

Департамент образования г. Москвы
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Дом научно-технического творчества молодёжи
Московский центр непрерывного математического образования

**LXVII Московская
математическая олимпиада**

Математический праздник

В. Арнольд, Т. Голенищева-Кутузова, Е. Корицкая,
Ю. Кудряшов, А. Кулыгин, Г. Мерзон, С. Маркелов,
А. Спивак, Р. Федоров, А. Хачатурян, И. Яценко

Москва
15 февраля 2004 года

6 класс

Задача 1. Кузнечик прыгает вдоль прямой вперед на 80 см или назад на 50 см. Может ли он менее чем за 7 прыжков удалиться от начальной точки ровно на 1 м 70 см? [3 балла]

Ответ. Может.

Указание. $5 \cdot 5 - 8 = 17$.

Задача 2. Килограмм говядины с костями стоит 78 рублей, килограмм говядины без костей — 90 рублей, а килограмм костей — 15 рублей. Сколько граммов костей в килограмме говядины? [5 баллов] (А. Хачатурян.)

Ответ. 160 граммов.

Решение. Пусть в килограмме говядины x кг костей, тогда «чистой» говядины в нём $(1 - x)$ кг. Таким образом,

$$15x + 90(1 - x) = 78,$$

откуда $x = 0,16$.

Задача 3. а) Придумайте три правильные несократимые дроби, сумма которых — целое число, а если каждую из этих дробей «перевернуть» (т. е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей тоже будет целым числом. [1 балл]

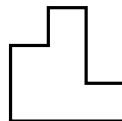
б) То же, но числители дробей — не равные друг другу натуральные числа. [3 балла] (Т. Голенищева-Кутузова.)

Ответ. Да, может. Например, $2/11$, $3/11$, $6/11$.

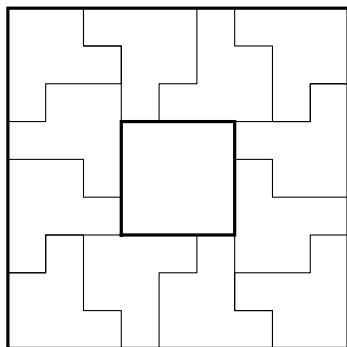
Задача 4. Сложите из фигур, изображенных на рисунке, а) квадрат размером 9×9 с вырезанным в его центре квадратом 3×3 ; [3 балла]

б) прямоугольник размером 9×12 . [5 баллов]

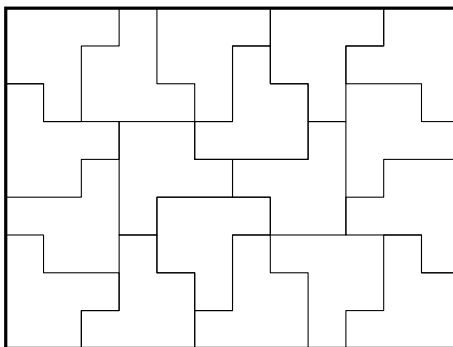
(Фигуры можно не только поворачивать, но и переворачивать.) (А. Хачатурян.)



Ответ.



а)



б)

Задача 5. Вадик написал название своего родного города и все его циклические сдвиги, получив таблицу 1.

Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, он составил таблицу 2 и выписал её последний столбец: ВКСАМО.

Саша сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» МТТЛАРАЕКИС. Что это за город, если его название начинается с буквы С?

Таблица 1	Таблица 2
МОСКВА	АМОСКВ
АМОСКВ	ВАМОСК
ВАМОСК	КВАМОС
КВАМОС	МОСКВА
СКВАМО	ОСКВАМ
ОСКВАМ	СКВАМО

[6 баллов] (А. Шень.)

Ответ. СТЕРЛИТАМАК.

Решение аналогично решению четвёртой задачи 7 класса.

7 класс

Задача 1. Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух? [4 балла]

(И. Яценко.)

