д$ и $М$ количество девочек и мальчиков в хороводе, а за $X$ и $Y$ — соответственно количество тех, кто держит за руку девочку, и тех, кто держит мальчика.

Рассмотрим несколько (более одной) девочек, стоящих подряд. Попросим их по одной выходить из круга — сначала тех, кто «в серединке» (т. е. стоит между двумя девочками), а потом, когда девочек останется две, — одну из оставшихся. При этом будем следить за тем, как меняются $Д$, $М$ и $Д-М$, а также $X$, $Y$ и $X-Y$. Составим таблицу (маленькой буквой «д» обозначена выходящая из круга девочка):

| | $Д$ | $М$ | $Д-М$ | $X$ | $Y$ | $X-Y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| …ДдД… | $-1$ | не изм. | $-1$ | $-1$ | не изм. | $-1$ |
| …МдДМ… | $-1$ | не изм. | $-1$ | $-2$ | $-1$ | $-1$ |

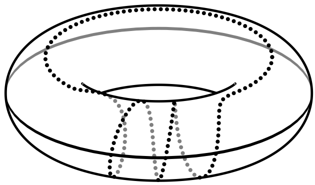
Мы видим, что разности $Д-М$ и $X-Y$ при удалении каждой девочки изменяются одинаково (уменьшаются на 1). Так же точно поступим с рядами мальчиков — совершенно аналогично можно показать, что обе разности будут увеличиваться на 1 при выходе из хоровода каждого мальчика.

После всего этого мы получим хоровод, в котором мальчики и девочки чередуются, то есть их поровну, и $Д-М=0$. Но и $X-Y=0$, потому что в данном случае $X=М$, а $Y=Д$.

Итак, $Д-М$ и $X-Y$ при каждом выходе ребёнка из круга изменялись одинаково, а в итоге получилось, что $Д-М=X-Y$. Это значит, что и в изначальном хороводе было $Д-М=X-Y$, что и требовалось доказать.

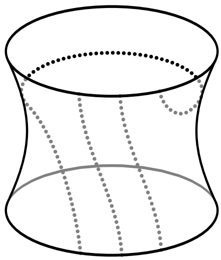
## *7 класс*

**Задача 1.** По поверхности планеты, имеющей форму бублика, проползли, оставляя за собой следы, две улитки: одна по внешнему экватору, а другая по винтовой линии (см. рис.). На сколько частей разделили поверхность планеты следы улиток? (Достаточно написать ответ.)



**[*4 балла*]** (*С. К. Смирнов, И. В. Ященко*)

**Ответ.** 3.



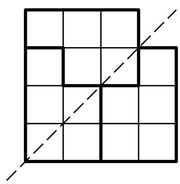
*Комментарий*. Представим себе поверхность бублика, сделанную из бумаги. Разрежем её по пути первой улитки и разогнём. Получится боковая поверхность цилиндра. Путь второй улитки при этом будет разрезан в трёх местах. То есть на получившейся поверхности след второй улитки представляет собой три линии, соединяющие нижнее основание цилиндра с верхним. Нетрудно сообразить, что они делят боковую поверхность цилиндра на 3 части.

**Задача 2.** См. задачу 2 для 6 класса. **[*6 баллов*]**

**Задача 3.** Сложите из трёх одинаковых клетчатых фигур без оси симметрии фигуру с осью симметрии.

**[*6 баллов*]** (*Г. А. Мерзон*)

**Ответ.** Одно из решений изображено на рисунке (пунктиром показана ось симметрии).



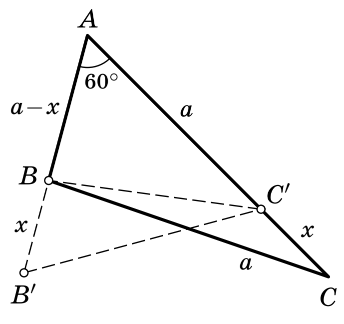
**Задача 4.** Впишите вместо звёздочек шесть различных цифр так, чтобы все дроби были несократимыми, а равенство верным: $\frac{*}{*}+\frac{*}{*}=\frac{*}{*}$. **[*6 баллов*]** (*А. В. Шаповалов*)

**Ответ.** Например, $\frac{1}{6}+\frac{7}{3}=\frac{5}{2}$ (есть и другие примеры).

*Комментарий.* Поиск примера упрощается, если заметить, что ни один знаменатель не может быть равен ни 1 (тогда знаменатели оставшихся дробей совпадали бы), ни 5 или 7 (потому что если знаменатели двух несократимых дробей не делятся на простое число, то не делится на это простое число и знаменатель их суммы или разности).

