6 класс

Задача 1. В записи $\star 1 \star 2 \star 4 \star 8 \star 16 \star 32 \star 64 = 27$ вместо знаков «$\star$» поставьте знаки «$+$» или «$-$» так, чтобы равенство стало верным. [*5 баллов*]

Решение. Знаки можно расставить следующим образом:

$$+1 - 2 + 4 + 8 - 16 - 32 + 64 = 27.$$

Найти такое расположение знаков легко, если расставлять знаки справа налево.

Ответ: $+1 - 2 + 4 + 8 - 16 - 32 + 64 = 27.$

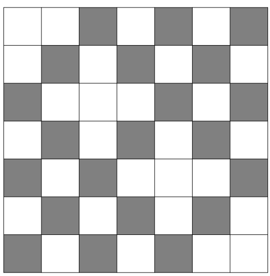
Замечание. Попробуйте сами доказать, что

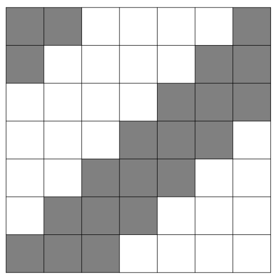
а) любое число, получающееся таким способом, нечётно;

б) из этой записи можно получить любое нечётное число между числами -128 и 128, причём единственным способом.

Задача 2. В квадрате 7×7 клеток закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по 3 закрашенных клетки. [*4 балла*]

Решение.





На рисунках приведены примеры такой закраски.

На левом рисунке закрашивали клетки, как на шахматной доске, кроме четырёх клеток на диагонали.

На правом — клетки закрашивали «лесенкой», начиная с левого нижнего угла.

Замечание. Способ, приводящий к правому рисунку, помогает при решении многих подобных задач.

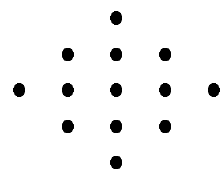
Задача 3. Шифр кодового замка является двузначным числом. Буратино забыл код, но помнит, что сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Напишите все возможные варианты кода, чтобы Буратино смог быстрее открыть замок. [*6 баллов*]

Решение. Пусть первая цифра кода x, а вторая y. Тогда само число записывается как $10x + y$, а условие задачи можно записать уравнением $(x+y)+x\cdot y = 10x+y$. Следовательно, $x \cdot y = 9x$.

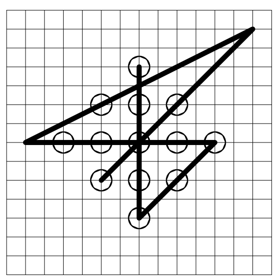
Так как код — двузначное число, то $x \neq 0$, а значит, $y = 9$. При этом x можно взять любым, кроме 0. Проверьте!

Ответ: **19**, **29**, **39**, **49**, **59**, **69**, **79**, **89**, **99**.

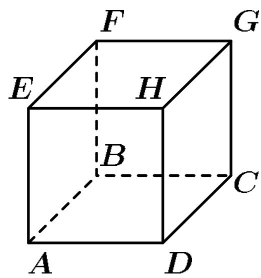
Задача 4. Зачеркните все 13 точек (как на рисунке) пятью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды. [*8 баллов*]



Решение. Пример приведен на рисунке:



Задача 5. В одной из вершин куба $ABCDEFGH$ сидит заяц, но охотникам он не виден. Три охотника стреляют залпом, при этом они могут «поразить» любые три вершины куба. Если они не попадают в зайца, то до следующего залпа заяц перебегает в одну из трех соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в зайца за четыре залпа. [*10 баллов*]



(В решении достаточно написать четыре тройки вершин, в которые стреляют охотники.)

Решение. Покрасим вершины A, C, F и H в чёрный цвет, а остальные вершины — в белый. Заметим, что любые две соседние вершины будут покрашены в разные цвета. Значит, после каждого залпа заяц перебегает в вершину другого цвета.

Сделаем первый залп по вершинам C, F и H.

Если заяц находился в чёрной вершине, то либо охотники сразу попали в него, либо заяц находился в вершине A. В последнем случае после залпа заяц перебежит в одну из трех соседних вершин, и залп (BDE) обязательно достигнет цели.

Если заяц находился в белой вершине, то после двух выстрелов он снова окажется в белой вершине. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, убеждаемся, что залпы (DEG), а потом (ACF) обязательно поразят зайца.

Ответ: охотники обязательно попадут в зайца, сделав следующие залпы: (CFH), (BDE), (DEG), (ACF). (Порядок залпов важен!)

7 класс

Задача 1. В квадрате 7×7 клеток закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по 3 закрашенных клетки. [*3 балла*]

Смотрите решение задачи № 2 в варианте 6 класса.

Задача 2. Карлсон написал дробь $\frac{10}{97}$. Малыш может:

1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно,

2) умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь,

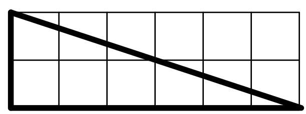
а) равную $\frac{1}{2}$? [*2 балла*] б) равную 1? [*4 балла*]

Решение.

а) Да, достаточно прибавить к числителю и знаменателю по 77. (К этому числу приводит уравнение $2(10+x) = 97+x$.)

