Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного математического образования

LXXXII Московская математическая олимпиада

Математический праздник

Москва
17 февраля 2019 года

Задачи и решения подготовили:

*Е. В. Бакаев, А. Д. Блинков, М. А. Волчкевич,
Т. И. Голенищева-Кутузова, М. А. Евдокимов,
А. А. Заславский, О. А. Заславский, Т. В. Казицына,
В. А. Клепцын, С. В. Маркелов, Н. Ю. Медведь,
Г. А. Мерзон, И. В. Раскина, С. И. Токарев,
А. В. Хачатурян, М. А. Хачатурян,
А. В. Шаповалов, И. В. Ященко*

При поддержке

Яндекс ШКОЛА ЛЕТОВО

В проведении Математического праздника также участвуют

Московский физико-технический институт

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

НИТУ «МИСиС»

РТУ МИРЭА

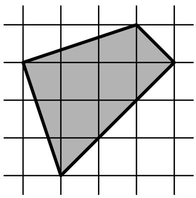
6 класс

Задача 1. Саша выписала числа от одного до ста, а Миша часть из них стёр. Среди оставшихся у 20 чисел есть в записи единица, у 19 чисел есть в записи двойка, а у 30 чисел нет ни единицы, ни двойки. Сколько чисел стёр Миша? [***4 балла***] (*А. В. Шаповалов*)

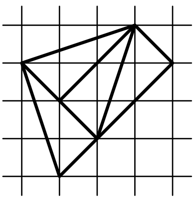
Ответ. 33.

Решение. Среди чисел от 1 до 100 единицу в записи содержит ровно двадцать: это сама единица, десять чисел от 10 до 19, числа 21, 31, ..., 91 (их восемь) и число 100. Значит, ни одно из этих чисел не было стёрто. Аналогично, чисел с двойкой ровно девятнадцать: сама двойка, десять чисел третьего десятка, а также 12, 32, 42, ..., 92 (таких восемь). То есть и из них Миша ни одно не стёр. Всего таких чисел $19+20-2=37$ (мы вычитаем 2, поскольку числа 12 и 21 посчитаны два раза). Всего осталось $37+30=67$ чисел, а Миша стёр $100-67=33$ числа.

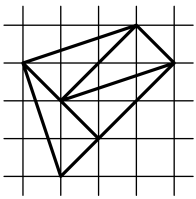
Задача 2. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на четыре одинаковые части. [***5 баллов***] (*М. А. Волчкевич*)



Решение. См. рисунок.



или



Комментарий. Решение задачи может стать нагляднее, если вместо обычной сетки с горизонтальными и вертикальными линиями рассмотреть диагональную, изображённую на рис. 1 на следующей странице пунктирными линиями. На диагональной сетке наша фигура имеет площадь 4 клетки, и её надо разрезать на 4 фигуры площади 1. Аналогичная фигура на обычной сетке изображена на рис. 2, её разрезание там проще увидеть, а потом его можно перенести на исходную фигуру.

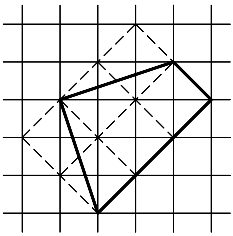


Рис. 1

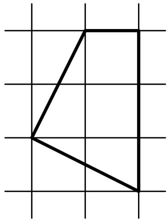


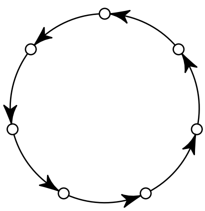
Рис. 2

Задача 3. Сеня не умеет писать некоторые буквы и всегда в них ошибается. В слове ТЕТРАЭДР он сделал бы пять ошибок, в слове ДОДЕКАЭДР — шесть, а в слове ИКОСАЭДР — семь. А сколько ошибок он сделает в слове ОКТАЭДР? **[*6 баллов*]** (*Е. В. Бакаев*)

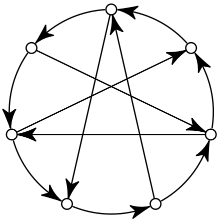
Ответ. 5.