**Задача 5.** Один угол треугольника равен $60^\circ$, а лежащая против этого угла сторона равна трети периметра треугольника. Докажите, что данный треугольник равносторонний. **[*10 баллов*]** (*М. А. Волчкевич*)

**Решение.** Предположим противное. Пусть в треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $60^\circ$, $BC=a$, $AB=a-x$, тогда $AC==p-AB-BC=3a-a-(a-x)=a+x$. Выберем на луче $AB$ точку $B'$, а на луче $AC$ точку $C'$ так, что $AB'=AC'=a$.




Треугольник $AB'C'$ — равнобедренный с углом $60^\circ$. Поэтому он является и равносторонним, т. е. $B'C'=a$.

Осталось заметить, что треугольники $BC'B'$ и $BC'C$ равны по трём сторонам. Поэтому $\angle BCC'=\angle BB'C'=60^\circ$. То есть в треугольнике $ABC$ не только угол $A$, но и угол $C$ равен $60^\circ$, т. е. он равносторонний.

**Задача 6.** На конкурсе «А ну-ка, чудища!» стоят в ряд 15 драконов. У соседей число голов отличается на 1. Если у дракона больше голов, чем у обоих его соседей, его считают хитрым, если меньше, чем у обоих соседей, — сильным, остальных (в том числе стоящих с краю) считают обычными. В ряду есть ровно четыре хитрых дракона — с 4, 6, 7 и 7 головами и ровно три сильных — с 3, 3 и 6 головами. У первого и последнего драконов голов поровну.

а) Приведите пример того, как такое могло быть.

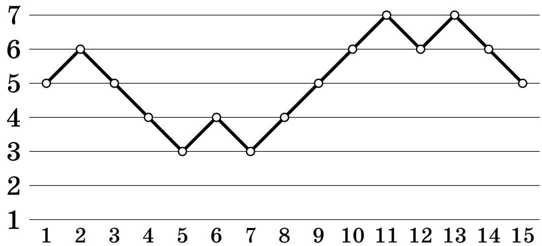
[***4 балла***]

б) Докажите, что число голов у первого дракона во всех примерах одно и то же. [***6 баллов***]

(*А. В. Шаповалов, И. В. Ященко*)

**Решение.** Удобно изображать ряд драконов в виде графика: вместо каждого дракона нарисуем точку на высоте, соответствующей числу голов дракона, и соединим эти точки.

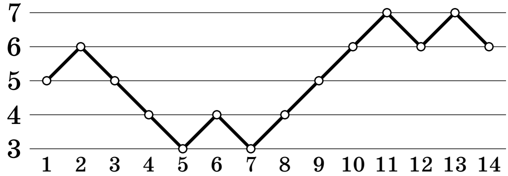
а) См. рисунок.



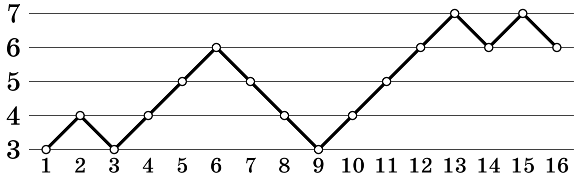

б) Заметим, во-первых, что где-то в промежутке между каждыми двумя хитрыми драконами стоит сильный.

Действительно, если мы будем идти вдоль ряда драконов, то после того, как мы миновали хитрого дракона, количество голов начинает уменьшаться. В некоторый момент оно должно начать увеличиваться — это и есть позиция, где стоит сильный дракон. Аналогично, далее увеличение когда-то закончится на хитром драконе.

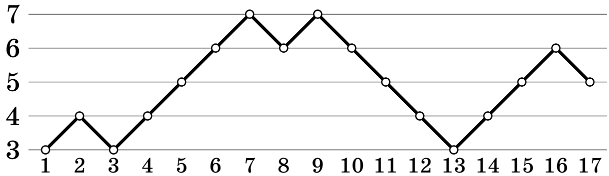
*Первый способ*. Посмотрим в каком порядке могут стоять сильные и хитрые драконы. Сильный дракон с 6 головами может стоять только между двумя хитрыми драконами с 7 головами. Возникают три случая: два оставшихся сильных дракона стоят либо по одну сторону от этой троицы в одном из двух порядков, либо по разные стороны.




Случай ... 6 ... 3 4 3 ... 7 6 7 ...




Случай ... 4 3 ... 6 ... 3 ... 7 6 7 ...

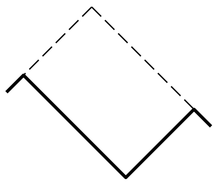



Случай ... 4 3 ... 7 6 7 ... 3 ... 6 ...

В первом случае 14 драконов уже определены однозначно, и единственный способ добиться того, чтобы у первого и последнего дракона голов было поровну, — добавить справа с краю еще одного дракона с 5 головами.

