ББК 22.3я721+74.262.22
З15

З15

Задачи Московской региональной олимпиады школьников по физике 2007 года: Под ред. М. В. Семёнова, А. А. Якуты — М.: МЦНМО, 2008. — 48 с.: ил.

ISBN 978–5–94057–356–2

Приводятся условия и решения задач городского этапа Московской региональной олимпиады школьников по физике (теоретические туры, 7–11 классы) 2007 года, окружного этапа олимпиады в 11 классе, а также краткие описания практических работ экспериментального тура (9–11 классы).

Для участников олимпиады, школьников, учителей, родителей, руководителей школьных кружков, организаторов олимпиад.

ББК 22.3я721+74.262.22

Тексты заданий, решений, комментариев и иллюстрации составили и подготовили: Вагин Д. В., Варламов С. Д., Горбатый И. Н., Зильберман А. Р., Кротов С. С., Обморошев Б. Л., Простомолотова Е. В., Ромашка М. Ю., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Харабадзе Д. Э., Шведов О. Ю., Якута А. А.

Электронная версия `http://www.mccme.ru/olympiads/mfo/` (www-сервер МЦНМО).

---

Задачи Московской региональной олимпиады
школьников по физике 2007 года.

Технический редактор
*Кулыгин Алексей Кириллович*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подп. к печати 23.01.2008.
Формат 60×90 $^1/_{16}$. Печать офсетная. Объём 3 печ. л.
Заказ . Тираж 2000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский переулок, дом 11.
Телефоны: (495)241–05–00, (495)241–12–37, (495)241–72–85.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы»

978–5–94057–356–2

# Задачи Московской региональной олимпиады школьников по физике 2007 года

Москва
Издательство МЦНМО
2008

# Предисловие

В 2007 году олимпиада школьников по физике состоялась в городе Москве в шестьдесят восьмой раз. Олимпиада проводилась в соответствии с Положением о московской региональной олимпиаде школьников[1].

В соответствии с Положением, олимпиада проводится ежегодно Департаментом образования города Москвы, Советом ректоров вузов Москвы и Московской области, окружными управлениями образования, образовательными учреждениями, при участии образовательных учреждений, научных организаций и обществ. Координацию организационно-финансового обеспечения проведения Олимпиады осуществляет по поручению Департамента Московский институт открытого образования (МИОО).

В олимпиаде могут принимать участие все желающие школьники.

Олимпиада проводилась в три этапа.

Школьный этап проводится общеобразовательными учреждениями по заданиям, рекомендованным методической комиссией по предмету.

Окружной этап проводится окружным оргкомитетом, по заданиям, рекомендованным методической комиссией по предмету. По согласованию с Городским оргкомитетом допускается проведение окружного этапа Олимпиады вузом или группой вузов при условии соблюдения Положения, согласования с Городским оргкомитетом сроков и с методической комиссией по предмету — заданий Олимпиады.

Городской этап проводится Городским оргкомитетом, по заданиям, рекомендованным методической комиссией по предмету.

Положениями о Московской региональной олимпиаде школьников и о Всероссийской олимпиаде школьников для победителей (диплом первой степени) и призёров (дипломы второй и третьей степени) окружного и городского этапов олимпиады предусмотрены льготы при поступлении в вузы.

В 2006/2007 учебном году окружной этап Московской региональной олимпиады школьников по физике состоялся 3 февраля 2007 года. Для 11-классников этот этап проводился на Физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова и в вузах города Москвы. В данной брошюре приводятся задачи (с решениями) варианта 11 класса, разработанного городской Методической комиссией. Большая часть вузов, принимав-

[1] Приказ Департамента образования г. Москвы от 26.12.2003 № 1083 «О введении Положения о московской региональной олимпиаде школьников», опубл. **http://www.educom.ru/ru/dialog/olympiads/order.php**

ших участие в проведении окружного этапа олимпиады, в соответствии с Положением, проводила окружной этап по своим вариантам, согласованным с городской Методической комиссией.

Городской этап олимпиады для учеников 7-х классов проводился в один тур и 8–11-х классов — в два тура. Первый прошёл 18 февраля 2007 года на физическом факультете МГУ, в нём приняли участие 2018 человека (7 кл. — 305, 8 кл. — 304, 9 кл. — 357, 10 кл. — 466, 11 кл. — 586).

На второй теоретический тур (состоялся 25 февраля 2007 г.) были приглашены ученики 8–11 классов, показавшие лучшие результаты в первом туре (и/или имеющие персональные приглашения), в количестве: 8 кл. — 124 чел., 9 кл. — 170 чел., 10 кл. — 187 чел., 11 кл. — 229 чел.

По результатам первого тура в 7 классе и второго тура в 8–11 классах победителями и призёрами олимпиады были признаны 28 учащихся 7 класса, 53 учащихся 8 класса, 71 учащихся 9 класса, 61 учащихся 10 класса, 67 учащихся 11 класса (всего 280 человек). С полным списком победителей и призёров можно ознакомиться в сети Internet по адресу **http://genphys.phys.msu.ru/ol/2007**

В данной брошюре опубликованы все задачи первого и второго теоретических туров с подробными решениями.

По итогам второго тура в 9–11 классах 53 школьника были приглашены на экспериментальный тур (прошёл 10 марта 2007 года в МИОО). Экспериментальный тур в настоящее время не влияет на распределение дипломов победителей и призёров олимпиады; он проводится с целью отбора кандидатов в сборную команду г. Москвы для участия в заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников по физике.

В настоящей брошюре опубликованы краткие описания заданий, предлагавшихся на экспериментальном туре.

Электронная версия настоящей брошюры, а также материалы Московской физической олимпиады ряда лет опубликованы на сервере Московского центра непрерывного математического образования (**http://www.mccme.ru/olympiads/mfo**). Оперативная информация об олимпиаде и списки победителей публикуются на странице кафедры общей физики Физического факультета МГУ (**http://genphys.phys.msu.ru/ol**).

# Окружной этап

Состоялся 3 февраля 2007 года.

## 11 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

**1.** Материальная точка движется вдоль координатной оси $Ox$ так, что её скорость $v$ пропорциональна $x^2$. Известно, что участок пути от точки с координатой $x_1 = 10$ м до точки с координатой $x_2 = 20$ м материальная точка прошла со средней скоростью $v_{12} = 1$ м/с. С какими средними скоростями $v_{23}$ и $v_{13}$ были пройдены участки пути от точки $x_2$ до точки с координатой $x_3 = 40$ м и от точки $x_1$ до точки $x_3$?

**Решение.** В соответствии с условием задачи, скорость материальной точки пропорциональна квадрату её координаты, то есть $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = Ax^2$, где $A$ — константа. Следовательно, участок пути от точки с координатой $x$ до точки с координатой $x + \Delta x$ ($\Delta x$ — малое изменение координаты) будет пройден за время

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta x}{x^2} \cong \frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\Delta x}\right).$$

Складывая промежутки времени, за которые материальная точка проходит различные малые участки пути, найдём, что время прохождения участка от точки $x_1$ до точки $x_2$ равно

$$t_{12} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = \frac{x_2 - x_1}{Ax_1x_2}.$$

Следовательно, средняя скорость на данном участке равна $v_{12} = (x_2 - x_1)/t_{12} = Ax_1x_2$. Рассуждая аналогичным образом, можно найти, что $v_{13} = Ax_1x_3$ и $v_{23} = Ax_2x_3$. Отсюда получаем пропорции: $v_{13}/v_{12} = x_3/x_2$ и $v_{23}/v_{12} = x_3/x_1$. Таким образом, $v_{13} = x_3v_{12}/x_2 = 2$ м/с и $v_{23} = x_3v_{12}/x_1 = 4$ м/с.

**2.** На гладкой горизонтальной поверхности находится маленький кубик массой $M = 2$ кг. К его противоположным боковым граням прикреплены две одинаковые невесомые горизонтальные пружины жёсткостью $k = 100$ Н/м. Одна из пружин прикреплена другим концом к неподвижной стене. Свободный конец второй пружины приводится в движение внешней силой, направленной вдоль оси обеих пружин, и совершает гармонические колебания с амплитудой $A_0 = 0{,}02$ м и круговой частотой $\omega_0 = 20$ с$^{-1}$. При этом груз также совершает гармонические колебания. Найдите их амплитуду $A$ и круговую частоту $\omega$.

**Решение.** Направим координатную ось $Ox$ от стены вдоль оси обеих пружин и поместим начало координат в точке прикрепления пружины к стене. Будем отсчитывать время от момента, в который длина прикреплённой к стене пружины максимальна. Тогда, в соответствии с условием задачи, координата кубика зависит от времени как $x(t) = L_0 + A\cos\omega t$, где $L_0$ — длина недеформированной пружины. Поэтому ускорение кубика изменяется со временем по закону $a(t) = -A\omega^2\cos\omega t$, а удлинение $\Delta x_1$ пружины с закреплённым концом равно $\Delta x_1 = x(t) - L_0 = A\cos\omega t$.

Запишем для кубика второй закон Ньютона: $Ma = k\Delta x_2 - k\Delta x_1$, где $\Delta x_2$ — удлинение второй пружины, свободный конец которой приводится в движение внешней силой. Отсюда

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + \frac{Ma}{k} = A\left(1 - \frac{M\omega^2}{k}\right)\cos\omega t.$$

Заметим, что координата $X$ свободного конца второй пружины равна

$$X = L_0 + \Delta x_1 + L_0 + \Delta x_2 = 2L_0 + A\left(2 - \frac{M\omega^2}{k}\right)\cos\omega t.$$

Амплитуда и частота гармонических колебаний свободного конца второй пружины под действием внешней силы по условию равны, соответственно, $A_0$ и $\omega_0$. Следовательно,

$$A_0 = A\left|2 - \frac{M\omega^2}{k}\right|$$

(знак модуля необходим, так как амплитуда колебаний по определению положительна) и $\omega_0 = \omega$. Таким образом, окончательно получаем: $\omega = \omega_0 = 20$ с$^{-1}$ и

$$A = \frac{A_0}{\left|2 - \dfrac{M\omega_0^2}{k}\right|} \approx 0{,}003 \text{ м}.$$

**3.** Воздушные шарики с массой оболочки $m = 0{,}5$ г надувают смесью гелия и воздуха, которая закачана в баллон объёмом $V_0 = 60$ л под давлением $p_1 = 4\cdot 10^5$ Па. Отношение числа атомов гелия к общему числу атомов и молекул в баллоне составляет $\eta = 0{,}4$. Какое минимальное количество $\nu_{\text{г}}$ моль гелия должно оказаться внутри шарика, чтобы он поднялся в воздух? Какое максимальное количество таких шариков $N$ можно надуть из баллона? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, температура $T = 300$ К, молярные массы воздуха и гелия $\mu_{\text{в}} = 29$ г/моль и $\mu_{\text{г}} = 4$ г/моль. Считайте, что давление в надутом шарике примерно равно атмосферному, а температура в процессе надувания не изменяется.

**Решение.** 1. Пусть $\rho$ — плотность смеси воздуха и гелия, $\rho_0$ — плотность воздуха. Шарик объёмом $V$ начинает подниматься, если действующая на него со стороны воздуха сила Архимеда $\rho_0 gV$ начинает превышать сумму силы тяжести $mg$ и веса смеси газов $\rho gV$; отсюда $m = (\rho_0 - \rho)V$. Поскольку плотность идеального газа при заданных давлении и температуре пропорциональна его молярной массе, имеем: $\rho = \rho_0(\mu/\mu_{\text{в}})$, где $\mu$ — молярная масса смеси. Следовательно,

$$m = \rho_0 V\left(1 - \frac{\mu}{\mu_{\text{в}}}\right), \quad \text{и} \quad V = \frac{m}{\rho_0\left(1 - \dfrac{\mu}{\mu_{\text{в}}}\right)}.$$

В шарике объёмом $V$ находится количество моль смеси, равное

$$\nu = \frac{p_0 V}{RT} = \frac{p_0}{\rho_0 RT}\cdot\frac{m}{\left(1 - \dfrac{\mu}{\mu_{\text{в}}}\right)} = \frac{1}{\mu_{\text{в}}}\cdot\frac{m}{\left(1 - \dfrac{\mu}{\mu_{\text{в}}}\right)} = \frac{m}{\mu_{\text{в}} - \mu}.$$

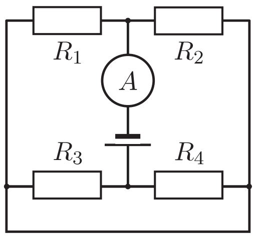
Учтём, что $\mu = \mu_{\text{г}}\cdot\eta + \mu_{\text{в}}\cdot(1-\eta)$; тогда

$$\nu = \frac{m}{\eta(\mu_{\text{в}} - \mu_{\text{г}})} = 0{,}05 \text{ моль}, \quad \text{и} \quad \nu_{\text{г}} = \eta\nu = \frac{m}{\mu_{\text{в}} - \mu_{\text{г}}} = 0{,}02 \text{ моль}.$$

2. Количество смеси в баллоне $\nu_0 = p_1 V_0/(RT) \approx 9{,}63$ моль. Если бы вся смесь из баллона была израсходована, число шариков определялось бы отношением $\nu_0/\nu \approx 192{,}6$, то есть было бы равно 192. Однако шарики будут надуваться, только если давление в баллоне превосходит атмосферное. Когда процесс надувания прекратится, в баллоне останется $p_0/p_1 = 1/4$ от первоначального количества смеси; следовательно, будет использовано только $1 - (p_0/p_1) = 3/4$ этого количества. Поэтому максимально возможное количество шариков, которые можно надуть из баллона, равно

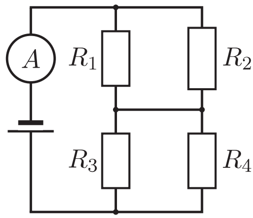
$$N = \left(1 - \frac{p_0}{p_1}\right)\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{(p_1 - p_0)V_0}{RT}\cdot\frac{\eta(\mu_{\text{в}} - \mu_{\text{г}})}{m} \approx 144.$$

**4.** Электрическая цепь состоит из идеальной батарейки с напряжением $U = 4{,}5$ В, идеального амперметра и четырёх резисторов с сопротивлениями $R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 60$ Ом, $R_3 = 80$ Ом, $R_4 = 20$ Ом. Что показывает амперметр? Что покажет идеальный вольтметр, если подключить его вместо амперметра?