Решение. Если Сеня с ошибкой пишет Д, то из букв О, Е, К, А, Э, Р, которые ещё входят в ДОДЕКАЭДР, он в трёх ошибается, а три пишет верно. Но все эти буквы, кроме Е, входят и в ИКОСАЭДР, то есть там он напишет верно как минимум две буквы и никак не сможет сделать 7 ошибок. Значит, букву Д Сеня пишет правильно. Тогда он неминуемо пишет с ошибкой все остальные буквы слов ДОДЕКАЭДР и ИКОСАЭДР, а в слове ТЕТРАЭДР, таким образом, помимо Д, ещё верно пишет букву Т, но ошибается во всех остальных. Теперь ясно, что в слове ОКТАЭДР Сеня сделает пять ошибок.

Задача 4. Семь городов соединены по кругу семью односторонними авиарейсами (см. рисунок). Назначьте (нарисуйте стрелочками) ещё несколько односторонних рейсов так, чтобы от любого города до любого другого можно было бы добраться, сделав не более двух пересадок. Постарайтесь сделать число дополнительных рейсов как можно меньше. **[*не более 6 баллов*]** (*В. А. Клепцын*)



Решение. Пример с пятью дополнительными рейсами см. на рисунке. Можно доказать, что добавить меньшее число рейсов невозможно.



Задача 5. Вокруг круглого озера через равные промежутки растут 2019 деревьев: 1009 сосен и 1010 ёлок. Докажите, что обязательно найдется дерево, рядом с которым растёт сосна и с другой стороны от которого через одно дерево тоже растёт сосна. **[*8 баллов*]** (*Е. В. Бакаев*)

Решение. Обойдём озеро по кругу и напишем на деревьях буквы: А, Б, В, затем снова А, Б, В и так далее. Деревьев с каждой буквой будет по $2019 : 3 = 673$. Если бы сосен с каждой буквой было бы не более чем 336, то их всего было бы не более чем $336 \cdot 3 = 1008$. А так как их 1009, то сосен с какой-то буквой (скажем, А) будет хотя бы 337. (Такое рассуждение часто встречается в решениях математических задач и называется принципом Дирихле.) Рассмотрим теперь только деревья с буквой А. Если какие-то две сосны стоят подряд, то задача решена — дерево с буквой В между ними удовлетворяет условиям. Если же между каждыми соседними соснами с буквой А растёт хотя бы по одной ёлке, то деревьев с буквой А будет не менее чем $337 \cdot 2 = 674$, а это не так.

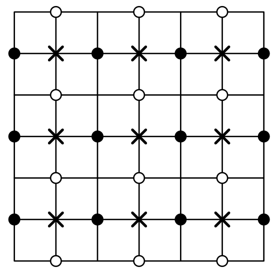
Задача 6. Каждая грань куба $6 \times 6 \times 6$ разбита на клетки 1×1. Куб оклеили квадратами 2×2 так, что каждый квадрат накрывает ровно четыре клетки, никакие квадраты не совпадают и каждая клетка накрыта одинаковым числом квадратов. Какое наибольшее значение может принимать это одинаковое число? (Квадрат можно перегибать через ребро.) **[*8 баллов*]** (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 3.

Решение. Оценка. Клетку в углу грани можно накрыть тремя способами (целиком в грани, с перегибом через одно ребро угла, с перегибом через другое ребро угла). Значит, каждая клетка накрыта не более чем тремя квадратами.

Пример. Рассмотрим обычное покрытие куба квадратами, когда каждая грань покрыта девятью квадратами. Из обычного покрытия можно получить повёрнутое: оставим нетронутыми две противоположные грани, а на остальных четырёх гранях сдвинем все квадраты по кольцу на одну клетку. Так как пару противоположных граней можно выбрать тремя способами, то повёрнутых покрытий получится ровно три. Покажем, что не совпадают никакие два квадрата на покрытиях, повёрнутых по-разному.

