

Департамент образования г. Москвы  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
Механико-математический факультет  
Московское математическое общество  
Московский институт открытого образования  
Дом научно-технического творчества молодёжи  
Московский центр непрерывного математического образования

**LXVI Московская  
математическая олимпиада**

# **Математический праздник**

В. Д. Арнольд, А. Д. Блинков, Т. И. Голенищева-Кутузова,  
В. М. Гуровиц, Е. Ю. Иванова, Т. В. Караваева, Т. А. Карпова,  
В. А. Клепцын, Г. А. Колоцкий, Е. В. Корицкая, Ю. Г. Кудряшов,  
Н. А. Кулакова, П. И. Митричев, А. В. Спивак, В. В. Трушков,  
Р. М. Федоров, А. В. Хачатурян, А. С. Чеботарев, И. В. Яценко.

Москва  
16 февраля 2003 года

## 6 класс

**Задача 1.** Один мальчик 16 февраля 2003 года сказал: «Разность между числами прожитых мною месяцев и прожитых (полных) лет сегодня впервые стала равна 111». Когда он родился?  
[4 балла] (С. Токарев.)

**Ответ.** 16 января 1993 года.

**Решение.** Пусть мальчик прожил  $x$  лет и еще  $y$  месяцев. Тогда он прожил всего  $12x + y$  месяцев и поэтому

$$12x + y - x = 111,$$

то есть

$$11x + y = 11 \cdot 10 + 1.$$

Поскольку  $y < 12$ , то  $y = 1$  и  $x = 10$ .

**Задача 2.** Найдите наименьшее четырехзначное число СЕЕМ, для которого существует решение ребуса

$$\text{МЫ} + \text{РОЖЬ} = \text{СЕЕМ}.$$

(Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.) [4 балла] (С. Токарев, А. Хачатурян.)

**Ответ.** 2003.

**Решение.** Поскольку  $\text{С} > \text{Р}$ , то  $\text{С} > 1$ . Так как мы ищем наименьшее число, попробуем взять  $\text{Р} = 1$ ,  $\text{С} = 2$  и  $\text{Е} = 0$ . Тогда  $\text{М} \geq 3$ . Случай  $\text{СЕЕМ} = 2003$  возможен:  $35 + 1968 = 2003$  или  $38 + 1965 = 2003$ .

Кроме указанных решений, ребус, как легко проверить при помощи компьютерной программы, имеет еще 38 решений:

$31 + 4972 = 5003$ ,  $32 + 4971 = 5003$ ,  $31 + 5972 = 6003$ ,  $32 + 5971 = 6003$ ,  
 $81 + 3927 = 4008$ ,  $87 + 3921 = 4008$ ,  $61 + 2945 = 3006$ ,  $65 + 2941 = 3006$ ,  
 $81 + 4927 = 5008$ ,  $14 + 2987 = 3001$ ,  $17 + 2984 = 3001$ ,  $87 + 4921 = 5008$ ,  
 $15 + 2986 = 3001$ ,  $16 + 2985 = 3001$ ,  $81 + 5927 = 6008$ ,  $87 + 5921 = 6008$ ,  
 $41 + 7963 = 8004$ ,  $71 + 4936 = 5007$ ,  $43 + 7961 = 8004$ ,  $76 + 4931 = 5007$ ,  
 $15 + 3986 = 4001$ ,  $16 + 3985 = 4001$ ,  $61 + 7945 = 8006$ ,  $65 + 7941 = 8006$ ,  
 $46 + 1958 = 2004$ ,  $48 + 1956 = 2004$ ,  $14 + 5987 = 6001$ ,  $17 + 5984 = 6001$ ,  
 $57 + 1948 = 2005$ ,  $58 + 1947 = 2005$ ,  $83 + 6925 = 7008$ ,  $85 + 6923 = 7008$ ,  
 $46 + 2958 = 3004$ ,  $48 + 2956 = 3004$ ,  $24 + 5978 = 6002$ ,  $57 + 2948 = 3005$ ,  
 $28 + 5974 = 6002$ ,  $58 + 2947 = 3005$ .