**Решение.** Построим эквивалентную схему для электрической цепи так, как показано на рисунке. В соответствии с законами последовательного и параллельного соединения резисторов, сопротивление этой цепи равно

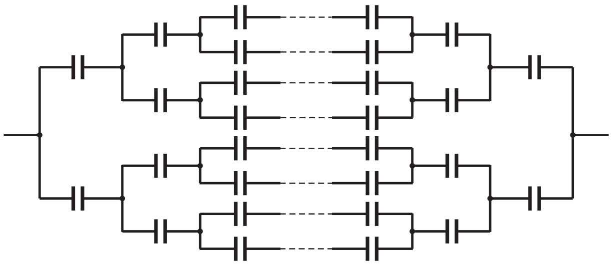
$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 24\text{ Ом} + 16\text{ Ом} = 40\text{ Ом}.$$




Поэтому через амперметр течёт ток $I = U/R = 0{,}1125$ А.

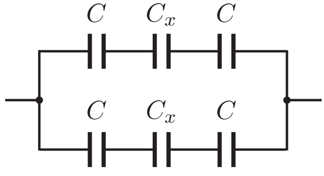
Если же поставить на место амперметра вольтметр, то он покажет напряжение батарейки $U = 4{,}5$ В.

**5.** Найдите электрическую ёмкость бесконечной цепочки конденсаторов, схема которой изображена на рисунке.



Ёмкости всех конденсаторов, из которых составлена цепочка, одинаковы и равны $C$.

**Решение.** Пусть $C_x$ — искомая ёмкость бесконечной цепочки конденсаторов. Заметим, что данную цепь можно представить в виде эквивалентной цепи, которая показана на рисунке.

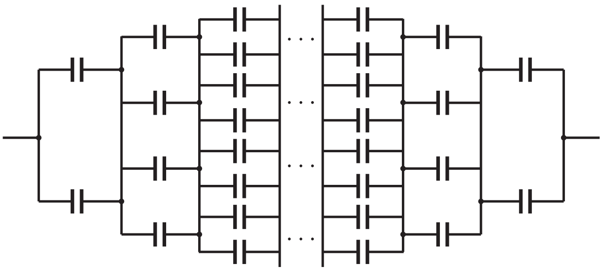



Согласно законам последовательного и параллельного соединения конденсаторов, каждая из половин цепи имеет ёмкость $\dfrac{C_x \cdot C/2}{C_x + (C/2)}$, а ёмкость всей цепи в 2 раза больше. Следовательно,

$$C_x = 2\frac{C_x \cdot C/2}{C_x + (C/2)}.$$

Отсюда $C_x = C/2$.

Задачу можно решить и вторым способом. Представим бесконечную цепочку конденсаторов в виде другой эквивалентной цепи, соединив проводниками точки, имеющие одинаковые потенциалы (см. рис.).



Ёмкость получившейся эквивалентной цепи также может быть найдена при помощи законов последовательного и параллельного соединения конденсаторов:

$$\frac{1}{C_x} = 2\left(\frac{1}{2C} + \frac{1}{4C} + \frac{1}{8C} + \ldots\right) = \frac{2}{C}.$$

Отсюда снова получаем $C_x = C/2$.

# Городской этап. Первый теоретический тур

Состоялся 18 февраля 2007 года.

## 7 класс

На выполнение задания отводилось 3 астрономических часа.

**1.** Марс удобнее всего изучать во время противостояния, когда Земля находится между Марсом и Солнцем. Определите, через какой промежуток времени повторяются противостояния Земли и Марса. Марс совершает оборот вокруг Солнца за 687 земных дней, а Земля — за 365 дней.

**Решение.** За промежуток времени $T$ от одного противостояния до другого Марс совершает $k$ оборотов, а Земля $(k+1)$ оборот ($k$ не обязательно целое!). Этот промежуток времени выражается через периоды обращения Земли и Марса вокруг Солнца $T_\text{З}$ и $T_\text{М}$ следующим образом: $T = (k+1)T_\text{З} = kT_\text{М}$. Отсюда находим

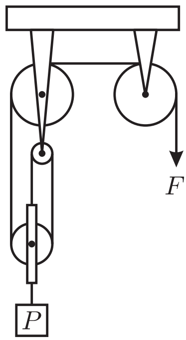
$$k = \frac{T_\text{З}}{T_\text{М} - T_\text{З}} \quad \text{и} \quad T = \frac{T_\text{З}T_\text{М}}{T_\text{М} - T_\text{З}}.$$

Подставляя численные значения $T_\text{З}$ и $T_\text{М}$, получаем $T \approx 779$ дней.

**2.** На земле лежит слой снега толщиной $h = 70$ см. Давление снега на землю (без учёта атмосферного давления) равно $p = 630$ Па. Погода морозная, и снег состоит из воздуха и льда. Определите, сколько процентов объёма снега занимает лёд, а сколько процентов — воздух. Плотность льда равна $\rho_\text{л} = 0{,}9$ г/см$^3$. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с$^2$.

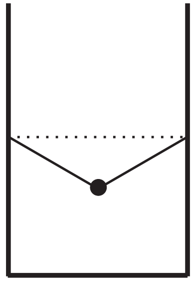
**Решение.** Пусть $\eta$ — часть объёма снега, занимаемая льдом, $S$ — площадь, на которую давит снег. Тогда снег массой $m = \rho_\text{л} S h \eta$ оказывает давление $p = mg/S = \rho_\text{л} g h \eta$. Отсюда $\eta = p/(\rho_\text{л} g h) = 0{,}1$. Таким образом, лёд занимает 10% объёма снега.

**3.** На заводе для подъёма тяжёлых заготовок используется система из четырёх блоков и одного троса, закреплённых на потолке, как показано на рисунке. С какой силой $F$ надо тянуть вниз за конец троса, чтобы удерживать или медленно и равномерно поднимать заготовку, вес которой равен $P$? Участки троса, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны, весом блоков, троса и трением можно пренебречь.



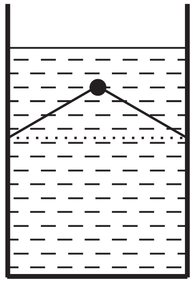

**Решение.** Ввиду невесомости блоков и троса и отсутствия трения сила натяжения троса равна $F$ в любой его части. К нижнему блоку приложены три силы $F$, направленные вверх, и одна сила $P$, направленная вниз. Поскольку этот блок находится в равновесии или медленно и равномерно поднимается, то $P = 3F$, а $F = P/3$.

Можно также решать эту задачу, пользуясь «золотым правилом механики». Нетрудно заметить, что при перемещении нижнего блока вверх на высоту $h$ три вертикальных отрезка троса над нижним блоком укоротятся на ту же величину, так что надо будет переместить конец троса вниз на расстояние $3h$, то есть, проигрывая в расстоянии в 3 раза, мы получаем выигрыш в силе — она уменьшается тоже в три раза, и $F = P/3$.



**4.** Сплошной шарик подвешен в сосуде на двух одинаковых легких нитях, как показано на рисунке. Свободные концы нитей закреплены на одной высоте. После того как сосуд заполнили водой, и шарик оказался полностью погруженным в воду, натяжение нитей не изменилось.

Определите плотность $\rho$ материала, из которого изготвлен шарик. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м$^3$.

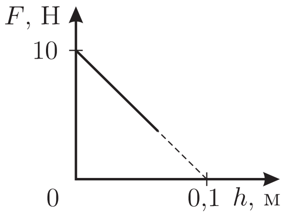


**Решение.** Пусть $V$ — объём шарика. Натяжение нитей может остаться неизменным только в том случае, если $\rho < \rho_в$, а сумма сил тяжести и Архимеда после заполнения сосуда водой $\rho_в gV - \rho gV$ равна по модулю и противоположна по направлению силе тяжести $\rho gV$. Таким образом, $\rho_в gV - \rho gV = \rho gV$. Отсюда $\rho = \rho_в/2 = 500$ кг/м$^3$.

## 8 класс

На выполнение задания отводилось 3 астрономических часа.

**1.** В широкий сосуд с водой медленно опускают на нити цилиндрический брусок так, что ось цилиндра всё время остаётся вертикальной. График зависимости силы натяжения нити $F$ от глубины погружения $h$ нижнего основания цилиндра является отрезком прямой линии, как показано на рисунке. Найдите площадь основания цилиндра $S$ и его массу $m$. Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см$^3$, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.




**Решение.** Как следует из графика, сила $F$ является линейной функцией глубины погружения $h$:

$$F = F_0 \left(1 - \frac{h}{h_0}\right),$$

где $F_0 = 10$ Н, а $h_0 = 0{,}1$ м. Учтём, что сила $F$ складывается из двух противоположных по направлению сил: силы тяжести $mg$ и силы Архимеда $\rho_0 gSh$, то есть $F = mg - \rho_0 gSh$. Отсюда получаем:

$$F = mg - \rho_0 gSh = F_0 - \frac{F_0 h}{h_0}.$$

При $h = 0$ отсюда находим, что $mg = F_0$, и $m = F_0/g = 1$ кг. После этого при $h \neq 0$ из написанного уравнения следует, что $\rho_0 gS = F_0/h_0$. Отсюда $S = F_0/(\rho_0 g h_0) = 0{,}01$ м$^2$.

**2.** В сосуде находился лёд при температуре $t_л = 0$ °C. Туда влили воду массой $m_в = 0{,}4$ кг, взятую при температуре $t_в = 60$ °C. Какая температура установилась в сосуде, если конечный объём его содержимого равен $V = 1$ л? Чему равна масса содержимого сосуда? Плотности воды и льда $\rho_в = 1000$ кг/м$^3$ и $\rho_л = 900$ кг/м$^3$, их удельные теплоёмкости $c_в = 4200$ Дж/(кг · °C) и $c_л = 2100$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг. Теплоёмкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

**Решение.** Масса воды $m_в$ при охлаждении до 0 °C отдаёт количество теплоты $c_в m_в t_в$, достаточное для плавления массы льда $c_в m_в t_в/\lambda \approx 0{,}3$ кг. Объём $m_в = 0{,}4$ кг воды и 0,3 кг растаявшего льда составит

$$\frac{m_в}{\rho_в} + \frac{c_в m_в t_в}{\lambda \rho_в} \approx 0{,}7 \text{ л},$$

что меньше объёма $V$ содержимого сосуда. Следовательно, оставшиеся 0,3 л объёма занимает лёд в твёрдом состоянии массой

$$\rho_л \left( V - \frac{m_в}{\rho_в} \left( 1 + \frac{c_в t_в}{\lambda} \right) \right) \approx 0{,}27 \text{ кг},$$

конечная температура смеси равна 0 °C, масса содержимого сосуда равна

$$m = \rho_л \left( V - \frac{m_в}{\rho_в} \left( 1 + \frac{c_в t_в}{\lambda} \right) \right) + m_в + \frac{c_в m_в t_в}{\lambda} =$$

$$= \rho_л V + m_в \left( 1 - \frac{\rho_л}{\rho_в} \right) \left( 1 + \frac{c_в t_в}{\lambda} \right) \approx 0{,}97 \text{ кг}.$$

**3.** В одном из двух одинаково длинных «чёрных ящиков» находится постоянный магнит, а в другом — длинная катушка из медной проволоки, подключённая к источнику постоянного тока (батарейке). Как, используя только эти «чёрные ящики», определить, в каком из них находится постоянный магнит? Нельзя заглядывать внутрь ящиков, разбирать и разрушать их.

**Решение.** Если поднести к «чёрному ящику» сбоку внешний магнит, то намагниченность постоянного магнита изменится, и он будет притягиваться к внешнему магниту; катушка, сделанная из медной проволоки, притягиваться к внешнему магниту не будет (медь — немагнитный материал). В качестве внешнего магнита можно использовать второй «чёрный ящик». Следовательно, конец «чёрного ящика» с катушкой будет притягиваться к середине «чёрного ящика» с постоянным магнитом, а конец «чёрного ящика» с постоянным магнитом не будет притягиваться к середине «чёрного ящика» с катушкой.

Другой способ заключается в наблюдении за ящиками в течение длительного времени: «чёрный ящик» с катушкой будет нагреваться, что можно заметить на ощупь; кроме того, со временем ток через катушку и создаваемое им магнитное поле станут меньше из-за разрядки батарейки.

