Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного математического образования

LXXXI Московская математическая олимпиада

Математический праздник

Москва
18 февраля 2018 года

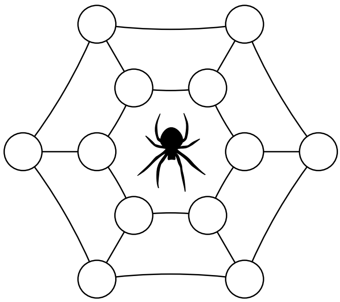
Задачи и решения подготовили:

Е. В. Бакаев, А. Д. Блинков, М. А. Волчкевич, Т. И. Голенищева-Кутузова, С. А. Дориченко, М. А. Евдокимов, А. А. Заславский, О. А. Заславский, Т. В. Казицына, Ю. С. Маркелов, Н. Ю. Медведь, Г. А. Мерзон, И. В. Раскина, А. В. Шаповалов, Д. Э. Шноль, А. С. Штерн, М. А. Хачатурян, А. В. Хачатурян, И. В. Ященко

При поддержке

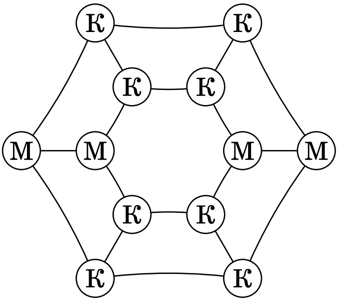
6 класс

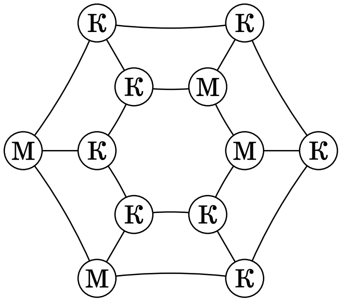
Задача 1. Паук сплёл паутину, и во все её 12 узелков попалось по мухе или комару. При этом каждое насекомое оказалось соединено отрезком паутины ровно с двумя комарами. Нарисуйте пример, как это могло быть (написав внутри узелков буквы М и К).



[*3 балла*] (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. На рисунке показаны два варианта расположения мух и комаров.





Комментарий. Перебором можно убедиться, что возможны только приведённые примеры (с точностью до поворотов паутины). Интересно, что можно, не опираясь на рисунок, показать, что комаров всегда 8. В самом деле, насекомых 12, у каждого по два соседа-комара, то есть комаров 24. Но каждого комара мы посчитали трижды, так как он для трёх насекомых является соседом. Значит, комаров на самом деле $24:3=8$. А мух тогда 4.

Задача 2. Незнайка выписал семь двузначных чисел в порядке возрастания. Затем одинаковые цифры заменил одинаковыми буквами, а разные — разными. Получилось вот что:

ХА, АЙ, АХ, ОЙ, ЭМ, ЭЙ, МУ

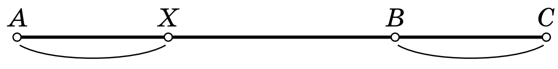
Докажите, что Незнайка что-то перепутал. [*4 балла*]
(*Е. В. Бакаев*)

Решение. Если посмотреть на пятое и шестое числа, видно, что М $<$ Й, а если на второе и третье — что Й $<$ Х. Значит, М $<$ Х. Но самое маленькое число начинается с Х, самое большое — с М, так что М $>$ Х. Значит, у Незнайки какая-то ошибка.

Задача 3. Автобусная остановка B расположена на прямолинейном шоссе между остановками A и C. Через некоторое время после выезда из A автобус оказался в такой точке шоссе, что расстояние от неё до одной из трёх остановок равно сумме расстояний до двух других. Ещё через такое же время автобус снова оказался в точке с таким свойством, а ещё через 25 минут доехал до B. Сколько времени требуется автобусу на весь путь от A до C, если его скорость постоянна, а на остановке B он стоит 5 минут?
[*6 баллов*] (*А. В. Хачатурян*)

Ответ. 3 часа.

Решение. В оба момента времени, о которых идёт речь в задаче, суммой будет, очевидно, расстояние от автобуса до самой дальней от него остановки. Это не может быть B, так как она ближе, чем C. Значит, это были C (до того момента, как автобус проехал полпути от A до C) и A (после этого момента).