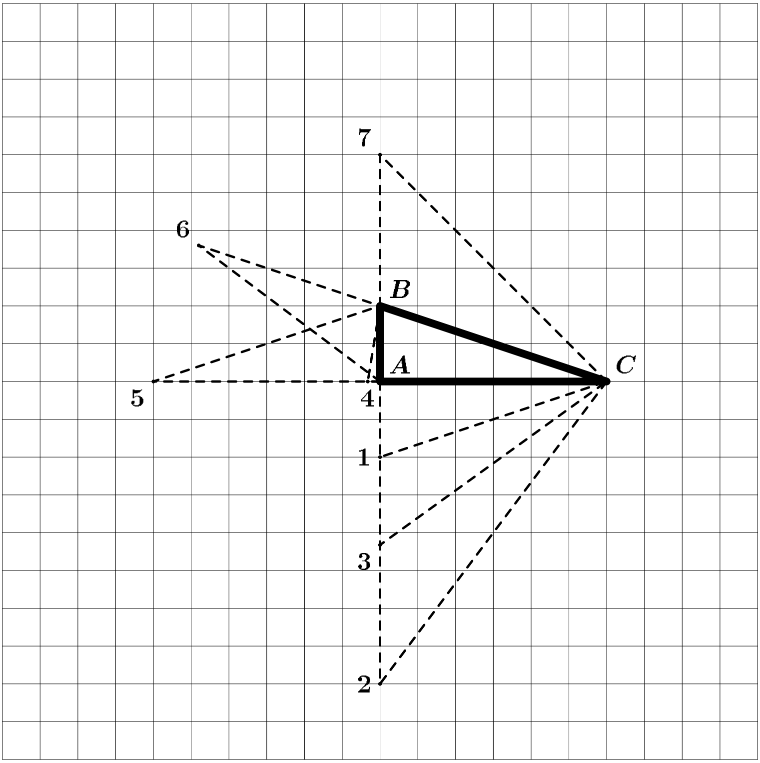
б) Нет. Действительно, дробь равна единице, если ее числитель и знаменатель равны. А Малыш никак не сможет из неравных чисел сделать равные.

Задача 3. Дан прямоугольный треугольник. Приложите к нему какой-нибудь треугольник (эти треугольники должны иметь общую сторону, но не должны перекрываться даже частично) так, чтобы получился треугольник с двумя равными сторонами.



Укажите (нарисуйте!) несколько различных решений.
Каждое новое решение — [*1 балл*].

Решение.



На рисунке цифрами отмечены вершины семи приложенных треугольников.

Найдите сами, какие стороны получаются равными.

Задача 4. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных чётных чисел? [***8 баллов***].

Ответ: Нет, не может.

Решение. Докажем методом от противного.

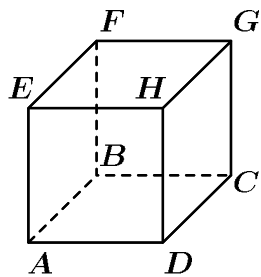
Предположим, что найдутся два натуральных числа k и n такие, что $n(n+1) = 2k(2k+2)$. Отметим числа $2k$ и $2k+2$ на числовой оси и рассмотрим два случая: $n \leqslant 2k$ и $n > 2k$.

Если $n \leqslant 2k$, то $n + 1 < 2k + 2$, поэтому

$$n(n + 1) < 2k(2k + 2).$$ Противоречие.

Если $n > 2k$, то $n+1 \geqslant 2k+2$, поэтому
$n(n+1) > 2k(2k+2)$. Противоречие.

Задача 5. В вершинах куба $ABCDEFGH$ расставлены натуральные числа так, что числа в соседних (по ребру) вершинах отличаются не более чем на единицу. Докажите, что обязательно найдутся две диаметрально противоположные вершины, числа в которых отличаются не более чем на единицу. [*10 баллов*]



(Пары диаметрально противоположных вершин куба: A и G, B и H, C и E, D и F.)

Решение. Обозначим числа, стоящие в вершинах куба, соответствующими маленькими латинскими буквами: a, b, c, d, e, f, g и h.

Рассмотрим наименьшее из этих чисел. Без ограничения общности мы можем считать, что это число a (оно находится в вершине A). Тогда числа в соседних с A вершинах (это вершины B, D и E) могут принимать только значения a или $a+1$ (так как $a-1 < a$). Значит, какие-нибудь два из чисел b, d и e равны.

Пусть равные числа стоят в вершинах B и E (остальные случаи рассматриваются аналогично). В этом случае ответом будут диаметрально противоположные вершины E и C: $e = b$, а числа c и b отличаются не более, чем на 1, поэтому числа e и c отличаются не более, чем на 1.

Авторы задач:
6 класс: А.Ю.Митягин (1–3), В.В.Клепцын (3), А.В.Спивак (5).
7 класс: А.Ю.Митягин (1), В.В.Клепцын (2), А.Шень (3), В.В.Произволов (4), Г.А.Гальперин (5)

Составление варианта: И.В.Ященко, А.К.Ковальджи, А.Д.Блинков, А.Шень, В.Д.Арнольд, В.В.Вакулюк, А.В.Спивак, А.Ю.Митягин.