## 9 класс

На выполнение задания отводилось 4 астрономических часа.

**1.** Марс удобнее всего изучать во время противостояния, когда Земля находится между Марсом и Солнцем. Определите, через какой промежуток времени повторяются противостояния Марса. Ответ выразите в земных годах. Расстояние от Марса до Солнца в $n = 1{,}53$ раза превосходит расстояние от Земли до Солнца. Считайте, что орбиты Земли и Марса являются круговыми.

**Решение.** Найдём отношение периодов обращения Марса и Земли $T_{\text{М}}$ и $T_{\text{З}}$. При движении планеты массой $m$ вокруг Солнца массой $M$ по круговой орбите радиусом $r$ с угловой скоростью $\omega$ на планету со стороны Солнца действует сила тяготения $GmM/r^2$. В соответствии со вторым законом Ньютона, она равна произведению массы планеты $m$ на её центростремительное ускорение $\omega^2 r$, то есть $GmM/r^2 = m\omega^2 r$. Отсюда $\omega = \sqrt{GM/r^3}$ и, следовательно, $\omega \sim r^{-3/2}$. Так как $T = 2\pi/\omega$, то $T \sim r^{3/2}$; поэтому отношение периодов обращения Марса и Земли составляет

$$\frac{T_{\text{М}}}{T_{\text{З}}} = \left(\frac{r_{\text{М}}}{r_{\text{З}}}\right)^{3/2} = n^{3/2} \approx 1{,}89.$$

Заметим, что последняя формула выражает собой третий закон

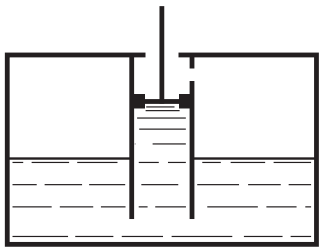
Кеплера (мы его вывели, исходя из предположения, что планеты движутся по круговым орбитам, хотя этот закон справедлив и в более общем случае эллиптических орбит).

За промежуток времени $T$ от одного противостояния до другого Марс совершает $k$ оборотов, а Земля $k+1$ оборот ($k$ не обязательно целое!). Этот промежуток времени выражается через периоды обращения Земли и Марса вокруг Солнца $T_З$ и $T_М$ следующим образом: $T = (k+1)T_З = kT_М$. Отсюда находим $k = T_З/(T_М - T_З)$ и

$$T = \frac{T_З T_М}{T_М - T_З} = \frac{n^{3/2}}{n^{3/2}-1} T_З \approx 2{,}12\, T_З.$$

Таким образом, противостояния Марса повторяются приблизительно через 2,12 земных лет.

**2.** «Чёрный ящик» представляет собой систему, изображённую на рисунке. Внутри него находятся вода и погруженный в неё узкий вертикальный цилиндр с поршнем. К поршню прикреплён выходящий наружу вертикальный шток. Потянув за шток и подвигав его вверх-вниз, школьник решил, что в «чёрном ящике» находится прикреплённая к штоку пружина, и измерил её коэффициент жёсткости. Он оказался равным $k = 100$ Н/м. Чему равна площадь $S$ поршня? Трением и массой поршня можно пренебречь. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м$^3$, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.



**Решение.** Пусть $x$ — высота столба жидкости. Давление у свободной поверхности жидкости равно атмосферному давлению, а на высоте $x$ над этой поверхностью давление в жидкости меньше атмосферного на величину $\rho g x$. Следовательно, разность давлений, оказываемых на поршень сверху и снизу, равна $\rho g x$. Поэтому на поршень действует направленная вниз сила $F = \rho g x S$, пропорциональная смещению поршня $x$. Школьник, измеряя жёсткость предполагаемой пружины, на самом деле измерил коэффициент пропорциональности $k = F/x = \rho g S$. Отсюда $S = k/(\rho g) = 0{,}01$ м$^2$.

**3.** В сосуде находился лёд при температуре $t_л = -20$ °C. Туда влили воду массой $m_в = 0{,}4$ кг, взятую при температуре $t_в = 60$ °C. Каким может быть конечный объём $V$ содержимого сосуда, если установившаяся в системе температура выше 0 °C? Плотности воды и льда $\rho_в = 1000$ кг/м$^3$ и $\rho_л = 900$ кг/м$^3$, их удельные теплоёмкости $c_в = 4200$ Дж/(кг · °С) и $c_л = 2100$ Дж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг. Теплоёмкостью сосуда и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

**Решение.** Обозначим через $m_л$ начальную массу льда в сосуде, через $t$ — установившуюся в системе температуру, которая по условию выше 0 °С. В процессе установления равновесия масса воды $m_в$ отдала количество теплоты $c_в m_в(t_в - t)$. Масса льда $m_л$ получила количество теплоты $c_л m_л|t_л|$ на этапе нагревания до 0 °С, затем количество теплоты $\lambda m_л$ при плавлении и, наконец, количество теплоты $c_в m_л t$ при нагревании образовавшейся из льда воды до установившейся температуры $t$. Поскольку теплоемкостью сосуда и теплообменом с окружающей средой можно пренебречь, то из уравнения теплового баланса получаем: $c_в m_в(t_в - t) = c_л m_л|t_л| + \lambda m_л + c_в m_л t$.

Определяемая из данного соотношения конечная температура $t$ положительна, если $c_в m_в t_в > c_л m_л|t_л| + \lambda m_л$. Таким образом, масса льда $m_л$ лежит в интервале

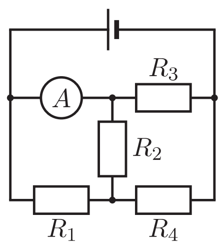
$$0 \leqslant m_л < \frac{c_в m_в t_в}{c_л|t_л| + \lambda}.$$

Конечный объём содержимого сосуда связан с массой льда соотношением $V = (m_в + m_л)/\rho_в$. Отсюда находим ответ:

$$\frac{m_в}{\rho_в} \leqslant V < \frac{m_в}{\rho_в}\left(1 + \frac{c_в t_в}{c_л|t_л| + \lambda}\right),$$

подстановка числовых данных даёт: 0,4 л $\leqslant V <$ 0,67 л.

**4.** В электрической цепи, изображённой на рисунке, напряжение источника равно $U = 9$ В, сопротивления резисторов $R_1 = R_3 = 60$ Ом и $R_2 = 100$ Ом. Амперметр, который можно считать идеальным, показывает силу тока $I = 0{,}185$ А. Найдите силы токов $I_2$ и $I_3$, текущих через резисторы $R_2$ и $R_3$, и сопротивление резистора $R_4$.




**Решение.** Поскольку амперметр можно считать идеальным, падение напряжения на нём равно нулю. Поэтому на резисторе $R_3$ падает напряжение $U_3 = U$. Следовательно, сила тока, текущего через этот резистор, равна $I_3 = U_3/R_3 = U/R_3 = 0{,}15$ А. Далее, сила тока $I$, текущего через амперметр, равна сумме сил токов $I_2$ и $I_3$; отсюда $I_2 = I - I_3 = I - (U/R_3) = 0{,}035$ А.

На резисторе $R_2$ падает напряжение $U_2 = I_2 R_2$; такое же напряжение, ввиду идеальности амперметра, падает и на резисторе $R_1$. Поэтому сила тока, текущего через резистор $R_1$, равна $I_1 = U_2/R_1 = I_2 R_2/R_1$. Отсюда находим силу тока $I_4$, текущего через резистор $R_4$, и напряжение $U_4$ на этом резисторе:

$$I_4 = I_1 + I_2 = I_2\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = \left(I - \frac{U}{R_3}\right)\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right),$$
$$U_4 = U - U_2 = U - I_2 R_2 = U - \left(I - \frac{U}{R_3}\right) R_2.$$

Следовательно, сопротивление резистора $R_4$ равно

$$R_4 = \frac{U_4}{I_4} = \frac{U - I_2 R_2}{I_2(1 + (R_2/R_1))} = \frac{R_1(UR_3 - R_2(IR_3 - U))}{(IR_3 - U)(R_1 + R_2)} \approx 59\ \text{Ом}.$$

## 10 класс

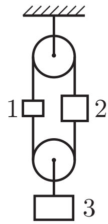
На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

**1.** По гладкому горизонтальному столу скользит однородная линейка длиной $L = 25$ см. В некоторый начальный момент времени скорости концов линейки направлены перпендикулярно к ней в разные стороны и равны $v_1 = 10$ см/с и $v_2 = 30$ см/с. Какая скорость $v$ будет у центральной точки линейки через время $t = 5$ с после начального момента? За какое время $\tau$ от начального момента линейка повернётся на угол $90°$ от исходного положения?

**Решение.** Перейдём в систему отсчёта, движущуюся со скоростью $(v_2 - v_1)/2$ в направлении скорости $\vec{v}_2$. В движущейся системе отсчёта концы линейки имеют скорости $(v_1 + v_2)/2$, направленные перпендикулярно линейке в разные стороны. Следовательно, в этой системе отсчёта линейка совершает только вращательное движение вокруг центральной точки, поворачиваясь на угол $\pi/2$ за время

$$\tau = \frac{\pi L/4}{(v_1 + v_2)/2} = \frac{\pi L}{2(v_1 + v_2)} \approx 1\ \text{с}.$$

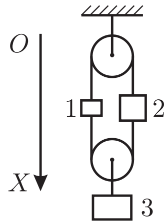
Далее заметим, что в движущейся системе отсчёта центр масс линейки покоится. Следовательно, скорость центра масс линейки в неподвижной системе отсчёта равна $(v_2 - v_1)/2$. Так как стол горизонтальный и гладкий, то импульс, а значит, и скорость центра масс линейки остаются неизменными. Поэтому через время $t = 5$ с после начального момента времени (как, впрочем, и через любой другой промежуток времени) скорость центральной точки линейки будет равна $v = (v_2 - v_1)/2 = 10$ см/с.




**2.** В системе, изображённой на рисунке, грузы 1 и 2 прикреплены к нитям, массы грузов 1, 2 и 3 равны $M$, $2M$ и $3M$ соответственно. Найдите их ускорения. Трение отсутствует. Блоки невесомы, нити невесомы и нерастяжимы, не лежащие на блоках участки нитей вертикальны.

**Решение.** Из чертежа видно, что груз массой $3M$ двигаться не может, и поэтому его ускорение равно нулю.

Так как блоки и нити невесомы и трение отсутствует, то сила натяжения $T_1$ верхней нити, перекинутой через верхний блок, постоянна вдоль всей её длины. То же самое справедливо и для силы натяжения $T_2$ нижней нити, на которой висит нижний блок. Направим координатную ось $OX$ вниз и обозначим ускорение груза массой $2M$ через $a$. Тогда груз массой $M$, двигающийся в противоположном направлении, имеет ускорение $-a$.




Запишем второй закон Ньютона для грузов массами $M$ и $2M$:

$$-Ma = Mg - T_1 + T_2, \quad 2Ma = 2Mg - T_1 + T_2.$$

Вычитая первое уравнение из второго, получим, что $3Ma = Mg$. Отсюда $a = g/3$.

Таким образом, груз массой $M$ движется с ускорением $g/3$ вверх, груз массой $2M$ — с ускорением $g/3$ вниз, ускорение груза массой $3M$ равно нулю.

**3.** По горизонтальному столу катится без трения тележка массой $M$ со скоростью $v_0$. На горизонтальную поверхность тележки положили кирпич массой $m$, начальная скорость которого относительно стола была равна нулю. Кирпич прошёл по тележке путь $l$ и остановился относительно неё. Найдите коэффициент трения между кирпичом и тележкой.

**Решение.** Нормальная составляющая силы реакции, действующая на кирпич со стороны тележки, равна по величине силе тяжести $mg$. Следовательно, на кирпич при его движении относительно тележки действует с её стороны сила трения $\mu mg$, сообщающая кирпичу ускорение $\mu g$ относительно земли. Такая же по величине и противоположная по направлению сила трения действует на тележку со стороны кирпича; тележка при этом получает ускорение, равное по величине $\mu mg/M$. Скорости кирпича $u$ и тележки $v$ относительно стола зависят от времени

$t$ по законам: $u(t) = \mu g t$ и $v(t) = v_0 - \mu g(m/M)t$. Кирпич и тележка перестанут ускоряться в тот момент, когда их скорости сравняются: $u(t_0) = v(t_0)$, откуда

$$t_0 = \frac{v_0}{\mu g(1 + (m/M))}.$$

За время движения $t_0$ кирпич сместится относительно стола на расстояние $x_0 = (1/2)\mu g t_0^2$, а тележка — на расстояние $X_0 = v_0 t_0 - (1/2)\mu g(m/M)t_0^2$. Следовательно, кирпич пройдёт по тележке до остановки относительно неё путь

$$l = X_0 - x_0 = v_0 t_0 - \mu g \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{t_0^2}{2} = \frac{v_0^2}{2\mu g(1 + (m/M))}.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{v_0^2}{2gl(1 + (m/M))}.$$

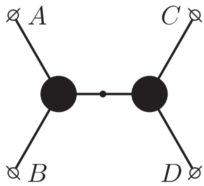
**4.** В сосуде постоянного объёма находится смесь гелия и кислорода. Смесь нагревают от температуры $T_1 = 300$ К до температуры $T_2 = 4T_1/3 = 400$ К, при этом половина атомов гелия покидает сосуд, а давление газа остаётся прежним. Во сколько раз при этом изменяется плотность смеси? Молярная масса кислорода $\mu_к = 32$ г/моль, гелия $\mu_г = 4$ г/моль.

