LXXXVII Московская
математическая олимпиада

Математический праздник

Москва
18 февраля 2024 года

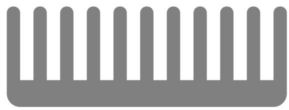
Департамент образования и науки города Москвы
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Факультет математики
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

Задачи и решения подготовили:

Э. Акопян, А. Блинков, Т. Голенищева-Кутузова, А. Грибалко, С. Дориченко, М. Евдокимов, П. Закорко, А. Заславский, О. Заславский, Т. Казицына, В. Клепцын, М. Колодей, Т. Корчемкина, Г. Мерзон, Г. Минаев, В. Радионов, И. Раскина, И. Русских, Б. Френкин, А. Хачатурян, М. Хачатурян, Е. Чернышева, А. Шаповалов, И. Ященко

☞ Задачи, решения, списки победителей и призёров Математического праздника и «Математического праздника в Математической вертикали» публикуются на сайте `https://mccme.ru/matprazdnik`

6 класс

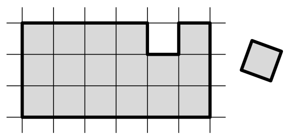


Задача 1. У Кати и Маши расчёски одинаковой длины. У каждой расчёски все зубчики одинаковые, а расстояния между зубчиками равны ширине зубчика. В Катиной расчёске 11 зубчиков (см. рис.). Сколько зубчиков в Машиной расчёске, если они в пять раз у́же зубчиков Катиной расчёски? **[*5 баллов*]** (*Т. Казицына*)

Ответ. 53.

Решение. Наложим Катину расчёску на Машину так, чтобы края совместились. Один зубчик Катиной расчёски закроет три зубчика Машиной и два промежутка между ними. В один просвет между Катиными зубчиками попадёт три Машиных промежутка и два зубчика. Всего на Катиной расчёске 11 зубчиков и 10 промежутков, что соответствует $11 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 53$ зубчикам Машиной расчёски.

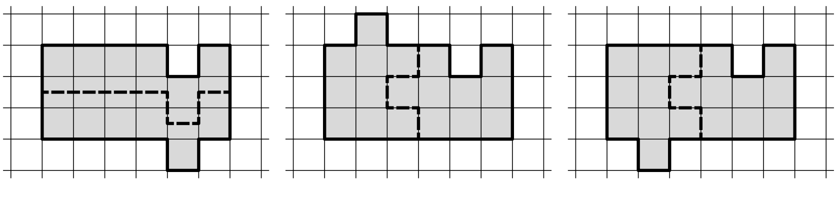
Можно рассуждать по-другому. В Катиной расчёске 11 зубчиков и 10 промежутков между ними. Всего $11 + 10 = 21$ одинаковых отрезков. В Машиной расчёске таких отрезков $21 \cdot 5 = 105$. Из них зубчиков на один больше, чем промежутков. То есть зубчиков 53, а промежутков 52.



Задача 2. Из прямоугольника 3×6 вырезали одну клетку (см. рис.). «Пришейте» эту клетку в другом месте так, чтобы получилась фигура, которую можно разрезать на две одинаковых.

[*5 баллов*] (*Т. Казицына*)

Ответ. Несколько примеров пришивания и разрезания см. на рисунках.



Комментарий. Части одинаковые, а значит, можно одну из частей переместить как единое целое, чтобы она наложилась на другую. В первом примере для этого надо её сдвинуть параллельно самой себе, во втором повернуть вокруг некоторой точки, а в третьем сначала сдвинуть, а потом перевернуть на другую сторону. Эти перемещения называют движениями плоскости — они не меняют расстояния между точками фигуры, и поэтому фигура сохраняет свою форму и размеры. Движения, которые мы видим в этих примерах, называются соответственно параллельным переносом, поворотом и скользящей симметрией. Теорема Ша́ля гласит, что всякое движение плоскости относится к одному из трёх данных типов. Мишель Шаль — известный французский геометр XIX века.