**Задача 3.** На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий? [4 балла] (С. Токарев.)

**Ответ.** Один.

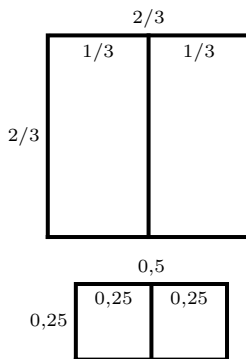
**Решение.** Если первый — рыцарь, то в силу его слов второй и третий — лжецы, что невозможно из-за высказывания второго островитянина. Значит, первый — лжец. Если второй — лжец, то в силу его слов третий тоже лжец, но тогда первый сказал правду, а он должен был соврать. Значит, второй — рыцарь. В силу его слов третий тоже рыцарь. Третий честно ответит: «Один».

**Задача 4.** Прямоугольник разрезан на несколько прямоугольников, периметр каждого из которых — целое число метров. Верно ли, что периметр исходного прямоугольника — тоже целое число метров? [5 баллов]

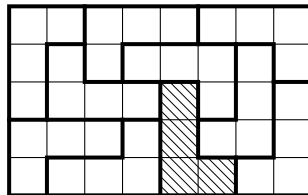
(А. Спивак.)

**Ответ.** Нет.

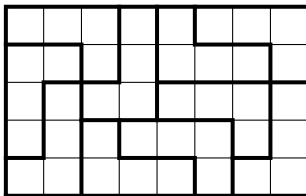
**Решение.** Например, квадрат со стороной  $2/3$  можно разрезать средней линией на два прямоугольника, периметры которых равны 2. Есть и другие примеры.



**Задача 5.** В распоряжении юного паркетчика имеются 10 одинаковых плиток, каждая из которых состоит из 4 квадратов и имеет форму буквы Г (все плитки ориентированы одинаково). Может ли он составить из них прямоугольник размером  $5 \times 8$ ? (Плитки можно поворачивать, но нельзя переворачивать. Например, на рисунке изображено неверное решение: заштрихованная плитка неправильно ориентирована.) [7 баллов] (А. Спивак.)



**Ответ.** Да, можно:



**Задача 6.** На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырех боковых гранях оказалась равна 12, во второй — 15. Какое число написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3?

[8 баллов] (А. Кустарёв.)

**Ответ.** 6.

**Решение.** Поскольку  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$  и  $21 - 12 = 9$ , а  $21 - 15 = 6$ , то в первый раз сумма чисел нижней и верхней граней кубика равнялась 9, а во второй — 6. Бросим кубик третий раз так, чтобы он упал на одну из тех двух граней, которые оба раза были боковыми. Поскольку  $21 - 9 - 6 = 6$ , то сумма чисел, которые при третьем броске оказались на верхней и нижней гранях, равна 6. Очевидно, цифра 3 не могла ни во второй, ни в третий раз оказаться на верхней или нижней грани: иначе напротив нее стояла бы цифра  $6 - 3 = 3$ , а тройка только одна. Значит, тройка была на верхней или нижней грани при первом броске. Поэтому напротив тройки стоит цифра  $9 - 3 = 6$ .

*Примечание.* Удовлетворяющий условию задачи кубик существует:  $1 + 5 = 2 + 4 = 6$  и  $3 + 6 = 9$ .

## 7 класс

**Задача 1.** Расставьте скобки и знаки арифметических действий так, чтобы получилось верное равенство:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6009} = 2003. \quad [4 \text{ балла}]$$

(Т. Голенищева-Кутузова, И. Ященко.)

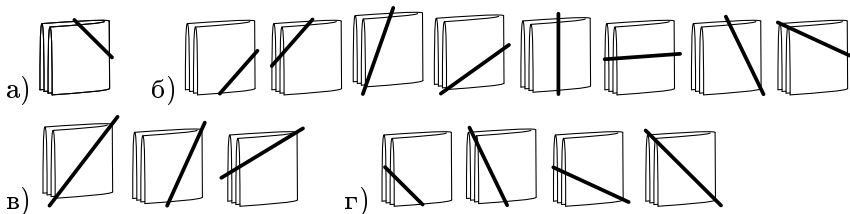
**Ответ.**  $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{6009} = 2003.$

**Задача 2.** Квадратную салфетку сложили пополам, полученный прямоугольник сложили пополам еще раз. Получившийся квадратик разрезали ножницами (по прямой). Могла ли салфетка распасться а) на 2 части? б) на 3 части? в) на 4 части? г) на 5 частей? Если да — нарисуйте такой разрез, если нет — напишите слово «нельзя».