**Решение.** Поскольку объём сосуда и давление в нём постоянны, то количество вещества в сосуде, в соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона, изменяется обратно пропорционально абсолютной температуре газа. В рассматриваемом процессе температура газа возросла в 4/3 раза, поэтому количество вещества в сосуде после завершения нагревания составило 3/4 от исходного количества. Следовательно, сосуд покинула четверть от общего числа атомов, что по условию равно половине от начального числа атомов гелия. Поэтому начальное количество гелия $\nu_г$ равно половине общего количества вещества, первоначально находившегося в сосуде, а начальное количество гелия было равно количеству $\nu_к$ находящегося в сосуде кислорода: $\nu_г = \nu_к$.

Отношение $n$ конечной и начальной плотностей смеси равно отношению масс содержимого сосуда до и после нагревания. С учётом проведённых выше рассуждений, получаем:

$$n = \frac{\rho_{кон}}{\rho_{нач}} = \frac{\mu_к \nu_к + \mu_г(\nu_г/2)}{\mu_к \nu_к + \mu_г \nu_г} = \frac{2\mu_к + \mu_г}{2(\mu_к + \mu_г)} = \frac{17}{18} \approx 0{,}94.$$

**5.** Изображённая на рисунке электрическая цепь состоит из двух соединённых друг с другом «чёрных ящиков», каждый из которых имеет три вывода. При подключении к клеммам $A$ и $C$ омметр показывает значение сопротивления $R_{AC}$, при подключении к клеммам $B$ и $D$ — значение $R_{BD}$, при подключении к клеммам $A$ и $D$ — значение $R_{AD}$. Что покажет омметр при подключении к клеммам $B$ и $C$? Известно, что в «чёрных ящиках» находятся только различным образом соединённые резисторы.




**Решение.** Примем, что потенциал электрического поля в средней точке, лежащей на проводнике, который соединяет «чёрные ящики», равен нулю. Так как исследуемая электрическая схема состоит только из элементов, для которых справедлив закон Ома, то потенциалы $\varphi_A$ клеммы $A$ и $\varphi_B$ клеммы $B$ должны линейно зависеть от сил токов $I_A$ и $I_B$, протекающих через эти клеммы при подключении к ним омметра:

$$\varphi_A = I_A r_{AA} + I_B r_{BA} \quad \text{и} \quad \varphi_B = I_A r_{AB} + I_B r_{BB},$$

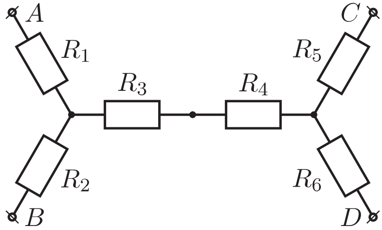
где $r_{AA}$, $r_{BA}$, $r_{AB}$ и $r_{BB}$ — некоторые постоянные коэффициенты. Аналогичные соотношения можно записать для потенциалов $\varphi_C$ и $\varphi_D$ клемм $C$ и $D$ (при этом нужно учесть, что потенциалы этих клемм отрицательны в силу выбора нулевого значения потенциала в средней точке):

$$-\varphi_C = I_C r_{CC} + I_D r_{DC} \quad \text{и} \quad -\varphi_D = I_C r_{CD} + I_D r_{DD},$$

где $r_{CC}$, $r_{DC}$, $r_{CD}$ и $r_{DD}$ — также некоторые постоянные коэффициенты.

При подключении омметра к клеммам $A$ и $C$ токи $I_A$ и $I_C$ совпадают: $I_A = I_C = I_{AC}$, а $I_B = I_D = 0$. Следовательно, $\varphi_A = I_{AC} r_{AA}$ и $-\varphi_C = I_{AC} r_{CC}$. Отсюда получаем: $\varphi_A - \varphi_C = I_{AC}(r_{AA} + r_{CC})$. Следовательно, показание омметра $R_{AC} = r_{AA} + r_{CC}$. При подключении омметра к клеммам $B$ и $D$ токи $I_B$ и $I_D$ совпадают: $I_B = I_D = I_{BD}$, а $I_A = I_C = 0$. Отсюда $\varphi_B = I_{BD} r_{BB}$ и $-\varphi_D = I_{BD} r_{DD}$, то есть $\varphi_B - \varphi_D = I_{BD}(r_{BB} + r_{DD})$, и $R_{BD} = r_{BB} + r_{DD}$. При помощи аналогичных рассуждений можно показать, что $R_{AD} = r_{AA} + r_{DD}$ и $R_{BC} = r_{BB} + r_{CC}$. Отсюда следует, что $R_{AC} + R_{BD} = R_{AD} + R_{BC}$, то есть $R_{BC} = R_{AC} + R_{BD} - R_{AD}$. Заметим, что решение задачи существует только при условии $R_{AC} + R_{BD} \geq R_{AD}$, так как значение сопротивления $R_{BC}$ не может быть отрицательным.

Существует и другой способ решения задачи. Он основан на том, что «чёрный ящик» с тремя выводами, содержащий только резисторы, можно заменить на эквивалентную схему, в которой между выводами включены всего три резистора, соединённые либо «звездой», либо «треугольником». В данном случае удобнее заменить каждый из «чёрных ящиков» на схему, состоящую из трёх резисторов, соединённых «звездой», как показано на рисунке. Тогда



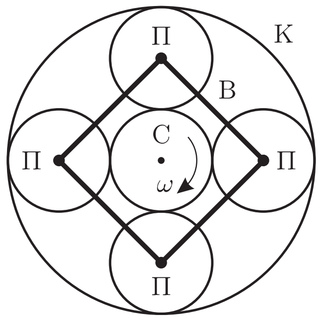

$$R_{AC} = R_1 + R_3 + R_4 + R_5,$$
$$R_{AD} = R_1 + R_3 + R_4 + R_6,$$
$$R_{BC} = R_2 + R_3 + R_4 + R_5,$$
$$R_{BD} = R_2 + R_3 + R_4 + R_6.$$

Отсюда снова получаем соотношение $R_{AC} + R_{BD} = R_{AD} + R_{BC}$, из которого следует ответ задачи.

## 11 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

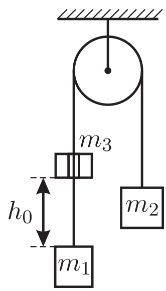
**1.** Одна из разновидностей так называемой планетарной передачи состоит из центральной (солнечной) шестерни (С), нескольких планетарных шестерён (П), оси которых соединены жёсткой рамой — водилом (В) и кольцевой шестерни (К), имеющей внутреннее зацепление с планетарными. Пусть радиусы солнечной и планетарных шестерён равны, и солнечная шестерня приводится во вращение с угловой скоростью $\omega$. С какой угловой скоростью будет вращаться кольцевая шестерня, если водило зафиксировано? С какой угловой скоростью будет вращаться водило, если кольцевая шестерня зафиксирована? С какой угловой скоростью в последнем случае будет вращаться планетарная шестерня?




**Решение.** Пусть $R$ — радиус солнечной шестерни, совпадающий с радиусом каждой из планетарных шестерён, $\omega_п$ — угловая скорость каждой из планетарных шестерён, $\omega_{\text{в}}$ — угловая скорость водила, $\omega_{\text{к}}$ — угловая скорость кольцевой шестерни. В качестве положительного направления вращения примем направление по часовой стрелке; при вращении в этом направлении будем считать угловую скорость положительной, а в противоположном направлении — отрицательной.

Если водило зафиксировано, то из условия равенства линейных скоростей соприкасающихся точек солнечной и планетарной шестерён находим, что $\omega_{\text{п}} = -\omega$. Линейные скорости соприкасающихся друг с другом точек планетарных и кольцевой шестерён равны $v_{\text{п}} = \omega_{\text{п}} R$ и $v_{\text{к}} = \omega_{\text{к}} \cdot 3R$ соответственно. Так как между кольцевой и планетарными шестернями имеется зацепление, то $v_{\text{п}} = v_{\text{к}}$, откуда $\omega_{\text{к}} = \omega_{\text{п}}/3 = -\omega/3$. Следовательно, кольцевая шестерня вращается в направлении, противоположном направлению вращения солнечной шестерни, с угловой скоростью, равной по величине $\omega/3$.

Пусть теперь зафиксирована кольцевая шестерня. Так как точка соприкосновения планетарной и кольцевой шестерён неподвижна, то она является мгновенной осью вращения планетарной шестерни. Центр планетарной шестерни, находящийся на водиле на расстоянии $2R$ от центра солнечной шестерни, движется со скоростью $\omega_{\text{в}} \cdot 2R = -\omega_{\text{п}} R$, а точка соприкосновения планетарной шестерни с солнечной, вдвое более удалённая от мгновенной оси вращения — с вдвое большей скоростью, равной $4\omega_{\text{в}} R = -2\omega_{\text{п}} R$. С такой же линейной скоростью движутся точки обода солнечной шестерни. Следовательно, $\omega R = 4\omega_{\text{в}} R = -2\omega_{\text{п}} R$, откуда $\omega_{\text{в}} = \omega/4$, а $\omega_{\text{п}} = -\omega/2$. Таким образом, в данном случае водило вращается в том же направлении, что и солнечная шестерня, с угловой скоростью, равной $\omega/4$. Планетарная шестерня при этом вращается в направлении, противоположном направлению вращения солнечной шестерни, с угловой скоростью, равной по величине $\omega/2$.




**2.** На длинной нити, перекинутой через блок, висят грузы массами $m_1$ и $m_2$. На высоте $h_0$ над более лёгким грузом держат шайбу из пластилина массой $m_3$. Известно, что $m_3 > m_2 - m_1 > 0$. В некоторый момент грузы $m_1$ и $m_2$ приходят в движение без начальной скорости. Когда груз $m_1$ доходит до шайбы, её отпускают без начальной скорости, и пластилиновая шайба прилипает к грузу $m_1$. На какую максимальную высоту $h$ над начальным положением поднимется шайба? Трение и масса блока пренебрежимо малы. Нить невесомая и нерастяжимая, а её участки, не лежащие на блоке, вертикальны.

**Решение.** Рассмотрим движение грузов до момента их столкновения с шайбой из пластилина. Пусть $T$ — сила натяжения нити, $a_0$ — направленное вниз ускорение груза $m_2$. В силу нерастяжимости нити это ускорение равно по величине и противоположно по направлению ускорению груза $m_1$. Запишем уравнения движения для грузов $m_1$ и $m_2$ в проекции на вертикальную ось, направленную вниз:

$$m_2 a_0 = m_2 g - T, \quad -m_1 a_0 = m_1 g - T.$$

Вычитая эти уравнения друг из друга, получаем: $a_0 = ((m_2 - m_1)/(m_2 + m_1))g$.

Аналогичным образом можно найти, что после прилипания пластилина к грузу $m_1$ его ускорение направлено вниз и равно

$$a = \frac{m_1 + m_3 - m_2}{m_1 + m_3 + m_2} g.$$

Этот результат можно получить и без записи уравнений движения: достаточно в найденном выше выражении для $a_0$ заменить массу $m_1$ на суммарную массу $m_1 + m_3$ и учесть, что после прилипания пластилина ускорение груза $m_1$ будет положительным (так как $m_3 > m_2 - m_1$).

Пусть скорость грузов до соударения с шайбой из пластилина была равна по величине $v_0$. Так как нить нерастяжимая и блок невесомый, то при неупругом столкновении груза $m_1$ с пластилином возникнет кратковременное увеличение силы натяжения нити — рывок, после которого скорости всех трёх тел станут одинаковыми по модулю и равными некоторой величине $v$. Грузы $m_1$ и $m_2$, жёстко связанные нерастяжимой нитью, при столкновении с неподвижной пластилиновой шайбой ведут себя, как одно тело с массой $m_1 + m_2$, движущееся со скоростью $v_0$. При этом проекция импульса системы на направление нити, очевидно, сохраняется: $(m_1 + m_2)v_0 = (m_1 + m_2 + m_3)v$. Следовательно, после прилипания пластилина к грузу массой $m_1$ получившееся тело массой $m_1 + m_3$ будет двигаться вверх с начальной скоростью $v$, причём равнозамедленно.

Скорости $v_0$ и $v$ связаны с расстояниями $h_0$ и $h$ следующими кинематическими соотношениями:

$$v_0 = \sqrt{2a_0 h_0} = \sqrt{2gh_0}\sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}},$$

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{m_1 + m_3 - m_2}{m_1 + m_3 + m_2}}.$$

Учитывая записанное выше уравнение, связывающее скорости $v_0$ и $v$, получаем:

$$(m_1+m_2)\sqrt{2gh_0}\sqrt{\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}}=(m_1+m_2+m_3)\sqrt{2gh}\sqrt{\frac{m_1+m_3-m_2}{m_1+m_3+m_2}},$$

откуда

$$h=h_0\frac{m_2^2-m_1^2}{(m_1+m_3)^2-m_2^2}.$$

**3.** Если направить поток протонов на кусок льда из тяжёлой воды $D_2O$, то при минимальной кинетической энергии протонов $E_1=1{,}4$ МэВ происходит ядерная реакция с образованием ядер $^3_2He$. Какую минимальную кинетическую энергию $E_2$ надо сообщить ядрам дейтерия, чтобы при их попадании на кусок льда из обычной воды произошла эта же ядерная реакция?