Задача 3. В сумме

$$\text{П,Я} + \text{Т,Ь} + \text{Д,Р} + \text{О,Б} + \text{Е,Й}$$

все цифры зашифрованы буквами (разными буквами — разные цифры). Оказалось, что все пять слагаемых не целые, но сама сумма является целым числом. Каким именно?

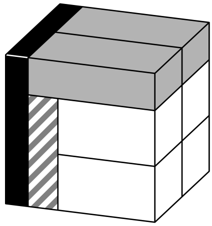
Для каждого возможного ответа напишите один пример с такими пятью слагаемыми. Объясните, почему другие суммы получить нельзя. **[*7 баллов*]** (*А. Шаповалов*)

Ответ. 27 (пример $0{,}5 + 1{,}6 + 7{,}4 + 8{,}3 + 9{,}2 = 27$) и 18 (пример $0{,}9 + 1{,}8 + 3{,}7 + 5{,}4 + 6{,}2 = 18$).

Решение. Сумма Я + Ь + Р + Б + Й должна оканчиваться нулём. Сумму 10 получить можно, только если взять пять наименьших цифр ($0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$), но такой пример не получится составить, так как ноль не может стоять после запятой (тогда дробь будет целым числом вопреки условию). Максимальная сумма пяти цифр $9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$, так что получить можно только суммы 20 и 30.

Заметим, что все буквы различны, то есть все десять цифр участвуют в записи по одному разу. Общая сумма всех десяти цифр равна 45. Поэтому если сумма цифр после запятой равна 20, то при суммировании после запятой мы получим 0, а в предыдущий разряд перенесем 2. Эта 2 добавится к сумме цифр до запятой, которая равна $45 - 20 = 25$, и мы находим ответ 27. Аналогично, если сумма цифр после запятой равна 30, то ответ будет равен $45 - 30 + 3 = 18$.

Комментарий. Примеров в этой задаче очень много – есть 86400 способов получить сумму 27 и 72000 способов получить сумму 18.



Задача 4. Миша сложил из восьми брусков куб (см. рис.). Все бруски имеют один и тот же объём, серые бруски одинаковые и белые бруски тоже одинаковые. Какую часть ребра куба составляют длина, ширина и высота белого бруска?

[*7 баллов*] (*М. Евдокимов*)

Ответ. $\frac{7}{10}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{14}$.

Решение. Будем считать, что ребро куба равно 1, тогда его объём тоже 1, а объём каждого из восьми брусков равен $\frac{1}{8}$.

Очевидно, что ширина серого и белого брусков равна $\frac{1}{2}$.

Два измерения чёрного бруска равны по 1, значит, третье равно $\frac{1}{8}$. То есть длина серого бруска

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Теперь мы можем найти высоту серого бруска, разделив объём на произведение длины и ширины:

$$\frac{1}{8} : \left(\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{7}.$$

Оставшаяся часть высоты куба — удвоенная высота белого бруска, значит, высота белого бруска равна

$$\left(1 - \frac{2}{7}\right) : 2 = \frac{5}{14}.$$

Теперь найдём длину белого бруска тем же приёмом, что и высоту серого:

$$\frac{1}{8} : \left(\frac{5}{14} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{10}.$$

Задача 5. Решил шах проверить придворного мудреца. «Вот тебе шесть шкатулок, — сказал шах, — с надписями 1, 2, 3, 4, 5, 6 на крышках. В каждой шкатулке золотая монета, которая весит ровно столько граммов, сколько написано. Ты расставляешь шкатулки как угодно в клетках прямоугольника 2×3. Потом я втайне от тебя меняю местами монеты в каких-то двух шкатулках, стоящих в соседних по стороне клетках (или ничего не меняю). Затем ты укажешь на несколько шкатулок, а я назову тебе общий вес монет в них. Если после этого правильно определишь, какие монеты я переложил, останешься при дворе. А не сможешь — прогоню вон!»