В первом случае автобус находился в точке X и расстояние от него до C равнялось сумме расстояний до A и до B. Но оно же равно сумме расстояния до B и расстояния BC. Значит, автобус проехал в точности расстояние BC. На рисунке мы отметили дугами равные расстояния.

Ко второму моменту автобус проехал ещё одно расстояние BC и оказался в точке Y. Сумма расстояний от него до B и до C равна BC и ещё YB, посчитанному дважды. По условию это и есть расстояние до A, то есть YB вдвое короче BC.

А раз YB автобус проехал за 25 минут, то BC он проедет за 50 минут, а весь путь за $3 \cdot 50 + 25 + 5 = 180$ минут, то есть за три часа.

Задача 4. Учительница написала на доске двузначное число и спросила Диму по очереди, делится ли оно на 2? на 3? на 4? … на 9? На все восемь вопросов Дима ответил верно, причём ответов «да» и «нет» было поровну.

а) Можете ли вы теперь ответить верно хотя бы на один из вопросов учительницы, не зная самого числа? **[*3 балла*]**

б) А хотя бы на два вопроса? **[*5 баллов*]**

(*М. А. Евдокимов*)

Ответ. а) Да, на первый. б) Нет, не зная числа, этого гарантированно сделать нельзя.

Решение. а) Покажем, что написанное число чётно. Если бы оно было нечётным, то на вопросы о делимости на 2, 4, 6 и 8 Дима ответил «нет», а тогда, стало быть, на вопросы о делимости на 3, 5, 7 и 9 он ответил «да». Но если число делится на 5, 7 и 9, то оно делится на $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$ и не может быть двузначным. Значит, на первый вопрос учительницы можно с уверенностью ответить утвердительно.

б) Рассмотрим три числа — 18, 40 и 56 — и запишем в табличку ответы Димы (плюс означает «да», а минус — «нет»).

	На 2	На 3	На 4	На 5	На 6	На 7	На 8	На 9
18	+	+	−	−	+	−	−	+
40	+	−	+	+	−	−	+	−
56	+	−	+	−	−	+	+	−

Мы видим, что на все вопросы, кроме первого, ответы бывают разными, так что более ни на один вопрос гарантированно дать верный ответ мы, не зная числа, не сможем.

Комментарий. Покажем, как можно подобрать числа, приведённые в таблице. Пусть число делится на 8. Это значит, что оно делится также на 2 и на 4. Делиться на 3 оно не может, потому что тогда оно бы делилось ещё и на 6, а ответов «да» Дима дал ровно четыре. Значит, оно не делится на 3, не делится, стало быть, и на 9, а делится на 5 или на 7 (ровно на одно из них). То есть это 40 (или 80) либо 56.

Все три найденных числа делятся на 8 (и на 4) и не делятся на 9. Может быть, так будет всегда? Попробуем построить число, не делящееся на 8 и делящееся на 9. Оно тогда будет делиться на 3, кроме того, оно чётно, а поэтому разделится ещё и на 6. Вот уже четыре ответа «да», и мы получаем 18 (или 54).

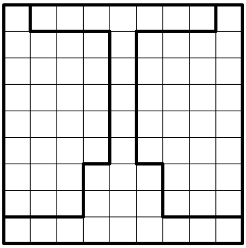
Можно показать, что учительница могла написать одно из следующих восьми чисел: 12, 18, 30, 40, 42, 54, 56, 80.

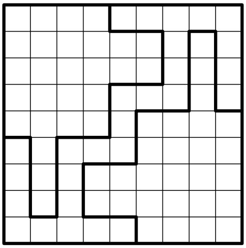
Задача 5. Шесть математиков пошли на рыбалку. Вместе они наловили 100 рыб, причём все поймали разное количество. После рыбалки они заметили, что любой из них мог бы раздать всех своих рыб другим рыбакам так, чтобы у остальных пятерых стало поровну рыб. Докажите, что один рыбак может уйти домой со своим уловом и при этом снова каждый оставшийся сможет раздать всех своих рыб другим рыбакам так, чтобы у них получилось поровну. **[*7 баллов*]** (*А. В. Шаповалов*)

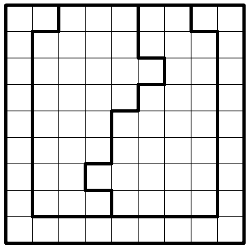
Решение. После того как один рыбак раздаст своих рыб, у остальных должно стать по $100:5=20$ рыб. Значит, каждый поймал не более 20 рыб. Пусть у рыбака Ивана ровно 20 рыб. Когда другой математик раздаёт своих рыб, Иван не получает ничего, но у всех становится поровну. Поэтому если Иван уйдёт, остальные могут раздавать по-прежнему, и у всех снова будет по 20. Осталось показать, что среди рыбаков действительно найдётся такой, который поймал ровно 20 рыб. В самом деле, если такого нет, то у рыбаков в сумме не более чем $19+18+17+16+15+14=99<100$ рыб — противоречие.