Ответ. Только на 7.

Решение. Очевидно, что последняя цифра больше 1. Трёхзначное простое число не может оканчиваться ни на чётную цифру

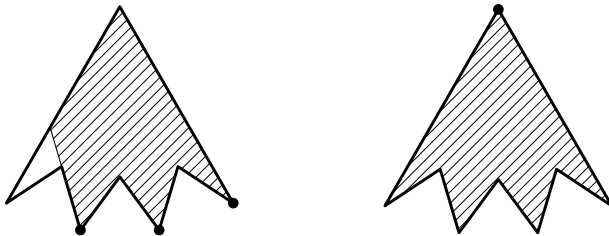
(т. е. на 0, 2, 4, 6 или 8), ни на цифру 5. Если последняя цифра 3 или 9, то сумма всех цифр числа, равная удвоенной последней цифре, делится на 3, а тогда само число делится на 3. Таким образом, осталась только цифра семь.

Замечания. Есть четыре числа, удовлетворяющих условию задачи: 167, 257, 347, 527; приводить примеры таких чисел в решении не требовалось.

Задача 2. Кролик, готовясь к приходу гостей, повесил в трёх углах своей многоугольной норы по лампочке. Пришедшие к нему Винни-Пух и Пятачок увидели, что не все горшочки с мёдом освещены. Когда они полезли за мёдом, две лампочки разбились. Кролик перевесил оставшуюся лампочку в некоторый угол так, что вся нора оказалась освещена. Могло ли такое быть? (Если да, нарисуйте пример, если нет, обоснуйте ответ.) [4 балла]

(Т. Голенищева-Кутузова, Ю. Кудряшов.)

Ответ. Да, могло (см. рисунок).



Замечание. Такое возможно, даже если заменить три на любое другое, сколь угодно большое число.

Задача 3. На доске написаны три правильные несократимые дроби, дающие в сумме единицу, причем их числители — различные натуральные числа. Оказалось, что если каждую из этих дробей «перевернуть» (т. е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей будет натуральным числом. Приведите пример таких дробей. [4 балла] (Т. Голенищева-Кутузова.)

Ответ. Например, $2/11$, $3/11$, $6/11$.

Задача 4. Таня написала название своего родного города и все его циклические сдвиги, получив таблицу 1.

Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, она составила таблицу 2 и выписала её последний столбец: ВКСАМО.

Валера сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» ОССНГСОРСК. Что это за город, если его название заканчивается на букву К?

[7 баллов] (А. Шень.)

Ответ. СОСНОГОРСК.

Решение. Мы будем постепенно восстанавливать валерину таблицу 2. Заметим сначала, что каждая буква встречается в каждом столбце столько же раз, сколько раз она встречается в слове. Так как слова в таблице упорядочены по алфавиту, то в первом столбце буквы слова стоят в алфавитном порядке.

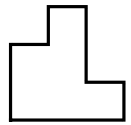
В циклических сдвигах слова после его последней буквы идёт первая. Из пятой строки таблицы видно, что после буквы Г идёт О, из последней — что после К идет С, из четвертой — что после Н идёт О, из первой, седьмой и девятой — что после О один раз идёт Г, один раз Р и один раз С и т. д. Так как слова упорядочены по алфавиту,

то в строчках с одинаковой первой буквой возможные вторые буквы упорядочены по алфавиту.

Из следующей таблицы видно, что после пары букв ОГ идёт буква О, после СК идёт С, после СН идёт О и т. д. Можно, пользуясь этой информацией, заполнить третий столбец, потом четвертый и т. д., пока не заполнится вся таблица. Но для решения задачи достаточно восстановить последнюю строку (т. к. название города оканчивается на К), что несложно сделать, зная, какая буква идёт за какой парой букв.