[6 баллов] (А. Чеботарёв.)

**Ответ.** Во всех пунктах можно.

**Решение.** На рисунке изображены все возможные варианты разрезания салфетки.



**Задача 3.** Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.

[5 баллов] (О. Карпенков.)

**Ответ.** 2222232.

**Решение.** Так как двоек больше, чем троек, двоек может быть 4, 5, 6 или 7. В первом случае сумма цифр — 17, во втором — 16, в третьем — 15, а в последнем — 14. По признаку делимости на 3 число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Значит, годится только третий вариант.

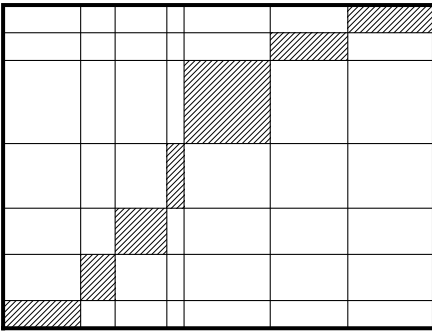
Итак, в коде 6 двоек и 1 тройка. По признаку делимости на 4 число, образованное последними двумя цифрами, должно делиться на 4. Значит, это 32.

**Задача 4.** Прямоугольник разрезали шестью вертикальными и шестью горизонтальными разрезами на 49 прямоугольников (см. рисунок). Оказалось, что периметр каждого из получившихся прямоугольников — целое число метров. Обязательно ли периметр исходного прямоугольника — целое число метров?

[8 баллов]

(В. Произволов.)

**Ответ.** Да, обязательно.



**Решение.** Рассмотрим прямоугольники, заштрихованные на рисунке («диагональные»). Горизонтальная сторона исходного прямоугольника складывается из их горизонтальных сторон. То же — для вертикальной стороны.

Поэтому периметр исходного прямоугольника равен сумме периметров заштрихованных прямоугольников. Периметр каждого из этих прямоугольников — целое число метров. Их сумма — тоже целое число метров.

**Задача 5.** В честь праздника 1% солдат в полку получили новое обмундирование. Солдаты расставлены в виде прямоугольника так, что солдаты в новом обмундировании оказались не менее чем в 30% колонн и не менее чем в 40% шеренг. Какое наименьшее число солдат могло быть в полку? [8 баллов] (Р. Фёдоров.)

**Ответ.** 1200.

**Решение.** Предположим, что солдаты поставлены в  $m$  колонн и  $n$  шеренг. Тогда в полку  $mn$  солдат и  $\frac{mn}{100}$  солдат получили новое обмундирование. Согласно условию, не менее чем в  $\frac{40n}{100}$  шеренг есть хотя бы по одному солдату в новом обмундировании, значит,

$$\frac{mn}{100} \geq \frac{40n}{100}.$$

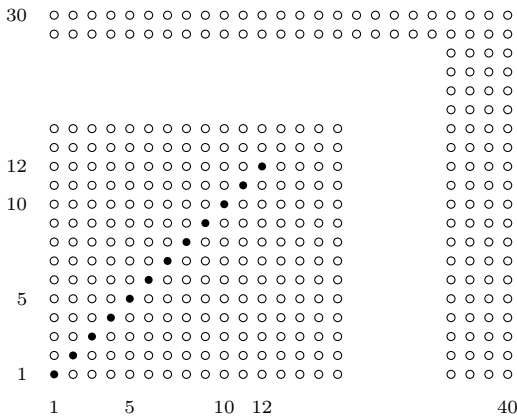
Отсюда ясно, что  $m \geq 40$ . Аналогично, так как не менее чем в  $\frac{30m}{100}$  колонн есть солдаты в новом обмундировании,

$$\frac{mn}{100} \geq \frac{30m}{100}.$$

Поэтому  $n \geq 30$ . Значит, в полку не менее, чем  $40 \cdot 30 = 1200$  солдат.