Задача 6. Разрежьте квадрат 9×9 клеток по линиям сетки на три фигуры равной площади так, чтобы периметр одной из частей оказался равным сумме периметров двух других. **[*8 баллов*]** (*М. А. Евдокимов*)

Ответ. Примеры приведены на рисунках. Возможны и другие решения.

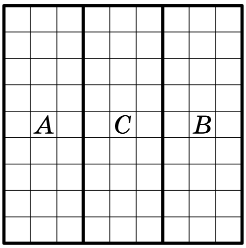






Комментарий. Покажем, как можно придумать нужное разрезание. Понятно, что в каждой фигуре должно быть $9 \cdot 9 : 3 = 27$ клеток.

Рассмотрим такое разрезание на три части A, B и C (см. рис.), когда часть C как бы разделяет части A и B.



Мы бы хотели, чтобы периметр средней части равнялся периметру двух крайних. Как этого добиться? У каждой части есть «внешний периметр» — та часть периметра, которая является границей квадрата, — и «внутренний». Заметим, что сумма внутренних периметров частей A и B всегда равна внутреннему периметру C. Значит, нам достаточно добиться того же и для внешних периметров. Общий периметр квадрата 36, значит, на часть C должно приходиться 18. Так и сделано в первых двух решениях — мы выделили два «уголка» периметром 9 в противоположных частях квадрата и нарисовали части A и B нужной площади, для красоты сделав их симметричными относительно вертикальной оси (в первом примере) и относительно центра квадрата (во втором). При этом условие на сумму периметров можно даже не проверять — оно выполнилось «автоматически».

Последний пример придуман из других соображений. Площадь и периметр фигуры связаны друг с другом, и в обычной ситуации можно сказать, что у маленькой по площади фигуры периметр мал, а у большой — велик. Но связь эта далеко не прямая, и при одной и той же площади периметр фигуры может быть разным — всё зависит от её формы. Можно доказать, что из всех фигур данной площади наименьший периметр имеет круг (и наоборот, при данном периметре круг даёт самую большую площадь). Поэтому части A и B должны быть компактными, «похожими на круг», а часть C, напротив, должна быть максимально непохожа на круг, и её логично сделать в виде длинной «колбаски» шириной в клетку. В нашем втором примере мы сначала нарисовали фигуру C (для красоты сделав её симметричной относительно вертикальной оси), а потом оставшееся поле поделили пополам. При этом сумма периметров слегка не сошлась, и пришлось от одной фигуры отделить клетку и приставить её в другом месте.

Задача о том, что максимальная площадь при данном периметре достигается на круге, имеет любопытную историю. В конце IV века до нашей эры Элисса, или Дидона, сестра Пигмалиона, царя финикийского города Тира, после смерти своего мужа была вынуждена бежать сначала на Кипр, а потом на побережье современной Ливии. Согласно легенде, она попросила у местных вождей немного земли для основания поселения для себя и своих людей. Те отказали чужестранке. Тогда Дидона пошла на хитрость — она попросила дать ей столько земли, сколько поместится в шкуру быка. Получив согласие, она велела разрезать шкуру на тончайшие ремешки и связать их в длинную ленту. Этой лентой она окружила 22 стадии земли — целую гору на побережье. Так был основан город Карфаген, и Дидона стала его первой правительницей. А задача окружения максимальной площади линией данной длины получила название «задача Дидоны» и стала первой задачей в большом разделе современной математики, который называется вариационным исчислением. О задаче Дидоны и других задачах такого рода можно прочесть в интересной книге В. М. Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах» (М.: МЦНМО, 2017).

7 класс

Задача 1. В разноцветной семейке было поровну белых, синих и полосатых детей-осьминожков. Когда несколько синих осьминожков стали полосатыми, папа решил посчитать детей. Синих и белых вместе взятых оказалось 10, зато белых и полосатых вместе взятых — 18. Сколько детей в разноцветной семейке? [***4 балла***] (*И.В.Раскина*)

Ответ. 21.