**Решение.** Рассмотрим оба опыта в системе отсчёта, связанной с центром масс реагирующих частиц. Для того чтобы ядерная реакция произошла, необходимо сблизить частицы на некоторое минимальное расстояние. При этом в системе центра масс частицы, двигавшиеся навстречу друг другу со скоростями $u_1$ и $u_2$, останавливаются, и их кинетическая энергия превращается в потенциальную энергию взаимодействия. Ясно, что для начала реакции нужно, чтобы суммарная кинетическая энергия частиц (а значит, и скорость их сближения $v=u_1+u_2$) превосходила некоторое пороговое значение. Таким образом, минимально возможная для реакции скорость сближения частиц в обоих опытах должна быть одинакова. Релятивистскими эффектами в данной задаче можно пренебречь, поскольку кинетическая энергия протона намного меньше его энергии покоя (примерно 1000 МэВ). Поэтому скорость сближения частиц, то есть их относительная скорость, в системе центра масс и в неподвижной лабораторной системе одинакова. В первом опыте скорость сближения частиц равна $v_1=\sqrt{2E_1/m_1}$, а во втором — $v_2=\sqrt{2E_2/m_2}$, где $m_1$ — масса протона, а $m_2$ — масса ядра дейтерия. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\sqrt{\frac{2E_1}{m_1}}=\sqrt{\frac{2E_2}{m_2}},\quad \text{откуда}\quad E_2=E_1\frac{m_2}{m_1}.$$

Учитывая, что $m_2/m_1=2$, получаем $E_2=2E_1=2{,}8$ МэВ.

**4.** В сосуде находился лёд при температуре $t_л=-20$ °C. Туда влили воду массой $m_в=0{,}4$ кг, взятую при температуре $t_в=60$ °C. Каким может быть конечный объём системы $V$, если установившаяся в системе температура: а) положительна? б) отрицательна? в) равна нулю? Плотности воды и льда $\rho_в = 1000$ кг/м$^3$ и $\rho_л = 900$ кг/м$^3$, их удельные теплоёмкости $c_в = 4200$ Дж/(кг $\cdot$ °C) и $c_л = 2100$ Дж/(кг $\cdot$ °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг. Теплоёмкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

**Решение.** Обозначим через $m_л$ начальную массу льда в сосуде. Рассмотрим возможные значения установившейся в системе температуры $t$.

а) Пусть $t > 0$ °C. Тогда масса воды $m_в$ отдала количество теплоты $c_в m_в(t_в - t)$, а масса льда $m_л$ получила количество теплоты $c_л m_л|t_л|$ на этапе нагревания до 0 °C, затем $\lambda m_л$ при плавлении и $c_в m_л t$ при нагревании образовавшейся воды до установившейся температуры. Поскольку теплоёмкостью сосуда и потерями тепла можно пренебречь, то из уравнения теплового баланса получаем:

$$c_в m_в(t_в - t) = c_л m_л|t_л| + \lambda m_л + c_в m_л t.$$

Определяемая из данного соотношения конечная температура $t$ положительна, если $c_в m_в t_в > c_л m_л|t_л| + \lambda m_л$. Таким образом, масса льда $m_л$ лежит в интервале $0 \leqslant m_л < c_в m_в t_в/(c_л|t_л| + \lambda)$. Конечный объём содержимого сосуда связан с массой льда соотношением $V = (m_в + m_л)/\rho_в$; отсюда

$$\frac{m_в}{\rho_в} \leqslant V < \frac{m_в}{\rho_в}\left(1 + \frac{c_в t_в}{c_л|t_л| + \lambda}\right),$$

подстановка числовых данных даёт 0,4 л $\leqslant V <$ 0,67 л.

б) Пусть $t < 0$ °C. Тогда масса воды $m_в$ отдала количество теплоты $c_в m_в t_в$ при охлаждении до 0 °C, затем $\lambda m_в$ при замерзании, и $c_л m_в(0 - t)$ при охлаждении образовавшегося льда до конечной температуры, а лёд получил количество теплоты $c_л m_л(t - t_л)$. Из уравнения теплового баланса получаем:

$$c_в m_в t_в + \lambda m_в - c_л m_в t = c_л m_л(t - t_л).$$

Определённая из этой формулы установившаяся температура отрицательна, если $c_в m_в t_в + \lambda m_в < -c_л m_л t_л$; при этом начальная масса льда превосходит критическое значение $m_л > ((c_в t_в + \lambda)/(c_л|t_л|))m_в$. Конечный объём системы $V = (m_в + m_л)/\rho_л$ должен удовлетворять неравенству

$$V > \frac{m_в}{\rho_л}\left(1 + \frac{c_в t_в + \lambda}{c_л|t_л|}\right),$$

подстановка числовых данных даёт $V > 6{,}7$ л.

в) Из проведённого выше рассмотрения следует, что конечная температура системы равна 0 °C, если начальная масса льда удовлетворяет неравенству

$$\frac{c_{\text{в}} t_{\text{в}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{л}}| + \lambda} m_{\text{в}} \leqslant m_{\text{л}} \leqslant \frac{c_{\text{в}} t_{\text{в}} + \lambda}{c_{\text{л}}|t_{\text{л}}|} m_{\text{в}}.$$

В процессе установления равновесия вода отдала количество теплоты $c_{\text{в}} m_{\text{в}} t_{\text{в}}$, лёд получил количество теплоты $c_{\text{л}} m_{\text{л}} |t_{\text{л}}|$; следовательно, количество теплоты $c_{\text{в}} m_{\text{в}} t_{\text{в}} - c_{\text{л}} m_{\text{л}} |t_{\text{л}}|$ пошло либо на плавление массы льда $\Delta m = (c_{\text{в}} m_{\text{в}} t_{\text{в}} - c_{\text{л}} m_{\text{л}} |t_{\text{л}}|)/\lambda$ (если $\Delta m > 0$), либо на кристаллизацию массы воды $-\Delta m$ при $\Delta m < 0$. При этом объём системы изменяется на величину $-\Delta m((1/\rho_{\text{л}}) - (1/\rho_{\text{в}}))$ и оказывается равным

$$V = \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} + \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}} - \Delta m \left( \frac{1}{\rho_{\text{л}}} - \frac{1}{\rho_{\text{в}}} \right) =$$

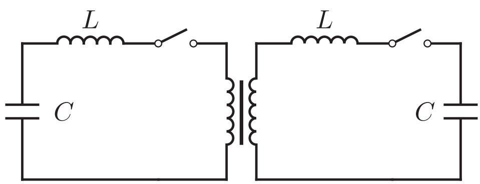
$$= \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} + \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}} - \frac{c_{\text{в}} m_{\text{в}} t_{\text{в}} - c_{\text{л}} m_{\text{л}} |t_{\text{л}}|}{\lambda} \left( \frac{1}{\rho_{\text{л}}} - \frac{1}{\rho_{\text{в}}} \right).$$

Учитывая неравенство для начальной массы льда, приходим к соотношению:

$$\frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} \left( 1 + \frac{c_{\text{в}} t_{\text{в}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{л}}| + \lambda} \right) \leqslant V \leqslant \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} \left( 1 + \frac{c_{\text{в}} t_{\text{в}} + \lambda}{c_{\text{л}}|t_{\text{л}}|} \right).$$

Подстановка числовых данных даёт 0,67 л $\leqslant V \leqslant$ 6,7 л.

**5.** Электрическая цепь состоит из двух конденсаторов ёмкостью $C$, двух одинаковых катушек индуктивности $L$ и идеального трансформатора с коэффициентом трансформации, равным 1. Если зарядить один из конденсаторов и замкнуть ключ, подсоединяющий его к трансформатору, в цепи возникнут гармонические колебания с частотой $\omega$. Найдите возможные частоты гармонических электрических колебаний в цепи, если оба ключа замкнуты.




**Решение.** При разомкнутом втором ключе трансформатор ведёт себя, как катушка индуктивности $L_1$. Частота электромагнитных колебаний в такой цепи $\omega = 1/\sqrt{(L + L_1)C}$, откуда $L_1 = (1/\omega^2 C) - L$.

Пусть теперь оба ключа замкнуты. При этом в цепи возможны два вида гармонических колебаний: первый — когда силы токов, текущих через обмотки трансформатора, одинаковы по амплитуде и по фазе; второй — когда силы токов, текущих через обмотки трансформатора, одинаковы по амплитуде, но имеют противоположные фазы. В первом случае магнитные потоки через сердечник трансформатора будут складываться. Поэтому ЭДС индукции в обмотках трансформатора удвоится по сравнению со случаем разомкнутого ключа, что можно представить как эффективное удвоение индуктивности обмотки трансформатора. Частота колебаний в этом случае будет равна

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L+2L_1)C}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{\omega^2} - LC}} = \frac{\omega}{\sqrt{2-\omega^2 LC}}.$$

Во втором случае магнитные потоки через сердечник трансформатора будут вычитаться и скомпенсируют друг друга, поэтому ЭДС индукции в обмотках трансформатора наводиться не будет. При этом индуктивность обмотки трансформатора можно считать равной нулю, и частота колебаний будет равна $\omega_2 = 1/\sqrt{LC}$.

Заметим, что эту задачу можно решать и другим способом, записывая закон Ома для цепей переменного тока и решая получившуюся систему дифференциальных уравнений. Однако такой способ решения выходит за рамки школьной программы.

# Городской этап. Второй теоретический тур

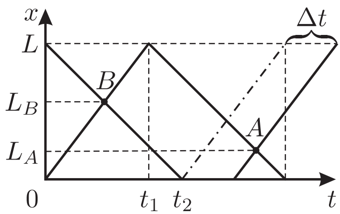
Состоялся 25 февраля 2007 года.

## 8 класс

На выполнение задания отводилось 3 астрономических часа.

**1.** Два велосипедиста одновременно выезжают навстречу друг другу из деревень Липовка и Дёмушкино, находящихся на расстоянии $L = 10$ км друг от друга. Каждый планирует ехать со скоростью $V = 20$ км/ч и, достигнув противоположной деревни, сразу повернуть обратно. Но вдоль дороги всё время дует ветер, скорость и направление которого постоянны. При движении по ветру скорость увеличивается на столько же, на сколько уменьшается при движении против ветра. Велосипедист, который сначала ехал по ветру, достигнув противоположной деревни, сразу повернул назад, а велосипедист, который сначала ехал против ветра, задержался в противоположной деревне, чтобы отдохнуть, и только потом повернул обратно. Известно, что велосипедисты встречались в точках $A$ и $B$, находящихся на расстояниях $L_A = 2$ км и $L_B = 6$ км от Липовки. Найдите времена движения $t_1$ и $t_2$ из Липовки в Дёмушкино и из Дёмушкино в Липовку. В какой деревне и в течение какого промежутка времени $\Delta t$ отдыхал велосипедист, ехавший сначала против ветра?

**Решение.** Построим графики зависимости от времени $t$ расстояния $x$ от каждого из велосипедистов до деревни, из которой дует ветер. Если бы второй велосипедист (ехавший сначала против ветра) не отдыхал в деревне (пунктирный график), точки встречи велосипедистов располагались бы симметрично относительно середины пути, соединяющего деревни. С учётом же отдыха оказывается, что вторая точка встречи находится на меньшем расстоянии от ближайшей деревни, чем первая. Следовательно, велосипедисты встретились сначала в точке $B$, затем в точке $A$, и именно из деревни, расположенной вблизи точки $A$, дует ветер. Этой деревней оказывается Липовка — ветер дует из Липовки в Дёмушкино.




Найдём скорости велосипедистов $V_1 = V + u$ и $V_2 = V - u$ при движении по ветру и против ветра (здесь $u$ — величина изменения их скоростей из-за ветра). Поскольку велосипедисты сначала встретились в точке $B$, отношение их скоростей совпадает с отношением расстояний от точки $B$ до деревень, то есть

$$\frac{V+u}{V-u} = \frac{L_B}{L-L_B} = \frac{3}{2}.$$

Отсюда $u = \dfrac{2L_B - L}{L}V = 0{,}2V = 4$ км/ч. Следовательно,

$$V_1 = \frac{2L_B}{L}V = 24 \text{ км/ч} \quad \text{и} \quad V_2 = \frac{2(L-L_B)}{L}V = 16 \text{ км/ч}$$

Искомые времена равны:

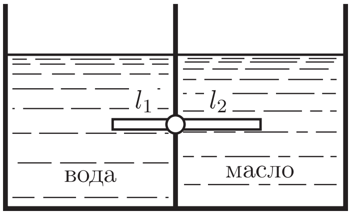
$$t_1 = \frac{L}{V_1} = \frac{L^2}{2VL_B} = 25 \text{ мин.}; \quad t_2 = \frac{L}{V_2} = \frac{L^2}{2V(L-L_B)} = 37{,}5 \text{ мин.}$$

Из второй точки встречи $A$ второй велосипедист доедет до Дёмушкино за время $\Delta t_2 = L(L - L_A)/(2VL_B) = 20$ мин., а первый велосипедист доедет до Липовки за время $\Delta t_1 = LL_A/(2V(L - L_B)) = 7{,}5$ мин. Следовательно, второй велосипедист возвратится в Дёмушкино через

$$\Delta t = \Delta t_2 - \Delta t_1 = \frac{L^2(L - L_A - L_B)}{2VL_B(L - L_B)} = 12{,}5 \text{ мин.}$$

после возврата первого велосипедиста в Липовку — и именно эти $\Delta t = 12{,}5$ мин. второй велосипедист отдыхал в Липовке.