Действительно, рассмотрим одну грань. На рисунке отмечены центры покрывающих её квадратов: крестиками, если эта грань не сдвигалась, чёрными и белыми точками — если сдвигалась в одном или другом направлении. Видно, что никакие центры, а значит и никакие квадраты не совпали.



7 класс

Задача 1. Ньют хочет перевезти девять фантастических тварей весом 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 кг в трёх чемоданах, по три твари в каждом. Каждый чемодан должен весить меньше 20 кг. Если вес какой-нибудь твари будет делиться на вес другой твари из того же чемодана, они подерутся. Как Ньюту распределить тварей по чемоданам, чтобы никто не подрался? **[*4 балла*]**

(*М.А. Евдокимов, И.В. Раскина*)

Ответ. В первый чемодан посадить тварей весом 10, 4, 3 кг; во второй — 9, 7, 2; в третий — 8, 6, 5.

Комментарий. Найти ответ (и доказать, что он единственен) можно следующим образом. Тварей с весами 10, 9 и 8 кг необходимо поместить в разные чемоданы (иначе один чемодан будет слишком тяжёлым). Далее, чтобы никто не подрался, тварь весом 2 кг необходимо поместить во второй из этих чемоданов, а тогда тварь весом 4 кг — в первый. После этого нетрудно распределить и оставшихся тварей.

Задача 2. На завтрак группа из 5 слонов и 7 бегемотов съела 11 круглых и 20 кубических арбузов, а группа из 8 слонов и 4 бегемотов — 20 круглых и 8 кубических арбузов.

Все слоны съели поровну (одно и то же целое число) арбузов. И все бегемоты съели поровну арбузов. Но один вид животных ест и круглые, и кубические арбузы, а другой вид привередливый и ест арбузы только одной из форм. Определите, какой вид (слоны или бегемоты) привередлив и какие арбузы он предпочитает. **[*5 баллов*]**

(*М. А. Хачатурян*)

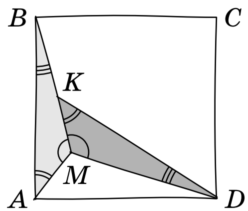
Ответ. Слоны едят только круглые арбузы.

Решение. Выясним сначала, сколько арбузов ест на завтрак каждое из животных. По условию 5 слонов и 7 бегемотов съедают 31 арбуз, а 8 слонов и 4 бегемота — 28 арбузов. Мы видим, что если заменить трёх бегемотов на трёх слонов, то требуется на три арбуза меньше. Значит, 12 слонов съели бы $31 - 7 = 24$ арбуза (т.е. каждый по 2), а 12 бегемотов $31 + 5 = 36$ арбузов (т.е. каждый по 3).

В первой группе бегемоты съели $7 \cdot 3 = 21$ арбуз. Столько арбузов одной формы не было, значит, бегемоты едят арбузы любой формы, а привередливы слоны. Во второй группе слоны съели $8 \cdot 2 = 16$ арбузов. Столько кубических арбузов не было, значит, слоны предпочитают именно круглые арбузы.

Задача 3. Два равных треугольника расположены внутри квадрата, как показано на рисунке. Найдите их углы.

[*6 баллов*] (*Е. В. Бакаев*)



Ответ. 120°, 45°, 15°.

Решение. Заметим, что треугольник MAD тоже равен треугольнику MAB — по трём сторонам: сторона MA у них общая, $AD = AB$ как стороны квадрата, $MD = MB$ по условию (лежат напротив соответственных углов в равных треугольниках).

Значит, $\angle BAM = \angle MAD = 90°/2 = 45°$. В точке M сходятся три соответственных угла равных треугольников, поэтому $\angle AMB = 360°/3 = 120°$. Сумма углов треугольника равна $180°$, значит, $\angle ABM = 180° - 120° - 45° = 15°$.

Задача 4. Имеется три кучки по 40 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход надо объединить две кучки, после чего разделить эти камни на четыре кучки. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто из играющих (Петя или Вася) может выиграть, как бы ни играл соперник? **[*6 баллов*]** (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. Вася.