Первое решение. Заметим, что белых осьминожков было треть от общего количества, и они не перекрашивались. Если сложить 10 и 18, то получится количество всех детей вместе, к которому прибавлено количество белых, то есть 4/3 от количества всех детей. Значит, 4/3 от количества детей в семейке равно 28, то есть всего детей 21.

Второе решение. После перекрашивания полосатых осьминожков стало на $18 - 10 = 8$ больше, чем синих. Значит, полосатыми стали $8 : 2 = 4$ синих осьминожка. Белых и «старых полосатых» было $18 - 4 = 14$, то есть по $14 : 2 = 7$ каждого цвета. А всего в разноцветной семейке $3 \cdot 7 = 21$ ребёнок.

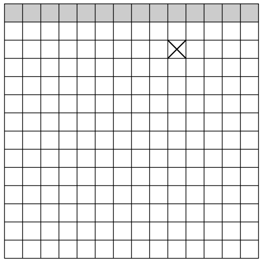
Задача 2. Использовав каждую из цифр от 0 до 9 ровно по разу, запишите 5 ненулевых чисел так, чтобы каждое делилось на предыдущее. [***6 баллов***] (*А.В.Шаповалов*)

Ответ. Например, 1, 2, 4, 8, 975360.

Комментарий. Легче проверять делимость, когда большинство чисел записываются 1-2 цифрами, а для этого большинство частных должны быть совсем маленькими (2, 3, ...). Начнем с самой маленькой последовательности: 1, 2, 4, 8. Делится ли оставшееся число на 8, зависит только от его трех последних цифр. Поэтому получить из оставшихся цифр число, делящееся на 8, легко — особенно если поставить на последнее место 0.

Есть много других решений: например, 9, 18, 36, 72, 504.

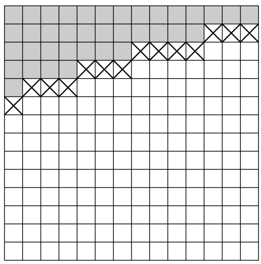
Задача 3. Все клетки верхнего ряда квадрата 14×14 заполнены водой, а в одной клетке лежит мешок с песком (см. рис.). За один ход Вася может положить мешки с песком в любые 3 не занятые водой клетки, после чего вода заполняет каждую из тех клеток, которые граничат с водой (по стороне), если в этой клетке нет мешка с песком. Ходы продолжаются, пока вода может заполнять новые клетки. Как действовать Васе, чтобы в итоге вода заполнила как можно меньше клеток? **[*8 баллов*]** (*И. В. Ященко*)



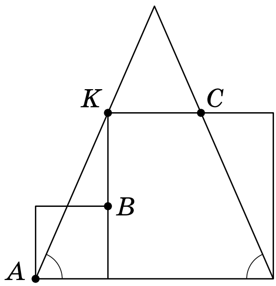
Решение. Докажем, что, как бы Вася ни действовал, вода заполнит как минимум 37 клеток.

Как бы Вася ни действовал на первом ходу, после него во втором ряду окажется не больше 3 мешков, а значит, вода заполнит не менее 11 клеток во втором ряду. Как бы Вася ни действовал на втором ходу, после него в первых двух рядах окажется не больше 7 мешков, то есть останется не менее $14 - 7 = 7$ вертикалей без мешков, по которым вода стечёт на третий ряд. Аналогичным образом после третьего хода заполнятся еще хотя бы 4 клетки, после четвёртого — хотя бы 1. Всего вода заполнит не менее $14 + 11 + 7 + 4 + 1 = 37$ клеток.

Добиться того, чтобы вода заполнила ровно 37 клеток, Вася может, положив мешки, например, как на рисунке (на первом ходу Вася кладет мешки во второй ряд, на втором — в третий и т. д.).

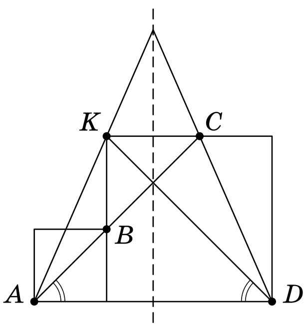


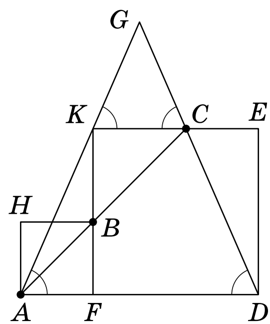
Задача 4. Два квадрата и равнобедренный треугольник расположены так, как показано на рисунке (вершина K большого квадрата лежит на стороне треугольника). Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.