**2.** Плотность масла измеряют в опыте, схема которого показана на рисунке. Сосуд разделён на две части вертикальной перегородкой. В одну часть сосуда налита вода, в другую — масло. В перегородку встроен шарнир, который может вращаться без трения. В шарнир вставлена однородная сосновая линейка, которая находится в равновесии. Длина левой части линейки равна $l_1 = 40$ см, правой — $l_2 = 60$ см. Плотность воды равна $\rho_в = 1000$ кг/м$^3$, плотность линейки $\rho = 600$ кг/м$^3$. Чему равна плотность масла $\rho_м$?




**Решение.** На левую часть линейки объёмом $V_1$ действует направленная вниз сила тяжести $\rho g V_1$ и направленная вверх сила Архимеда $\rho_в g V_1$. Сумма этих сил равна $(\rho_в - \rho)gV_1$ и направлена вверх. Аналогично, на правую часть линейки объёмом $V_2$ действует направленная вверх суммарная сила $(\rho_м - \rho)gV_2$. Плечи этих сил, приложенных к центрам левой и правой частей линейки, относятся, как $l_1 : l_2$. По правилу рычага при его равновесии отношение плеч равно обратному отношению величин сил:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{(\rho_м - \rho)gV_2}{(\rho_в - \rho)gV_1}.$$

Поскольку $V_2/V_1 = l_2/l_1$, находим:

$$\frac{\rho_м - \rho}{\rho_в - \rho} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2.$$

Отсюда

$$\rho_м = \rho + (\rho_в - \rho)\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \approx 780 \text{ кг/м}^3.$$

**3.** Вазон для цветов, стоящий на улице, имеет плоское дно и вертикальные стенки. Толщина слоя земли в вазоне равна $h = 15$ см, а температура земли равна $t = 11$ °C. На улице похолодало, и пошёл снег. Снежинки состоят изо льда, имеют массу $m = 50$ мг, объём $V = 0{,}5$ см$^3$ и температуру $t_0 = 0$ °C. Они падают вертикально с постоянной скоростью $v = 1$ м/с. В объёме воздуха $V_0 = 1$ м$^3$ находится $N_0 = 100$ снежинок. За какое время $\tau$ на земле в вазоне нарастёт слой снега толщиной $H = 10$ см? Считайте, что вся земля в вазоне равномерно пропитывается водой, имеет в любой момент одинаковую температуру во всём объёме и почти не обменивается теплом со стенками вазона и с воздухом. Плотность земли $\rho = 1500$ кг/м$^3$, удельная теплоёмкость земли $c = 900$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг.

**Решение.** Пока температура земли в вазоне выше 0 °C, снег будет таять и превращаться в воду, а земля будет охлаждаться и пропитываться водой. Как только мокрая земля охладится до 0 °C, снежинки перестанут таять, и в вазоне начнёт нарастать слой снега.

Найдём вначале время $\tau_1$ охлаждения земли до 0 °C. Пусть $S$ — площадь вазона. Охлаждаясь от температуры $t = 11$ °C до 0 °C, земля отдаёт количество теплоты $chS\rho t$, которое идёт на плавление массы снега $M_1 = chS\rho t/\lambda$. Поскольку за время $\tau_1$ выпадает масса снега, равная $M_1 = Sv\tau_1 mN_0/V_0$, имеем: $chS\rho t/\lambda = Sv\tau_1 mN_0/V_0$, откуда

$$\tau_1 = \frac{ch\rho tV_0}{m\lambda N_0 v} \approx 1{,}33 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 22 \text{ мин}.$$

Теперь найдём время $\tau_2$ нарастания слоя снега толщиной $H = 10$ см. Будем считать, что снежинки при падении на землю не уплотняются, и плотность снега равна $m/V$. Масса такого слоя снега в вазоне равна $M_2 = SHm/V$, и она выпадает за время $\tau_2$, причём $M_2 = Sv\tau_2 mN_0/V_0$. Отсюда имеем: $SHm/V = Sv\tau_2 mN_0/V_0$, и

$$\tau_2 = \frac{HV_0}{VN_0 v} = 2 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 33 \text{ мин}.$$

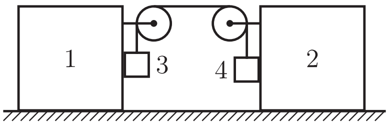
Таким образом, слой снега толщиной $H = 10$ см нарастёт в вазоне за время

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{ch\rho tV_0}{m\lambda N_0 v} + \frac{HV_0}{VN_0 v} = \frac{V_0}{N_0 v}\left(\frac{ch\rho t}{m\lambda} + \frac{H}{V}\right) \approx 3{,}33 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 55 \text{ мин}.$$

## 9 класс

На выполнение задания отводилось 4 астрономических часа.

**1.** Найдите ускорение груза 1 в системе, изображённой на рисунке. Массы грузов 1 и 2 равны $M$, массы грузов 3 и 4 равны $m$. Грузы 3 и 4 касаются грузов 1 и 2, участки нити, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны. Нить невесома и нерастяжима, блоки лёгкие, трения нет.



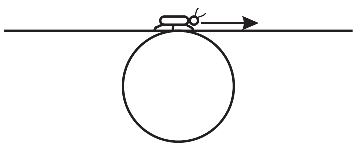

**Решение.** Направим ось $OX$ горизонтально, а ось $OY$ — вертикально вверх. Пусть $A$ — искомое ускорение груза 1, $a$ — величина вертикальной составляющей ускорения груза 3. Как вытекает из соображений симметрии, все проекции ускорений грузов выражаются через $A$ и $a$ следующим образом:

$$a_{1x} = A, \qquad a_{2x} = -A, \qquad a_{3x} = A,$$
$$a_{3y} = -a, \qquad a_{4x} = -A, \qquad a_{4y} = -a.$$

Используя условие нерастяжимости, то есть постоянства длины нити, получим соотношение, связывающее $A$ и $a$. При смещении грузов 1 и 2 по горизонтали на $\Delta x_1$ и $\Delta x_2$ изменение длины нити равно $\Delta x_2 - \Delta x_1$; при смещении грузов 3 и 4 по вертикали на $\Delta y_3$ и $\Delta y_4$ изменение длины нити равно $-\Delta y_3 - \Delta y_4$. Ввиду нерастяжимости нити, полное изменение её длины равно нулю: $\Delta x_2 - \Delta x_1 - \Delta y_3 - \Delta y_4 = 0$. Отсюда $a_{2x} - a_{1x} = a_{3y} + a_{4y}$, и $a = A$.

Для нахождения ускорения $A = a$ обозначим через $T$ силу натяжения нити. Запишем уравнение движения груза 3 по вертикали: $T - mg = -ma$, а также уравнение движения системы грузов 1 и 3 по горизонтали: $T = (M + m)A$. Отсюда $A = mg/(M + 2m)$.

**2.** На неподвижно закреплённом цилиндре радиусом $R$ лежит тонкая линейка длиной $l = 2\pi R$ и массой $M$. Линейка расположена горизонтально, перпендикулярно к оси цилиндра и опирается на него своей серединой. На середине линейки сидит жук массой $0{,}2M$, который начинает медленно ползти к одному из концов линейки, прочно цепляясь за её шероховатости; линейка при этом меняет угол своего

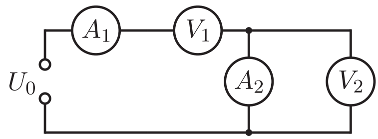


наклона к горизонту, перекатываясь по цилиндру без проскальзывания. На каком расстоянии $x_0$ от середины линейки будет расположена точка соприкосновения линейки и цилиндра, когда жук доползёт до конца линейки? Под каким углом $\alpha_0$ к горизонту будет при этом наклонена линейка? При каких значениях коэффициента трения $\mu$ между цилиндром и линейкой возможно такое её перекатывание без проскальзывания?

**Решение.** Когда жук доползёт до конца линейки (см. рисунок), условие её равновесия, в соответствии с правилом рычага, можно записать в виде: $Mgx_0 = 0{,}2Mg((l/2) - x_0)$. Отсюда $x_0 = l/12 = \pi R/6$.

Если $\alpha$ — угол между линейкой и горизонтом в момент, когда расстояние от точки соприкосновения линейки и цилиндра до центра линейки равно $x$, то при повороте линейки на угол $\Delta\alpha$ изменение $x$ равно $\Delta x = R\Delta\alpha$. Следовательно, когда жук доползёт до конца линейки, она повернётся на угол $\alpha_0 = x_0/R = \pi/6$.

Действующая на линейку со стороны цилиндра сила реакции опоры направлена вертикально, то есть под углом $\alpha$ к нормали к поверхности в точке соприкосновения линейки и цилиндра. Следовательно, отношение силы трения покоя $F_{\text{тр}}$ к нормальной составляющей $N$ силы реакции опоры равно $F_{\text{тр}}/N = \operatorname{tg}\alpha$. Поскольку максимальная величина силы трения покоя равна $F_{\text{тр}} = \mu N$, перекатывание линейки по цилиндру будет происходить без проскальзывания при значениях коэффициента трения между цилиндром и линейкой, удовлетворяющих неравенству: $\mu > \operatorname{tg}\alpha_{\max} = \operatorname{tg}\alpha_0 = \operatorname{tg}(\pi/6)$, то есть $\mu > 1/\sqrt{3} \approx 0{,}58$.




**3.** Электрическая цепь, изображённая на рисунке, состоит из идеальной батарейки, двух одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров. Показание миллиамперметра $A_1$ равно $I_1 = 1{,}6$ мА, показания вольтметров равны $U = 1{,}2$ В и $U' = 0{,}3$ В. Какой из вольтметров — $V_1$ или $V_2$ — показывает меньшее значение напряжения? Найдите показание $I_2$ миллиамперметра $A_2$ и напряжение батарейки $U_0$.

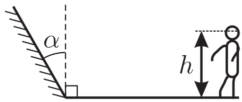
**Решение.** Сила тока, текущего через вольтметр $V_1$, больше силы тока, текущего через вольтметр $V_2$, следовательно, показание вольтметра $V_1$ больше показания вольтметра $V_2$. При этом сила тока, текущего через вольтметр $V_2$, меньше силы тока, текущего через вольтметр $V_1$, в $U/U' = 4$ раза и составляет $I_1U'/U = I_1/4 = 0{,}4$ мА.

Поэтому сила тока, текущего через миллиамперметр $A_2$, равна $I_2 = I_1 - (I_1U'/U) = I_1 - (I_1/4) = 3I_1/4 = 1{,}2$ мА.

Поскольку сила тока, текущего через миллиамперметр $A_1$, в $I_1/I_2 = U/(U - U') = 4/3$ раза больше силы тока, текущего через миллиамперметр $A_2$, то напряжение на миллиамперметре $A_1$ должно быть в такое же количество раз больше напряжения на миллиамперметре $A_2$ (последнее равно $U' = 0{,}3$ В). Следовательно, напряжение на миллиамперметре $A_1$ составляет $U'I_1/I_2 = UU'/(U - U') = 0{,}4$ В. Поэтому напряжение батарейки равно

$$U_0 = \frac{UU'}{U - U'} + U + U' = 0{,}4\ \text{В} + 1{,}2\ \text{В} + 0{,}3\ \text{В} = 1{,}9\ \text{В}.$$

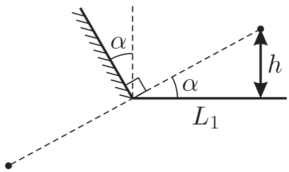
**4.** Длинное наклонное зеркало соприкасается с горизонтальным полом и наклонено под углом $\alpha$ к вертикали (см. рисунок). К зеркалу приближается школьник, глаза которого расположены на высоте $h$ от уровня земли. На каком максимальном расстоянии от нижнего края зеркала школьник увидит:



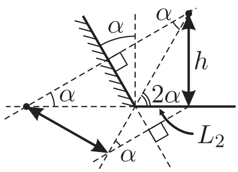

а) изображение своих глаз?

б) своё изображение полностью, во весь рост?

**Решение.** а) Школьник начнёт видеть изображение своего глаза тогда, когда прямая, соединяющая глаз и его изображение, пройдёт через зеркало. Это произойдёт в момент, когда расстояние от школьника до зеркала $L_1$ будет таким, что $h/L_1 = \operatorname{tg}\alpha$. Отсюда $L_1 = h/\operatorname{tg}\alpha$.




б) Пусть $\alpha < 45°$. Тогда школьник увидит своё изображение в зеркале полностью, во весь рост, в момент, когда прямая, соединяющая глаза школьника и изображение его ног, пройдёт через зеркало. Как вытекает из построения, это произойдёт, когда расстояние $L_2$ от школьника до зеркала будет таким, что $h/L_2 = \operatorname{tg}(2\alpha)$. Отсюда $L_2 = h/\operatorname{tg}(2\alpha)$.




При $\alpha > 45°$ школьник сможет увидеть своё изображение в зеркале полностью, во весь рост, только подойдя к нижнему краю зеркала вплотную.