Комментарий. На самом деле это игра-шутка: Вася выигрывает вне зависимости от действий игроков.

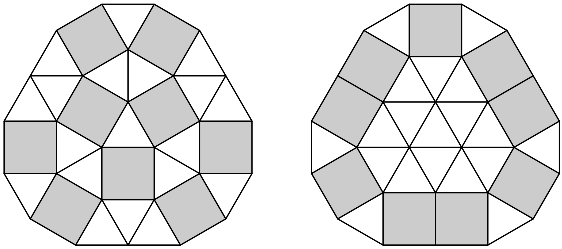
Решение. За ход две кучи заменяются на четыре, т.е. число куч увеличивается на 2. А сколько будет куч, когда игра закончится? В начале число куч было нечётным, поэтому, увеличиваясь на два, оно всё время будет оставаться нечётным.

Если очередной ход сделать нельзя, то в двух самых больших кучках в сумме не более 3 камней. Тогда во всех остальных кучках по 1 камню и их не менее $120 - 3 = 117$ штук. То есть всего должно быть (хотя бы) 119 куч.

Но чтобы получить 119 куч, надо сделать $(119 - 3) : 2 = 58$ ходов. Это число чётно, значит, последний ход сделал Вася (и он выиграл).

Задача 5. Максим сложил на столе из 9 квадратов и 19 равносторонних треугольников (не накладывая их друг на друга) многоугольник. Мог ли периметр этого многоугольника оказаться равным 15 см, если стороны всех квадратов и треугольников равны 1 см? **[*9 баллов*]** (*М. А. Волчкевич*)

Ответ. Да, мог (см. рис.).



Комментарии. 1. Сложность тут в том, что предлагается сложить фигуру довольно маленького периметра: даже если складывать многоугольник только из квадратов, то получится периметр не меньше 12 см, а надо ещё добавить целых 19 треугольников.

Из всех фигур, имеющих данную площадь, наименьший периметр имеет круг. Поэтому если такой многоугольник существует, то, видимо, он должен быть близок к кругу.

Кстати, можно подсчитать, что периметр круга, равновеликого нашему многоугольнику, составляет примерно 14,7 см. Так что получить многоугольник ещё меньшего периметра невозможно.

2. Угол при вершине квадрата — половина развёрнутого, а при вершине правильного треугольника — треть развёрнутого. Поэтому во внутренней вершине могут сходиться либо 6 треугольников, либо 3 треугольника и 2 квадрата, либо 4 квадрата (это помогает проверить, возможна ли в действительности нарисованная неточно от руки картинка).

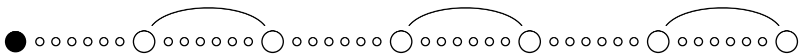
Задача 6. В ряд лежат 100 монет, часть — вверх орлом, а остальные — вверх решкой. За одну операцию разрешается выбрать семь монет, лежащих через равные промежутки (т.е. семь монет, лежащих подряд, или семь монет, лежащих через одну, и т.д.), и все семь монет перевернуть. Докажите, что при помощи таких операций можно все монеты положить вверх орлом. **[*9 баллов*]**

(*С. И. Токарев, А. В. Шаповалов*)

Решение. Ясно, что достаточно научиться переворачивать каждую из монет (сохраняя положение остальных).

Покажем сначала, как перевернуть пару монет, между которыми лежит ровно 6 монет. Если мысленно объединить эту пару с монетами между ними, получится группа из 8 монет подряд. Перевернём в этой группе 7 левых монет, затем 7 правых. Тогда крайние монеты перевернутся по разу, а промежуточные дважды (т.е. вернутся в исходное положение).

Пусть теперь мы хотим перевернуть какую-то одну монету. Будем считать, что она лежит в левой половине (для правой половины рассуждения аналогичны). Посмотрим на семёрку монет, первая из которых — выбранная нами, следующая лежит через 6 монет, следующая ещё через 6 и т.д.