Как может действовать мудрец, чтобы выдержать испытание? [*8 баллов*] (*А. Шаповалов*)

Решение. Мудрец может расположить шкатулки, например, так:

4	5	1
2	6	3

И указать шаху те шкатулки, где на крышках массы 2, 3 и 5. Если шах назовёт сумму 10, значит, он ничего не менял. Если он менял местами какие-то монеты, сумма всякий раз будет другой:

Что менял шах	Сумма
ничего	10
4 и 2	12
5 и 6	11
1 и 3	8
4 и 5	9
2 и 6	14
5 и 1	6
6 и 3	13

Как видим, все суммы разные, так что по сумме мудрец сможет понять, менялись ли монеты и какие, и назвать их правильно.

Комментарий. Как мог рассуждать мудрец, придумывая пример? Раскрасим прямоугольник 2×3 в шахматном порядке. Ясно, что надо назвать либо три белые клетки, либо три чёрные — в противном случае среди названных (или не названных) будут две соседние, и мудрец не сможет определить, поменял в них шах монеты или нет. Возможные суммы в трёх шкатулках меняются в диапазоне от 6 до 15, причём сумма от замены монет может увеличиться или уменьшиться на 1, 2, 3, 4 или 5. Чтобы восемь сумм (исходная и при любом из семи обменов) были различны, исходная сумма должна быть примерно в середине ряда (равняться 10 или 11). Дальше можно действовать подбором.

Задача 6. В школе все ученики — отличники, хорошисты либо троечники. В круг встали 99 учеников. У каждого среди трёх соседей слева есть хотя бы один троечник, среди пяти соседей справа — хотя бы один отличник, а среди четырёх соседей — двух слева и двух справа — хотя бы один хорошист. Может ли в этом круге быть поровну отличников и троечников? **[*8 баллов*]**

(*А. Шаповалов*)

Ответ. Не может.

Решение. Заметим, что первые два условия можно проще сформулировать так: среди любых трёх стоящих подряд есть троечник, среди любых пяти стоящих подряд есть отличник. Кроме того, рядом с каждым хорошистом или через одного человека от него должен стоять другой хорошист (назовем таких двух хорошистов друзьями). Если два друга-хорошиста стоят рядом, то с обеих сторон от них должны стоять троечники, а если через одного, то троечник стоит между ними. Поэтому, если у какого-то хорошиста есть два друга, то возникает одна из двух пятёрок — 34434 или 43434, в которых нет отличника, что невозможно. Таким образом, хорошисты распадаются на пары друзей, и поэтому хорошистов чётное число. А тогда отличников и троечников вместе — нечётное, значит, их не поровну.

7 класс

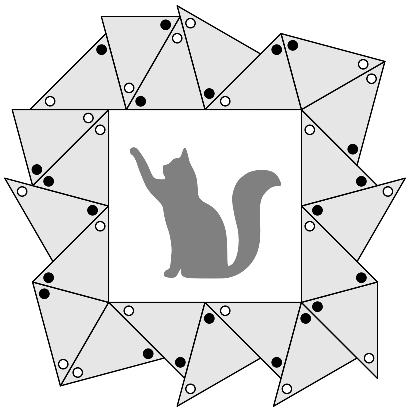
Задача 1. Расставьте в клетки квадрата 3×3 различные целые положительные числа, не большие 25, так, чтобы в любой паре соседних по стороне клеток одно число делилось на другое. **[*4 балла*]** (*И. Ященко*)

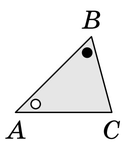
Решение. Больше всего соседей у центральной клетки — поставим туда 1. В соседние с центральной клеткой поставим числа поменьше — 2, 3, 4, 5. На центральное число все они делятся (на 1 делится любое число). А чтобы условие выполнялось и для угловых клеток, поставим в каждый угол произведение его соседей. Так получается один из возможных примеров:

10	2	8
5	1	4
15	3	12

Можно придумать и другие примеры.