## 10 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

**1.** Школьник бросает мяч в баскетбольное кольцо. Чтобы попасть в цель при броске под углом $\alpha_1 = 30^\circ$ к горизонту, он должен сообщить мячу начальную скорость $v_1 = v$, а при броске под углом $\alpha_2 = 60^\circ$ — начальную скорость $v_2 = v/2$. На какой высоте $h$ над точкой бросания расположено баскетбольное кольцо? Под каким углом $\beta$ к горизонту наклонён отрезок, соединяющий точку бросания и кольцо? Бросок каждый раз производится из одной и той же точки. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g$.

**Решение.**Введём систему координат, направив ось $OX$ горизонтально по направлению к кольцу, а ось $OY$ — вертикально вверх. Совместим начало координат с точкой бросания. Если в качестве начала отсчёта времени выбрать момент броска, то закон движения мяча, брошенного с начальной скоростью $v_0$ под углом $\alpha$ к горизонту, запишется следующим образом: $x = (v_0 \cos\alpha) \cdot t$ и $y = (v_0 \sin\alpha) \cdot t - (gt^2/2)$. Следовательно, траектория движения тела задаётся уравнением

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Пусть $(L, h)$ — координаты кольца; получаем систему уравнений:

$$h = L \operatorname{tg}\alpha_1 - \frac{gL^2}{2v_1^2 \cos^2\alpha_1}; \quad h = L \operatorname{tg}\alpha_2 - \frac{gL^2}{2v_2^2 \cos^2\alpha_2}.$$

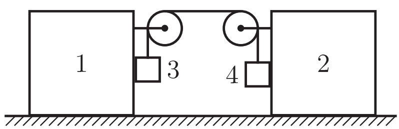
Учитывая данные из условия задачи, приводим систему к виду:

$$h = L\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2gL^2}{3v^2}; \quad h = L\sqrt{3} - \frac{8gL^2}{v^2}.$$

Приравнивая эти два соотношения для $h$, находим координату $L$: $L = (\sqrt{3}/11)v^2/g$.

Отсюда $h = (9/121)v^2/g$, и $\beta = \operatorname{arctg}(h/L) = \operatorname{arctg}(3\sqrt{3}/11) \approx 25^\circ$.

**2.** Найдите ускорения грузов 1 и 2 и силу натяжения нити в системе, изображённой на рисунке. Массы грузов 1, 2, 3 и 4 равны соответственно $M_1$, $M_2$, $m_1$ и $m_2$. Грузы 3 и 4 касаются грузов 1 и 2, участки



нити, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны. Нить натянута, невесома и нерастяжима, блоки лёгкие, трение отсутствует.

**Решение.** Направим ось $OX$ вправо по горизонтали, а ось $OY$ — вертикально вверх. Обозначим через $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ и $\vec{a}_4$ ускорения грузов 1, 2, 3 и 4 соответственно. Отметим, что ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ направлены горизонтально, а горизонтальные компоненты ускорений $\vec{a}_3$ и $\vec{a}_4$ совпадают с ускорениями $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$: $a_{3x} = a_{1x}$, $a_{4x} = a_{2x}$.

Используя свойство нерастяжимости, то есть постоянства длины нити, получим уравнение кинематической связи. При смещении грузов 1 и 2 по горизонтали на $\Delta x_1$ и $\Delta x_2$ изменение длины нити равно $\Delta x_2 - \Delta x_1$; при смещении грузов 3 и 4 по вертикали на $\Delta y_3$ и $\Delta y_4$ изменение длины нити равно $-\Delta y_3 - \Delta y_4$. Ввиду нерастяжимости нити, полное изменение её длины при одновременном смещении всех четырёх грузов равно нулю: $\Delta x_2 - \Delta x_1 - \Delta y_3 - \Delta y_4 = 0$. Отсюда следует уравнение кинематической связи: $a_{2x} - a_{1x} - a_{3y} - a_{4y} = 0$.

Для получения остальных уравнений обозначим через $T$ силу натяжения нити. Запишем для третьего и четвёртого грузов уравнения движения по вертикали (по оси $OY$):

$$m_1 a_{3y} = T - m_1 g, \quad m_2 a_{4y} = T - m_2 g.$$

Далее, запишем уравнения движения по горизонтали (по оси $OX$) для системы грузов 1 и 3, а также для системы грузов 2 и 4:

$$(M_1 + m_1)a_{1x} = T, \quad (M_2 + m_2)a_{2x} = -T.$$

Из полученных соотношений выразим все ускорения через силу натяжения нити $T$:

$$a_{3y} = -g + \frac{T}{m_1}; \quad a_{4y} = -g + \frac{T}{m_2};$$

$$a_{1x} = \frac{T}{M_1 + m_1}; \quad a_{2x} = -\frac{T}{M_2 + m_2}.$$

Подставим их в уравнение кинематической связи и получим уравнение для нахождения $T$:

$$-\frac{T}{M_2 + m_2} - \frac{T}{M_1 + m_1} + \left(g - \frac{T}{m_1}\right) + \left(g - \frac{T}{m_2}\right) = 0.$$

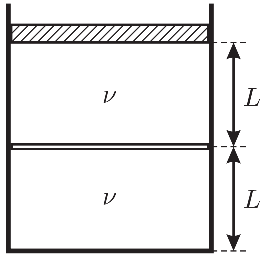
Отсюда

$$T = \frac{2g}{\dfrac{1}{M_1 + m_1} + \dfrac{1}{M_2 + m_2} + \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}}.$$

Таким образом, искомые ускорения равны

$$a_{1x} = \frac{2g}{(M_1+m_1)}\left(\frac{1}{M_1+m_1}+\frac{1}{M_2+m_2}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^{-1},$$

$$a_{2x} = \frac{2g}{(M_2+m_2)}\left(\frac{1}{M_1+m_1}+\frac{1}{M_2+m_2}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^{-1}.$$



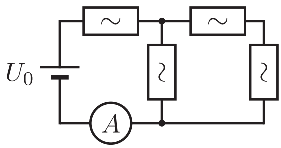

**3.** На столе стоит вертикальный теплоизолированный цилиндрический сосуд. В него вставлены два поршня (см. рисунок). Верхний поршень — тяжёлый, теплонепроницаемый и может двигаться в цилиндре без трения. Нижний поршень — лёгкий и теплопроводящий, но между ним и стенками сосуда существует трение. В каждой из частей сосуда находится по $\nu$ молей идеального одноатомного газа. Вначале система находилась в тепловом равновесии, а обе части сосуда имели высоту $L$. Потом систему медленно нагрели, сообщив ей количество теплоты $\Delta Q$. На какую величину $\Delta T$ изменилась температура газов, если нижний поршень при этом не сдвинулся с места? При каком наименьшем значении $F$ силы трения между нижним поршнем и стенками это возможно? Какова теплоёмкость $C$ системы в этом процессе? Теплоёмкостью стенок сосуда и поршней пренебречь.

**Решение.** Обозначим через $V_1 = SL$ объём нижней части цилиндра, $S$ — площадь поршней, $p_0$ — давление в верхней части цилиндра, $\Delta V_2$ — изменение объёма верхней части цилиндра.

Сообщённое системе количество теплоты $\Delta Q$ идёт на изменение внутренней энергии всего газа в сосуде $\Delta U = 2\nu\cdot(3/2)R\Delta T$ и на совершение работы $\Delta A = p_0\Delta V_2 = \nu R\Delta T$. Следовательно, $\Delta Q = \Delta U + \Delta A = 4\nu R\Delta T$, и $\Delta T = \Delta Q/(4\nu R)$. Теплоёмкость $C$ системы в этом процессе равна отношению сообщённого ей количества теплоты к изменению температуры: $C = \Delta Q/\Delta T = 4\nu R$.

Поскольку объём нижней части сосуда постоянен, изменение давления $\Delta p$ в нижней части сосуда определяется из соотношения $\Delta p V_1 = \nu R\Delta T$, и $\Delta p = \nu R\Delta T/V_1 = \Delta Q/(4V_1)$. Так как давление в верхней части сосуда постоянно и равно $p_0$, а в нижней части сосуда давление вначале также было равно $p_0$, то в конце нагрева разность давлений, оказываемых газами на поршень, станет равной $\Delta p$. Чтобы поршень остался неподвижным, сила трения между ним и стенками сосуда должна быть не меньше $F = \Delta p\cdot S = \Delta Q/(4L)$.

**4.** Электрическая цепь (см. рисунок) состоит из идеальной батарейки с ЭДС $U_0$, идеального амперметра и четырёх одинаковых нелинейных элементов, для каждого из которых, в отличие от закона Ома, связь силы тока $I$ и напряжения $U$ имеет вид $I = \alpha U^2$. Какой ток $I_0$ показывает амперметр?




**Решение.** Пронумеруем нелинейные элементы так, как показано на рисунке. Пусть $U_2$ — напряжение на нелинейном элементе 2, тогда на каждом из последовательно соединённых элементов 3 и 4 падает напряжение $U_2/2$. Следовательно, сила тока, текущего через элемент 2, равна $I_2 = \alpha U_2^2$, а ток, текущий через элементы 3 и 4, равен $I_3 = \alpha U_2^2/4$. Поэтому сила тока, текущего через амперметр, батарейку и элемент 1, равна $I_0 = I_2 + I_3 = 5\alpha U_2^2/4$. Напряжение на элементе 1 определяется из соотношения $I_0 = \alpha U_1^2$, откуда $U_1 = \sqrt{I_0/\alpha} = (\sqrt{5}/2)U_2$. Таким образом, напряжение на батарейке равно $U_0 = U_1 + U_2 = \left(1 + \left(\sqrt{5}/2\right)\right) U_2$, откуда $U_2 = U_0/(1 + (\sqrt{5}/2))$, и

$$I_0 = \alpha U_0^2 \frac{5/4}{(1+(\sqrt{5}/2))^2} = \frac{5\alpha U_0^2}{9+4\sqrt{5}} = 5\alpha U_0^2(9 - 4\sqrt{5}).$$

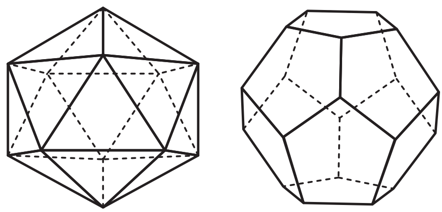
**5.** Тридцать одинаковых резисторов сопротивлением $R$ каждый соединены между собой в пространстве так, что они являются рёбрами выпуклого правильного многогранника:

в случае а) — двадцатигранника (икосаэдра);

в случае б) — двенадцатигранника (додекаэдра).

Какое сопротивление будет представлять описанная выше система (а) или (б), если подключиться к паре её наиболее удалённых вершин? Сколько разных значений сопротивления можно получить в случае (а) и в случае (б), если подключаться к всевозможным парам вершин этих многогранников?

*Справка:* грани икосаэдра — 20 правильных треугольников, в каждой из 12 вершин сходятся по 5 треугольников; грани додекаэдра — 12 правильных пятиугольников, в каждой из 20 вершин сходятся по 3 пятиугольника (см. рисунки).



**Решение.** (а) Из произвольной вершины икосаэдра выходят пять рёбер, заканчивающихся в пяти вершинах, образующих правильный пятиугольник и соединённых пятью рёбрами-перемычками. Назовём этот пятиугольник ближайшим к исходной вершине слоем. Затем следующими по удалённости от исходной вершины идут пять вершин с пятью перемычками, также образующие правильный пятиугольник, равный предыдущему и лежащий в следующем слое, параллельном первому. Из каждой вершины первого слоя выходят, а в каждую вершину второго слоя входят по два ребра, соединяющих первый слой со вторым — всего десять рёбер. И, наконец, самая дальняя вершина, равноудалённая от пяти вершин второго слоя, соединена с ними пятью рёбрами. Общую систему вершин икосаэдра, таким образом, можно представить в виде двух правильных пятиугольных пирамид, телесные высоты которых лежат на общей прямой, а основания параллельны и повёрнуты друг относительно друга на угол $36^\circ$. Поэтому при подключении контактов источника питания к паре наиболее удалённых вершин пять вершин первого слоя будут электрически эквивалентны, то есть будут иметь одинаковый потенциал, и их можно накоротко соединить друг с другом. Пять вершин второго слоя также будут иметь одинаковый потенциал, отличный от потенциала вершин первого слоя, и их также можно закоротить. Таким образом, эквивалентная схема в этом случае состоит из пяти соединённых параллельно резисторов, к которым присоединено последовательно сначала десять параллельных резисторов (из рёбер-резисторов икосаэдра, соединяющих два слоя), а потом ещё пять параллельных резисторов. Поэтому искомое сопротивление будет равно

$$R_{\text{общ.}} = \frac{R}{5} + \frac{R}{10} + \frac{R}{5} = \frac{R}{2}.$$

(б) Рассмотрим в этом же ключе додекаэдр и стартуем от какой-нибудь его вершины, подключив к ней один из контактов источника питания. Ближайшими соседями этой вершины окажутся три вершины первого эквипотенциального слоя, с которыми она связана напрямую тремя выходящими из неё рёбрами. Из каждой вершины этого слоя выходят по два ребра (всего в каждой вершине соединяются три ребра), попадающих в шесть вершин следующего (второго) эквипотенциального слоя. Дальше из этих шести вершин выходят двенадцать рёбер, при этом шесть идут к следующему (третьему) слою, состоящему опять-таки из шести вершин, а другие шесть рёбер замыкаются парами, образуя три перемычки между предыдущими шестью эквипотенциальными вершинами второго слоя. Из каждой вершины третьего слоя выходят по два ребра, из них одно замыкается парой с ребром от соседней вершины этого слоя, а второе идёт к одной из трёх вершин следующего (четвёртого) слоя, к каждой из которых приходят по два ребра из вершин третьего слоя. Из трёх вершин четвёртого слоя выходят три оставшихся ребра, которые встречаются в последней из 20 вершин — той наиболее удалённой, к которой подключается второй контакт источника. Таким образом, из-за условий геометрической и физической симметрии наша цепь будет эквивалентна последовательному соединению пяти пучков параллельно соединённых резисторов: сначала трёх, потом шести, затем снова шести (из-за исключённых шести перемычек), потом опять шести, и, наконец, трёх. Отсюда получаем, что искомое сопротивление будет равно

$$R_{\text{общ.}} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{6} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{7}{6}R.$$

Для ответа на второй вопрос надо подсчитать, через какое минимальное количество рёбер соединяются наиболее удалённые вершины многогранников. В случае (а) это, очевидно, три, и в силу симметрии возможно не более 3 разных значений сопротивления между вершинами: между соседними вершинами, через одну и через две (то есть как раз между наиболее удалёнными вершинами). В случае (б) это пять, и возможно не более 5 разных значений сопротивления между вершинами: между соседними вершинами, через одну, две, три и четыре[2].