[*8 баллов*] (*М. А. Евдокимов*)

Первое решение. У равнобедренного треугольника есть ось симметрии. При симметрии относительно этой оси K переходит в C, а D переходит в A (см. левый рис.). Значит, AC образует тот же угол с основанием, что и диагональ квадрата KD, т. е. $45°$. Но AB тоже образует с основанием угол $45°$, как диагональ меньшего квадрата. Значит, точки A, B и C действительно лежат на одной прямой.



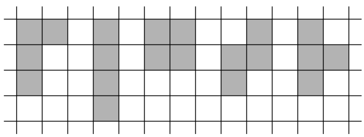


Второе решение (без использования симметрии). Введём обозначения так, как показано на рисунке справа и проведём отрезки AB и BC. Так как $\angle ABH = 45°$, достаточно доказать, что $\angle KBC = \angle BCK = 45°$ (тогда $\angle ABH + \angle HBK + \angle KBC = 45° + 90° + 45° = 180°$, что равносильно утверждению задачи).

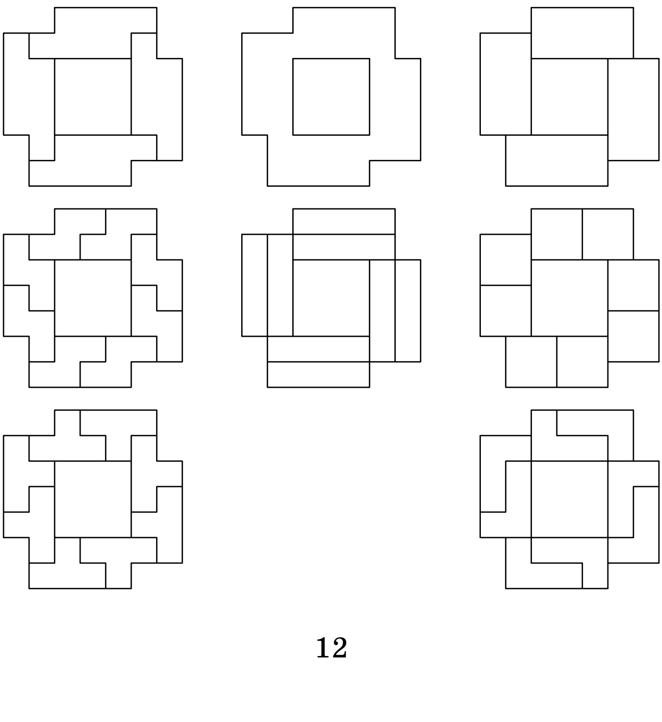
Используя равенство соответственных углов при параллельных прямых и равнобедренность треугольника AGD, получим: $\angle GKC = \angle GAD = \angle GDA = \angle GCK$. Следовательно, $GK = GC$, поэтому $AK = CD$. Значит, равны прямоугольные треугольники AKF и CDE (по гипотенузе и катету). Следовательно, $CE = AF = BF$, тогда $BK = CK$, откуда $\angle KBC = \angle BCK = 45°$, что и требовалось.

Задача 5. Фигурки из четырёх клеток называются тетрамино. Они бывают пяти видов (см. рис.). Существует ли такая фигура, что при любом выборе вида тетрамино эту фигуру можно составить, используя тетраминошки только выбранного вида? (Переворачивать тетраминошки можно.)

[*10 баллов*] (*Ю. С. Маркелов, ученик 8 класса*)



Ответ. Да, существует (см. рис.).



Комментарии. 1. Следить за тем, разрезается ли фигура на фигурки 5 разных видов, тяжело. Но можно заметить, что из двух квадратов можно сложить прямоугольник 2×4, который разрезается и на квадраты, и на полоски, и на L-тетраминошки. А из двух Z-тетраминошек легко сложить «параллелограмм», который разрезается также и на T-тетраминошки. Чтобы решить задачу, остаётся придумать фигуру, которую можно составить как из прямоугольников 2×4, так и из таких параллелограммов.

2. В примере выше фигура не является многоугольником, в ней есть дырка. Существуют ли фигуры с требуемым свойством без дырок, жюри неизвестно.