Задача 2. Коля пришёл в музей современного искусства и увидел квадратную картину в раме необычной формы, состоящей из 21 равного треугольника. Коля заинтересовался, чему равны углы этих треугольников. Помогите ему их найти.





[*5 баллов*]
(*И. Русских*)

Ответ. 45°, 60° и 75°.

Решение. Посмотрим на левый верхний угол картины. Из него видно, что два угла, равных углу A, в сумме дают 90°. Значит, угол A равен 45°. Посмотрим теперь на правый верхний угол картины. Три угла, равных углу C, один угол, равный углу A, и угол квадрата составляют полный угол в 360°. Значит, $3\angle C = 360^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 225^\circ$, то есть угол C равен $225^\circ : 3 = 75^\circ$. Тогда угол B равен $180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$.

Задача 3. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4).

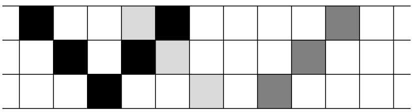
Задача 4. См. задачу 4 для 6 класса (с. 5).

Задача 5. На острове живут красные, синие и зелёные хамелеоны. 35 хамелеонов встали в круг. Через минуту все они одновременно поменяли цвет, каждый на цвет одного из своих соседей. Ещё через минуту снова все одновременно поменяли цвета на цвет одного из своих соседей. Могло ли оказаться, что каждый хамелеон побывал и красным, и синим, и зелёным? **[*9 баллов*]** (*И. Русских*)

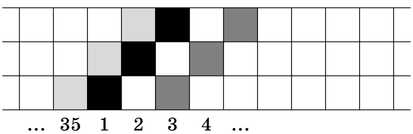
Ответ. Не могло.

Первое решение. Предположим, такое случилось. В первый раз никакой хамелеон не мог отдать свой цвет обоим соседям — иначе он будет стоять между двумя хамелеонами этого же цвета и во второй раз будет вынужден окраситься в этот цвет вновь. Но никакой хамелеон не мог отдать свой цвет обоим соседям и во второй раз: если так произошло, то этот хамелеон минуту назад получил этот цвет от одного из соседей, значит, один из его соседей принимал этот цвет два раза — в начале и в конце. Поэтому каждый хамелеон каждый раз отдаёт свой цвет не более чем одному соседу, то есть количество хамелеонов каждого цвета не увеличивается. Но хамелеонов 35, а цветов 3, значит, изначально хамелеонов какого-то цвета не больше 11 (иначе суммарно хамелеонов хотя бы $12 \cdot 3 = 36$). Тогда хамелеонов этого цвета за всё время было не больше $11 \cdot 3 = 33$, и какой-то из хамелеонов точно в этот цвет не окрашивался.

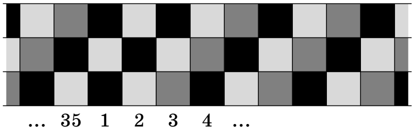
Второе решение. Предположим, что такое могло быть. Пронумеруем хамелеонов по кругу от 1 до 35 и нарисуем таблицу из 3 строк и 35 столбцов, в которой каждому хамелеону соответствует столбец (будем считать таблицу зацикленной, то есть после 35-го столбца будет вновь идти первый). Закрасим каждую клетку в первой (верхней) строке в изначальный цвет соответствующего хамелеона, во второй строке — в его цвет через минуту и в третьей строке — в итоговый цвет. Итоговый цвет каждый хамелеон мог позаимствовать от правого или от левого соседа, но, поскольку каждый хамелеон каждый цвет принимал ровно один раз, правый сосед мог получить этот цвет после первой минуты только от своего правого соседа, а левый — только от своего левого. То есть в таблице от каждой клетки третьей строки вверх идёт одна или две одноцветные диагонали (см. рис.).



Посмотрим на первого хамелеона. Без ограничения общности, пусть от его клетки в третьем ряду одноцветная диагональ идёт вправо. Посмотрим на хамелеона номер 3: в его столбце первая и третья клетки должны быть разного цвета, а значит, диагональ от его нижней клетки может идти только вправо. Рассуждая аналогично, получаем, что и у хамелеонов с номерами 5, 7, ..., 35 диагональ от нижней клетки идёт вправо.