Второй и третий вариант невозможны, так как для них требуется более 15 драконов (даже без учёта условия одинакового количества голов у крайних драконов).

*Второй способ (набросок).* Можно обойтись и без перебора. Выберем участок графика между каким-нибудь сильным драконом и ближайшими к нему хитрыми драконами и «распрямим» его, заменив «впадину» на «горку» (см. рисунок).



Количество голов у драконов при этом изменится, и вместо двух хитрых драконов и одного сильного на этом участке теперь будет только один хитрый дракон. Но заметим, что количество голов у нового хитрого дракона будет равно сумме количеств голов у исходных двух хитрых минус количество голов у бывшего сильного. Это означает, что при такой процедуре величина «сумма количеств голов всех хитрых минус сумма количеств голов всех сильных» не меняется. Заметим также, что количество голов у крайних драконов в ряду от такой операции заведомо не поменялось.

Повторим теперь эту операцию, пока все сильные драконы не исчезнут. У нас останется один хитрый дракон, который по соображениям симметрии будет ровно посередине ряда. Посчитаем, сколько у него будет голов. Мы знаем, что изначально сумма количеств голов хитрых драконов минус сумма количеств голов сильных драконов равна $4+6+7+7-3-3-6=12$. Но теперь эта сумма равна просто количеству голов единственного хитрого дракона! Зная, что у него 12 голов, мы далее без труда восстанавливаем, что у крайних драконов (отстоящих от него на 7 позиций в ряду) по 5 голов.

*XIV устная городская олимпиада по математике
для 6–7 классов*

состоится 20 марта 2016 года.

На олимпиаду приглашаются школьники, получившие диплом призера или похвальную грамоту хотя бы на одном из следующих математических соревнований:

- Математический праздник (15.02.15 или 21.02.16),
- XIII городская устная олимпиада (09.03.15),
- Зимний турнир Архимеда (18.01.15 или 17.01.16),
- Весенний турнир Архимеда для 5 класса (в личном зачете, 05.04.15),
- II (муниципальный) этап Всероссийской олимпиады школьников для 7 класса (06.12.2015).

Для участия в олимпиаде необходима предварительная регистрация до 16 марта.

Подробности на сайте `olympiads.mccme.ru/ustn/`

# Информация о наборе в 5—8 классы с углублённым изучением математики в 2016 г.

| Школа | Телефон, URL | Адрес | Классы |
|---|---|---|---|
| 2 | (499) 137-17-69<br>www.sch2.ru | ул. Фотиевой, 18<br>(м. «Октябрьская») | 6—8,<br>добор в 7, 8 |
| 54 | (499) 245-99-72<br>(499) 245-54-25<br>moscowschool54.ru | ул. Доватора, 5/9<br>(м. «Спортивная») | 8 |
| 57 | (495) 691-85-72<br>(495) 691-54-58<br>sch57.ru | Мал. Знаменский пер., 7/10,<br>стр. 5 (м. «Боровицкая») | 8 |
| 179 | (495) 692-48-51<br>www.179.ru | ул. Бол. Дмитровка, 5/6,<br>стр. 7 (м. «Охотный ряд») | 7—8 |
| 218 | (499) 976-19-85<br>school218.ru | Дмитровское ш., 5а<br>(м. «Дмитровская») | 8 (ИУП) |
| 444 | (495) 465-23-52<br>(495) 465-60-52<br>schv444.mskobr.ru | ул. Ниж. Первомайская, 14<br>(м. «Первомайская») | 5<br>добор в 7, 8 |
| 1329 | sch1329.mskobr.ru | ул. Никулинская, 10<br>(м. «Юго-Западная») | 6 |
| 1534 | gym1534.ru | ул. Кедрова, 11<br>(м. «Академическая») | 5<br>добор в 7, 8 |
| 1543 | (495) 433-16-44<br>(495) 434-26-44<br>www.1543.ru | ул. 26 Бакинских<br>комиссаров, 3, корп. 5<br>(м. «Юго-Западная») | 8 |
| 2007 | (495) 716-29-35<br>fmsh2007.ru | ул. Горчакова, 9, корп. 1<br>(м. «Ул. Горчакова») | 5—8 |
| Интел-<br>лектуал | sch-int.ru | ул. Кременчугская, 13<br>(м. «Славянский бульвар») | 5<br>добор в 7, 8 |
| Курча-<br>товская | (499) 194-10-44<br>kurchat.mskobr.ru | ул. Маршала Василевского, 9,<br>корп. 1 (м. «Щукинская») | 5, 7 |

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.
Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте schools.mccme.ru

Оперативная информация об олимпиадах: www.olimpiada.ru

Страница Математического праздника
(задания, решения, победители)
www.mccme.ru/matprazdnik/