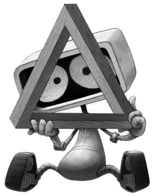
Эта семёрка состоит из выбранной нами монеты и трёх пар, в которых монеты лежат с промежутками в 6. Поэтому мы можем перевернуть каждую из этих пар (как описано выше), а потом всю семёрку. В итоге положение сменит только выбранная монета.

XVII устная городская олимпиада по математике для 6–7 классов

состоится 24 марта 2019 года.

Подробности и регистрация см.
`http://olympiads.mccme.ru/ustn/`

ЖУРНАЛ
КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ



Ежемесячный научно-познавательный журнал для школьников 5-8 классов

В журнале вы найдёте интересные статьи и задачи по математике, лингвистике, физике и другим естественным наукам, сможете принять участие в математическом конкурсе и конкурсе по русскому языку!

Знаете ли вы:

- **Что у атома внутри?**
- **Как вывернуть наизнанку флексотрубку?**
- **Притягиваются или отталкиваются плавающие предметы?**
- **Как получить футбольный мяч из зеркального икосаэдра?**
- **Как доказать формулу Пика с помощью тающего льда?**

Ответы на эти и многие другие вопросы ищите в журнале «Квантик»!

Редакция начала выпускать серию «Библиотечка журнала «Квантик».
Уже вышли в свет два выпуска:

- М. Евдокимов «Сто граней математики»
- С. Федин «Перепутаница»

Всю продукцию «Квантика» — журналы, альманахи, книги, плакаты, календари загадок — можно купить в магазине «Математическая книга», по адресу: г. Москва, Большой Власьевский переулок, д. 11 (сайт: **biblio.mccme.ru**), а также в интернет-магазине **kvantik.ru**

Подписаться на журнал «Квантик» можно в отделениях Почты России по двум каталогам и через интернет на сайте **vipishi.ru** по каталогу МАП

Каталог «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» агентства «РОСПЕЧАТЬ»:
индекс **80478** (на год)
индекс **84252** (на полгода или несколько месяцев)

«Каталог Российской прессы» (МАП):
индекс **11348** (на год)
индекс **11346** (на полгода или несколько месяцев)

ВСЕ ПОДРОБНОСТИ О ЖУРНАЛЕ — НА САЙТЕ KVANTIK.COM

Информация о наборе в 5—8 классы с углублённым изучением математики в 2019 г.

Школа	Телефон, URL	Адрес	Классы
2	(499) 137-17-69 www.sch2.ru	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская», «Университет»)	6, 7, добор в 8
54	(499) 245-99-72 (499) 245-54-25 moscowschool54.ru	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	8
57	(495) 691-85-72 (495) 691-54-58 sch57.ru	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая», «Кропоткинская»)	8
179	(495) 692-48-51 www.179.ru	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	6—8
444	(495) 465-23-52 schv444.mskobr.ru	ул. Ниж. Первомайская, 14 (м. «Первомайская»)	5, добор в 5—8
1329	sch1329.mskobr.ru	ул. Никулинская, 10 (м. «Юго-Западная»)	5, 6, добор в 7, 8
1534	(499) 124-43-07 gym1534uz.mskobr.ru	ул. Кедрова, 11 (м. «Академическая»)	5, 7, добор в 6—8
1543	(495) 433-16-44 (495) 434-26-58 www.1543.ru	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8
2007	(495) 716-29-35 fmsh2007.ru	ул. Горчакова, 9, корп. 1 (м. «Ул. Горчакова»)	5, добор в 6—8
Курча- товская	(499) 194-10-44 kurchat.mskobr.ru	ул. Маршала Василевского, 9, корп. 1 (м. «Щукинская»)	5

Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно.
Подробная информация о наборе в эти и другие классы на сайте schools.mccme.ru

Оперативная информация об олимпиадах: www.olimpiada.ru

Страница Математического праздника
(задания, решения, победители)
www.mccme.ru/matprazdnik/