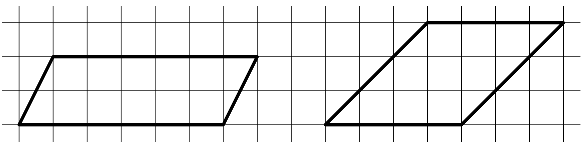


Но те же самые рассуждения можно применить к хамелеонам 35 и 2 — то есть и от нижних клеток хамелеона 2, а также хамелеонов 4, 6, ..., 34 диагонали могут идти только вправо! Значит, вся таблица раскрашена в диагональные «полоски». При этом диагонали соседних хамелеонов или хамелеонов, сидящих через одного, должны быть разного цвета: иначе один из хамелеонов два раза примет один и тот же цвет. Это означает, что цвета полосок повторяются (первый, второй, третий, первый, второй, третий, ...), тогда итоговый цвет 35-го хамелеона совпадает с итоговым цветом 2-го — противоречие.



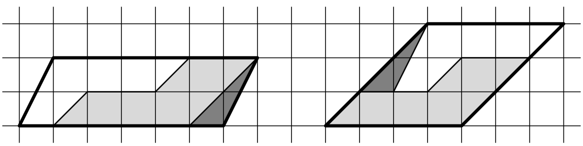
Комментарий. Из решения следует, что для выполнения желаемого условия количество хамелеонов должно делиться на 3; если изначальные цвета хамелеонов чередуются (красный, синий, зелёный, красный, синий, зелёный, ...) и каждый хамелеон каждый раз будет брать цвет от хамелеона справа, то условие задачи будет выполнено.

Задача 6. Разрежьте первый параллелограмм на три части и сложите из них второй.

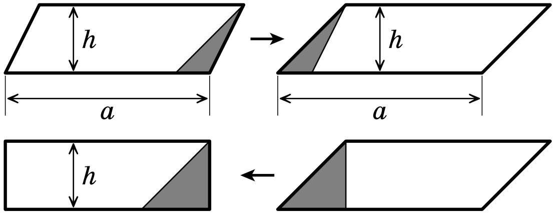


[*9 баллов*] (*Т. Голенищева-Кутузова*)

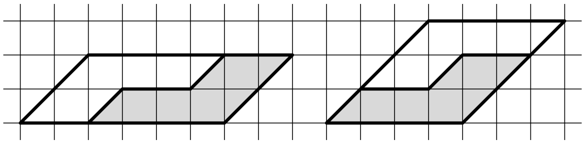
Ответ.



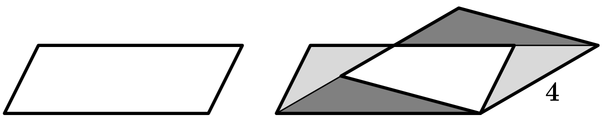
Комментарии. 1. Любой параллелограмм нетрудно разрезать на две части и сложить из них другой параллелограмм с такими же основанием a и высотой h. Отсюда, кстати, можно увидеть, что все такие параллелограммы имеют одинаковую площадь, и найти эту площадь: она равна площади прямоугольника $a \times h$. В частности, параллелограммы из условия имеют одинаковую площадь: $6 \times 2 = 4 \times 3$.



2. Если первую фигуру можно разрезать на части и сложить из них вторую (будем говорить «перекроить первую фигуру во вторую»), а вторую можно перекроить в третью, то и первую можно перекроить в последнюю (подумайте, почему!). Это помогает найти решение задачи: можно сначала перекроить первый параллелограмм в параллелограмм с нужным наклоном боковой стороны (как показано выше), а потом изменить пропорции параллелограмма, не меняя наклон боковой стороны.