Задача 6. Робин Гуд взял в плен семерых богачей и потребовал выкуп. Слуга каждого богача принёс кошелёк с золотом, и все они выстроились в очередь перед шатром, чтобы отдать выкуп. Каждый заходящий в шатер слуга кладёт принесённый им кошелёк на стол в центре шатра и, если такого или большего по тяжести кошелька ранее никто не приносил, богача отпускают вместе со слугой. Иначе слуге велят принести ещё один кошелёк, который был бы тяжелее всех, лежащих в этот момент на столе. Сходив за очередным кошельком, слуга становится в конец очереди. Походы за кошельками занимают у всех одинаковое время, поэтому очерёдность захода в шатёр не сбивается. Когда Робин Гуд отпустил всех пленников, у него на столе оказалось: а) 28; б) 27 кошельков. Каким по счёту стоял в исходной очереди слуга богача, которого отпустили последним? [***10 баллов***] (*М.А. Хачатурян*)

Ответ. а) Седьмым; б) шестым или седьмым.

Решение. Если слуга принёс новый кошелёк, а с тех пор как он был в прошлый раз в шатре, никого не отпускали, то его точно ждёт удача (его кошелёк самый тяжёлый и на этот раз его хозяина отпустят). То есть если в плену было N богачей и одного только что отпустили, то дальше может произойти не более $N-1$ неудачи подряд.

а) Если в начале было семь богачей, то первого отпустят сразу, дальше будет не более 6 неудач, потом удача и не более 5 неудач и т. д. — и всего Робин Гуд получит не более

$(1+6)+(1+5)+(1+4)+(1+3)+(1+2)+(1+1)+1=$ $=28$ кошельков. И ровно 28 кошельков он получит, только если на первом круге неудача постигла всех, кроме первого, потом всех, кроме второго и т. д. А последним положит кошелёк седьмой слуга.

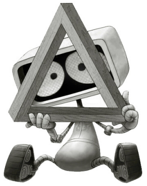
б) Если Робин Гуд получил в итоге не 28, а 27 кошельков, то ровно один промежуток неудач должен оказаться на 1 короче максимального. Тогда он закончится не после перехода на следующий круг, а на один шаг раньше, и на этом круге кроме слуги с наименьшим номером повезёт ещё и седьмому слуге.

Если это произошло на последнем круге, когда все остальные слуги уже ушли, то седьмой слуга и положит последний кошелёк. А если какие-то слуги ещё остались, когда седьмому слуге выпала удача вне очереди, то оставшиеся продолжат уходить по очереди, как в предыдущем пункте. И последний кошелёк положит последний из оставшихся — шестой слуга.

XVI устная городская олимпиада по математике
для 6–7 классов

состоится 25 марта 2018 года.

Информация на сайте `olympiads.mccme.ru/ustn/`



Информация о наборе в 5—8 классы с углублённым изучением математики в 2018 г.

Школа	Телефон, URL	Адрес	Классы
2	(499) 137-17-69 www.sch2.ru	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская», «Университет»)	6, 7, добор в 8
54	(499) 245-99-72 (499) 245-54-25 moscowschool54.ru	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	8
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58 sch57.ru	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая», «Кропоткинская»)	8
91	(495) 690-35-58 schc91.mskobr.ru	ул. Поварская, 14 (м. «Арбатская»)	7
179	(495) 692-48-51 www.179.ru	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	6—8
218	(499) 976-19-85 sch218.mskobr.ru	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская»)	8 индивид. уч. пл.
1329	sch1329.mskobr.ru	ул. Никулинская, 10 (м. «Юго-Западная»)	5, 6
1534	gym1534.ru	ул. Кедрова, 11 (м. «Академическая»)	5, добор в 7, 8
1543	(495) 433-16-44 (495) 434-26-58 www.1543.ru	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8
2007	(495) 716-29-35 fmsh2007.ru	ул. Горчакова, 9, корп. 1 (м. «Ул. Горчакова»)	5, добор в 6—8
Курчатовская	(499) 194-10-44 kurchat.mskobr.ru	ул. Маршала Василевского, 9, корп. 1 (м. «Щукинская»)	5

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.
Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте schools.mccme.ru

Оперативная информация об олимпиадах: www.olimpiada.ru

Страница Математического праздника
(задания, решения, победители)
www.mccme.ru/matprazdnik/