Покажем, что 1200 солдат можно построить таким образом. Построим их в виде прямоугольника  $30 \times 40$ . Поставим по диагонали 12 солдат в новом обмундировании (см. рисунок). Ясно, что

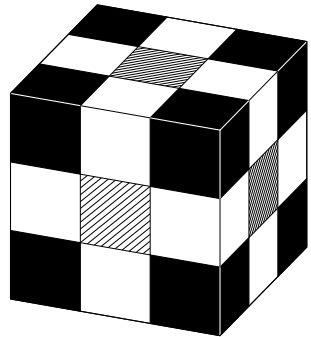
солдаты в новом обмундировании стоят ровно в 30% колонн и в 40% шеренг (30% от 40 — это 12, 40% от 30 — тоже 12).



**Задача 6.** Куб размером  $3 \times 3 \times 3$  состоит из 27 единичных кубиков. Можно ли побывать в каждом кубике по одному разу, двигаясь следующим образом: из кубика можно пройти в любой кубик, имеющий с ним общую грань, причем запрещено ходить два раза подряд в одном направлении? [9 баллов] (С. Токарев.)

**Ответ.** Нельзя.

**Решение.** Предположим, что можно. В кубе 8 угловых кубиков (на рисунке они покрашены в черный цвет) и 6 «центральных» кубиков (они расположены в центрах граней и заштрихованы на рисунке). Нетрудно видеть, что любой ход из углового кубика ведет в кубик в середине ребра, а следующий ход — в центральный кубик. Таким образом, чтобы попасть из одного углового кубика в другой, придется пройти хотя бы через один центральный. Иными словами, между каждыми двумя соседними (в порядке обхода) угловыми кубиками должен встретиться хотя бы один центральный. Значит, центральных кубиков не меньше семи, а их всего лишь шесть!



## ИНФОРМАЦИЯ

о наборе в некоторые московские школы и классы  
с углублённым изучением предметов на 2003/2004 уч. год.

Школа	Телефон	Адрес	Набираемые классы	Сроки
2	137 17 69 137 69 31	ул. Фотиевой, 18 (м. «Октябрьская»)	7 физико-математ., 8 инф.-математ., добор в 9 и 10 физико-математ.	апрель –май
18 СУНЦ МГУ	445 11 08	ул. Кременчугская, 11 (м. «Кутузовская»)	10 физико-математ., 10 хим., 10 био-физ., 10 комп.-информ., 11 физико-математ.	апрель –май
54	245 99 72 245 54 25	ул. Доватора, 5/9 (м. «Спортивная»)	9 математ.	с марта
57	291 85 72 291 54 58	Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (м. «Боровицкая»)	8 математ., 9 математ., 9 гуманитар.	апрель
91	290 35 58	ул. Поварская, 14 (м. «Арбатская»)	9 математ.	апрель
109	434 51 06 434 51 07	ул. Бакулева, 20 (м. «Юго-Западная»)	9 физико-математ.	март
179	292 01 05	ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 (м. «Охотный ряд»)	9 физико-математ.	март– апрель
218	976 03 20 976 40 87	Дмитровское ш., 5а (м. «Дмитровская»)	8 инд. уч. планы с углубл. изучением математ., физики, биол. (по выбору); добор: 9 математ., 9 гуманитар., 10 инд. уч. планы.	апрель
1101	339 77 39	ул. Академика Варги, 34	7–10 математ.	апрель
1134	932 00 00 932 08 01	ул. Раменки, 15, корп. 1 (м. «Просп. Вернадского»)	9 физико-математ.	с марта
1543	433 16 44 434 26 44	ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (м. «Юго-Западная»)	8 математ., 8 гуманитар., 8 биол.	апрель

Более подробно о наборе в эти и другие школы можно узнать  
на сайте <http://www.mcsme.ru>