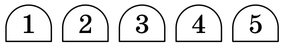
Можно поступить и по-другому: сначала «перекосить» (действуя, как в первом комментарии) первый параллелограмм так, чтобы у него появилась сторона длины 4, потом перекосить этот параллелограмм во второй. Получится другое разрезание — вершины частей, правда, уже не будут лежать в узлах сетки.



3. Теорема Бо́йяи—Ге́рвина говорит, что вообще любые два многоугольника одинаковой площади можно перекроить один в другой. (Доказательство можно прочитать в брошюре В. Г. Болтянского «Равновеликие и равносоставленные фигуры». Важную роль в нём играют две идеи из предыдущих комментариев.) Но, вообще говоря, может потребоваться много частей. Например, чтобы перекроить квадрат 1×1 в прямоугольник $\frac{1}{100} \times 100$, понадобится разрезать квадрат на несколько десятков частей.

6 класс в Математической вертикали

Задача 1. Белая, серая, чёрная, рыжая и жёлтая мышки едят сыр только своего цвета. Федя знает, что мышки живут в пяти норках вдоль стены, при этом белая мышка живёт рядом с серой и рядом с чёрной, а рыжая и серая не живут рядом. Федя положил перед норками сыр: перед первой (самой левой) норкой — серый, перед второй — рыжий, перед третьей — белый, перед четвёртой — жёлтый, перед пятой — чёрный. В результате ни один кусок не оказался съеден. Для каждой норки запишите, какая мышка в ней живёт. **[*4 балла*]** (*Т. Казицына*)



Ответ. В первой норке живёт рыжая мышка, во второй — жёлтая, в третьей — чёрная, в четвёртой — белая, в пятой — серая.

Решение. Белая мышка живёт между двумя другими, но не в третьей норке (иначе белый сыр перед ней был бы съеден). Значит, белая мышка живёт либо во второй норке, либо в четвёртой. Если во второй, то её соседка серая мышка живёт не в первой, а в третьей норке, чёрная — в первой, а рыжая живёт не рядом с серой — то есть не в четвёртой, а в оставшейся пятой норке. Но тогда в четвёртой должна жить жёлтая, а жёлтый сыр перед ней оказался не съеден — противоречие. Значит, белая мышка живёт не во второй, а в четвёртой норке. Тогда её соседка чёрная живёт в третьей норке, серая — в пятой; рыжая из оставшихся двух может жить только в первой, и тогда жёлтая — во второй.

Задача 2. См. задачу 1 для 6 класса (с. 3). **[*5 баллов*]**

Задача 3. См. задачу 2 для 6 класса (с. 3). **[*5 баллов*]**

Задача 4. В сумме

$$П,Я + Т,Ь + Д,Р + О,Б + Е,Й$$

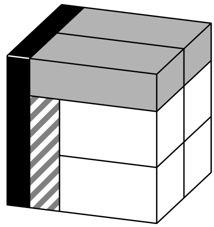
все цифры зашифрованы буквами (разными буквами — разные цифры). Оказалось, что все пять слагаемых не целые, но сама сумма является целым числом.

а) Приведите пример, как такое может быть. **[*4 балла*]**

б) Найдите все целые числа, которым может равняться такая сумма. **[*3 балла*]** (*А. Шаповалов*)

Решение. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4).

Задача 5. Миша сложил из восьми брусков куб (см. рис.). Все бруски имеют один и тот же объём, серые бруски одинаковые и белые бруски тоже одинаковые.



а) Во сколько раз короткое ребро чёрного бруска меньше ребра куба? **[*3 балла*]**

б) Какую часть ребра куба составляют длина, ширина и высота белого бруска? **[*5 баллов*]**

(*М. Евдокимов*)

Ответ. а) В 8 раз. б) $\frac{7}{10}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{14}$.

Решение. См. задачу 4 для 6 класса (с. 5).