ГО*****О
КС*****С
НО*****С
ОГ*****Н
ОР*****Г
ОС*****С
РС*****О
СК*****Р
СН*****О
СО*****К

Задача 5. Сложите из фигур, изображенных на рисунке, квадрат размером 9×9 с вырезанным в его центре квадратом 3×3 (фигуры можно не только поворачивать, но и переворачивать). [6 баллов] (А. Хачатурян.)

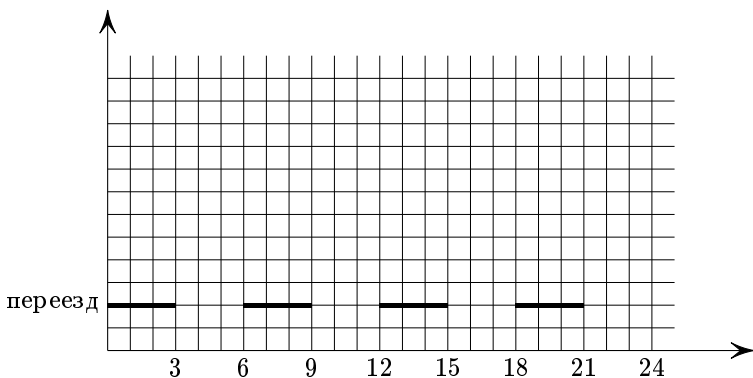


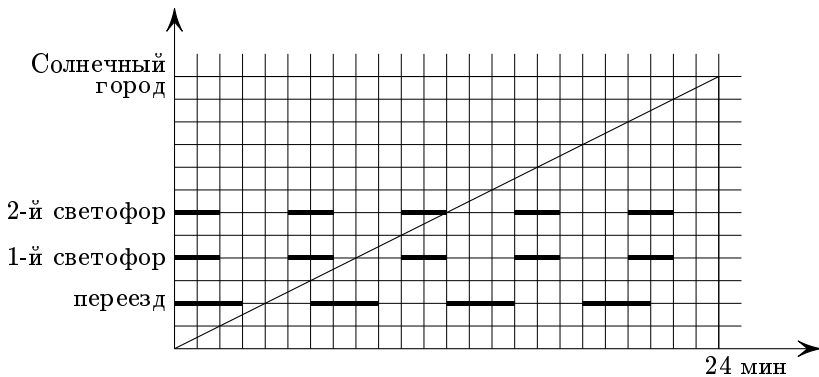
Ответ. См. задачу 4 а) шестого класса.

Задача 6. Из Цветочного города в Солнечный ведет шоссе длиной 12 км. На втором километре этого шоссе расположен железнодорожный переезд, который три минуты закрыт и три минуты открыт и т. д., а на четвертом и на шестом километрах расположены светофоры, которые две минуты горят красным светом и три минуты — зеленым и т. д. Незнайка выезжает из Цветочного города в Солнечный в тот момент, когда переезд только что закрылся, а оба светофора только что переключились на красный. За какое наименьшее время (в минутах) он сможет доехать до Солнечного города, не нарушая правил, если его электромобиль едет по шоссе с постоянной скоростью (Незнайка не умеет ни тормозить, ни увеличивать скорость)? [8 баллов] (И. Яценко.)

Ответ. 24 мин.

Решение. Будем откладывать по оси абсцисс время (в минутах), а по оси ординат — расстояние от Цветочного города (в километрах). Так как скорость электромобиля постоянна, то график его движения — прямая. При этом Незнайка не может проезжать переезд, расположенный на втором километре шоссе, пока





не истекут три минуты, а также на седьмой, восьмой и девятой минутах, на тринадцатой—пятнадцатой минутах и т. д. Графически это означает, что прямая не может пересекать выделенные отрезки. Аналогично можно отметить отрезки, которые запрещено пересекать из-за светофоров. Осталось из начала координат провести прямую, которая не пересекает ни один из выделенных отрезков и пересекает горизонтальную прямую $y = 12$ как можно раньше.