Задача 6. Решил шах проверить придворного мудреца. «Вот тебе шесть шкатулок, — сказал шах, — с надписями 1, 2, 3, 4, 5, 6 на крышках. В каждой шкатулке золотая монета, которая весит ровно столько граммов, сколько написано. Ты расставляешь шкатулки как угодно в клетках прямоугольника, который я тебе укажу. Потом я втайне от тебя меняю местами монеты в каких-то двух шкатулках, стоящих в соседних по стороне клетках (или ничего не меняю). Затем ты укажешь на несколько шкатулок, а я назову тебе общий вес монет в них. Если после этого правильно определишь, какие монеты я переложил, останешься при дворе. А не сможешь — прогоню вон!»

Как может действовать мудрец, чтобы выдержать испытание, если прямоугольник, в клетках которого нужно расставить шкатулки, имеет размер

а) 1×6? **[*4 балла*]**

б) 2×3? **[*5 баллов*]** (*А. Шаповалов*)

Решение. а) Мудрец может расположить шкатулки, например, так: $\boxed{1\,|\,6\,|\,2\,|\,5\,|\,3\,|\,4}$, а шаху указать те шкатулки, где на крышках массы 1, 2 и 3.

Если шах ничего не поменяет, то сумма будет равна $1 + 2 + 3 = 6$. Если он поменяет 6 с 1, то сумма увеличится на 5 и будет равна 11. Если поменяет 6 с 2, то сумма увеличится на 4 и будет равна 10. Если поменяет 5 с 2, то сумма увеличится на 3 и будет равна 9. Если поменяет 5 с 3, то сумма увеличится на 2 и будет равна 8. Если поменяет 4 с 3, то сумма увеличится на 1 и будет равна 7.

Комментарий. Шкатулки можно распределить по клеткам и по-другому, а вот спрашивать нужно либо про сумму монет в клетках, стоящих на чётных местах, либо про сумму монет в клетках, стоящих на нечётных местах.

б) См. задачу 5 для 6 класса (с. 6).

7 класс в Математической вертикали

Задача 1. См. задачу 1 для 6 класса (с. 3). **[*4 балла*]**

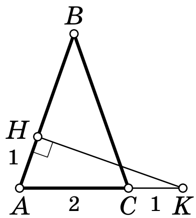
Задача 2. См. задачу 4а) для 6 класса в Математической вертикали (с. 13). **[*4 балла*]**

Задача 3. См. задачу 2 для 7 класса (с. 8). **[*5 баллов*]**

Задача 4. Расставьте в клетки квадрата 3×3 различные целые положительные числа, каждое из которых меньше 20, так, чтобы в любой паре соседних по стороне клеток одно число делилось на другое. **[*5 баллов*]**

Решение. См. задачу 1 для 7 класса (с. 8).

Задача 5. На продолжении основания AC равнобедренного треугольника ABC выбрали точку K так, что $CK = 1$ (см. рис.). Точка H на стороне AB такова, что KH и AB перпендикулярны, $AH = 1$. Найдите периметр треугольника ABC, если $AC = 2$.

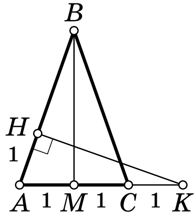


[*7 баллов*] (*Т. Голенищева-Кутузова*)

Ответ. 8.

Решение. Пусть M — середина AC. Тогда $AM = MC = 1$. BM — медиана в равнобедренном треугольнике, проведённая к основанию, поэтому она также является высотой.

Тогда треугольники AKH и ABM равны по стороне и двум прилежащим к ней углам: $AH = AM = 1$, угол A общий, углы AHK и AMB — прямые. Тогда $AB = AK = 3$. Так как треугольник ABC равнобедренный, то его периметр равен $2AB + AC = 2 \cdot 3 + 2 = 8$.



Задача 6. См. задачу 6 для 6 класса в Математической вертикали (с. 14). **[*9 баллов*]**

Обладатели дипломов Математического праздника—2024 приглашаются на XXI устную городскую олимпиаду для 6–7 классов, проходящую 7 апреля 2024 года. Подробную информацию см. на сайте `olympiads.mccme.ru/ustn/` во второй половине марта.