## 11 класс

На выполнение задания отводилось 5 астрономических часов.

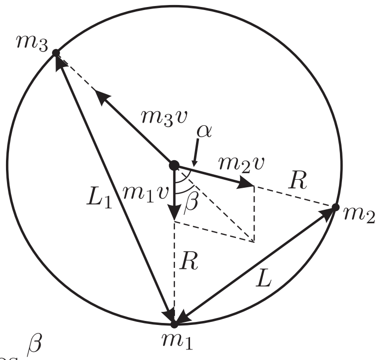
**1.** Снаряд, летевший вертикально, взорвался в верхней точке своей траектории, распавшись на три осколка массами $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$ и $m_3 = 4m$, которые полетели в разные стороны с одинаковыми начальными скоростями. Через некоторое время после взрыва расстояние между осколками $m_1$ и $m_2$ оказалось равным $L$. Чему было равно в этот момент расстояние между осколками $m_1$ и $m_3$, если ни один из осколков ещё не достиг земли? Влиянием воздуха и массой взрывчатого вещества снаряда пренебречь.

**Решение.** Из закона сохранения импульса следует, что начальные скорости осколков лежат в одной плоскости. Перейдём в систему

[2] На самом деле, в случае (а) имеется ровно три различных значения сопротивления между вершинами, а в случае (б) — пять, но, формально говоря, необходимо это доказать!

отсчёта, падающую на землю с ускорением свободного падения $g$. В этой системе отсчёта осколки после взрыва движутся в разные стороны равномерно и прямолинейно с одинаковыми скоростями, равными начальной скорости, приобретённой в результате взрыва. Следовательно, в рассматриваемой системе отсчёта все осколки после взрыва снаряда в любой момент времени располагаются на окружности с центром в точке взрыва.

Изобразим эту окружность на рисунке, обозначив угол между направлениями разлёта осколков $m_1$ и $m_2$ через $\alpha$, а угол между направлениями разлёта осколков $m_1$ и $m_3$ через $(\pi - \beta)$. Рассмотрим положения осколков в момент времени, когда расстояние между осколками $m_1$ и $m_2$ оказалось равны $L$. Тогда из рисунка следует, что




$$L = 2R\sin\frac{\alpha}{2}, \quad L_1 = 2R\sin\frac{\pi-\beta}{2} = 2R\cos\frac{\beta}{2},$$

где $R$ — радиус изображённой окружности, $L_1$ — искомое расстояние.

Поскольку, как уже говорилось, импульс рассматриваемой системы в процессе разрыва снаряда на осколки сохраняется неизменным, то из теоремы косинусов, применённой к треугольнику, построенному из векторов импульсов осколков, следует:

$$(m_3v)^2 = (m_1v)^2 + (m_2v)^2 - 2m_1m_2v^2\cos(\pi - \alpha),$$

где $v$ — начальная скорость осколков. Отсюда, с учётом заданных соотношений между $m_1$, $m_2$ и $m_3$, находим: $\cos\alpha = (m_3^2 - m_1^2 - m_2^2)/(2m_1m_2) = 1/4$, то есть угол разлёта осколков $m_1$ и $m_2$ составляет $\alpha \approx 75{,}5°$. Из теоремы синусов, применённой к тому же треугольнику, получаем: $m_2v/\sin\beta = m_3v/\sin(\pi-\alpha)$, откуда $\sin\beta = (m_2/m_3)\sin\alpha = (m_2/m_3)\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 3\sqrt{15}/16$ и $\cos\beta = 11/16$. Используя тригонометрические формулы для половинного угла, найдём:

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\beta)} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{L^2}{2R^2} = \frac{1}{4},$$

откуда $R = \sqrt{2/3}L$. Подставляя эти выражения в формулу для $L_1$, получим ответ: $L_1 = (3/2)L$.

**2.** Велосипедное колесо, вся масса которого сосредоточена в его ободе, раскрутили вокруг оси, удерживая её неподвижной в горизонтальном положении. При этом пришлось совершить работу $A$, и вся эта работа пошла на увеличение механической энергии колёса. Затем колесо осторожно поставили на горизонтальную поверхность доски такой же массы, которая может без трения двигаться по столу. Какое максимальное количество теплоты может выделиться в системе, пока колесо не покинет доску? Колесо при движении всё время остаётся в вертикальной плоскости.

**Решение.** Пока колесо движется относительно доски с проскальзыванием, на него со стороны доски действует сила трения, увеличивающая скорость поступательного движения колеса и уменьшающая угловую скорость его вращательного движения. Доска при этом разгоняется в противоположном направлении. Когда скорость доски сравняется со скоростью точки колеса, соприкасающейся с доской, колесо начнёт катиться по доске без проскальзывания, сила трения скольжения перестанет действовать в системе, и скорости тел изменяться перестанут, если пренебречь трением качения.

Обозначим через $m$ массу колеса, совпадающую с массой доски, $R$ — радиус колеса, $u$ — скорость поступательного движения колеса, совпадающую по модулю и противоположную по направлению скорости доски, $\omega$ — угловую скорость вращения колеса, $\mu$ — коэффициент трения скольжения. Заметим, что $A = m\omega_0^2 R^2/2$, где $\omega_0$ — начальная угловая скорость колеса.

Поскольку действующая между колесом и доской сила трения скольжения равна $\mu mg$, а их массы одинаковы, уравнения поступательного движения для колеса и для доски запишутся также одинаковым образом: $m\,\Delta u/\Delta t = \mu mg$, или $\Delta u/\Delta t = \mu g$; следовательно, центр колеса и доска движутся с ускорениями, равными по величине $\mu g$ и противоположными по направлению.

Для расчёта зависимости угловой скорости вращения колеса от времени заметим, что изменение $\Delta E$ кинетической энергии системы за время $\Delta t$, равное

$$\Delta E = \Delta\left(\frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + \frac{m\omega^2 R^2}{2}\right) = 2mu\Delta u + mR^2\omega\Delta\omega,$$

совпадает с работой силы трения $\Delta A_{\text{тр}}$ за этот промежуток времени. Данная работа отрицательна и равна по модулю произведению величины силы трения $\mu mg$ на величину относительной скорости соприкасающихся участков тел $\omega R - 2u$ и на промежуток времени $\Delta t$, то есть

$\Delta A_{\text{тр}} = -\mu mg(\omega R - 2u)\Delta t$. Таким образом, справедливо уравнение:

$$2mu\Delta u + mR^2\omega\Delta\omega = -\mu mg(\omega R - 2u)\Delta t,$$

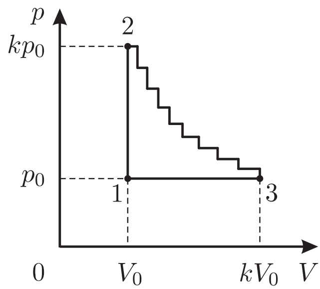
из которого, с учётом выражения для $\Delta u/\Delta t$, получаем уравнение для угловой скорости колеса: $\Delta\omega/\Delta t = -\mu g/R$.

Из полученных выражений для линейных и угловых ускорений находим законы изменения скоростей поступательного и вращательного движения: $u(t) = \mu gt$ и $\omega(t) = \omega_0 - (\mu gt/R)$. Колесо начнёт двигаться без проскальзывания при условии обращения в нуль относительной скорости нижней точки колеса и доски: $2u = \omega R$, откуда для момента времени, в который это произойдёт, получаем $t_0 = \omega_0 R/(3\mu g)$. В этот момент времени $u = \omega_0 R/3$ и $\omega = 2\omega_0/3$, а кинетическая энергия системы равна

$$E_0 = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + \frac{m\omega^2 R^2}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{m\omega_0^2 R^2}{2} = \frac{2}{3}A.$$

Следовательно, за время $t_0$ в системе выделится количество теплоты, равное $Q = A/3$, если колесо к этому моменту ещё не успеет скатиться с доски.

**3.** Над $\nu$ молями идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, график которого изображён на $pV$–диаграмме. Цикл состоит из вертикального (1–2) и горизонтального (3–1) участков и «лестницы» (2–3) из $n$ ступенек, на каждой из которых давление и объём газа изменяются в одно и то же количество раз. Отношение максимального давления газа к минимальному равно $k$; отношение максимального объёма к минимальному также равно $k$. Найдите КПД тепловой машины, работающей по данному циклу.




**Решение.** Поскольку тепловая машина совершает за цикл положительную работу, рассматриваемый цикл проходится по часовой стрелке, в направлении 1–2–3. Для расчёта КПД этой тепловой машины, равного отношению совершённой работы $A$ к количеству теплоты $Q^+$, полученному от нагревателей, обозначим через $p_0$ и $V_0$ минимальные давление и объём газа; тогда максимальные давление и объём будут равны $kp_0$ и $kV_0$. Заметим, что на горизонтальном участке ступеньки объём возрастает в $k^{1/n}$ раз, а на вертикальном участке давление уменьшается в такое же число раз.

В данном цикле газ получает тепло на участке 1–2, а также на горизонтальных участках лестницы 2–3. Количество теплоты, полученное на участке 1–2, равно изменению внутренней энергии газа: $Q_{12} = (3/2)kp_0V_0 - (3/2)p_0V_0 = (3/2)(k-1)p_0V_0$. Далее, на $i$-м горизонтальном участке лестницы ($i$ изменяется в пределах от 1 до $n$) газ расширяется от объёма $V_0k^{(i-1)/n}$ до $V_0k^{i/n}$ при постоянном давлении $p_0k^{1-((i-1)/n)}$. При этом он совершает работу $\Delta A = kp_0V_0(k^{1/n} - 1)$, изменяет свою внутреннюю энергию на $\Delta U = 1{,}5\Delta A$ и получает количество теплоты $\Delta Q = 2{,}5\Delta A$. На вертикальных участках «лестницы» газ не совершает работы и отдаёт тепло. На участке 3–1 газ отдаёт тепло и совершает отрицательную работу $A_{31} = -(k-1)p_0V_0$.

Следовательно, суммарное количество теплоты, полученное от нагревателей, равно

$$Q^+ = Q_{12} + n\Delta Q = \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0 + \frac{5}{2}nk(k^{1/n} - 1)p_0V_0,$$

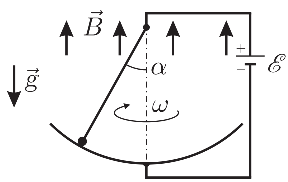
а совершённая работа

$$A = A_{31} + n\Delta A = -(k-1)p_0V_0 + nk(k^{1/n} - 1)p_0V_0.$$

Искомый КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q^+} = \frac{nk\left(k^{1/n} - 1\right) - (k-1)}{\frac{3}{2}(k-1) + \frac{5}{2}nk\left(k^{1/n} - 1\right)}.$$

**4.** На конце невесомого проводящего стержня закреплён маленький металлический шарик, касающийся гладкой проводящей сферической поверхности радиусом $R = 0{,}8$ м. Второй конец стержня закреплён в центре сферы при помощи проводящего шарнира так, что стержень может вращаться без трения вокруг него, сохраняя электрический контакт со сферой. Эта система помещена в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл и подключена к батарее так, как показано на рисунке. Если стержень закрутить вокруг вертикальной оси в определённом направлении с частотой $\omega = 5$ рад/с и под некоторым углом $\alpha$ к вертикали, то этот угол и частота вращения в дальнейшем не будут меняться. Определите угол $\alpha$ и ЭДС батареи. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.



**Решение.** Рассмотрим вначале процессы, которые будут происходить в данной системе, если не сообщать стержню сразу заданную скорость вращения $\omega$ вокруг вертикальной оси под определённым углом ней. При помещении нашей системы в магнитное поле и подключении её к батарее в цепи пойдёт ток. Если отклонить стержень от вертикали, то на него со стороны магнитного поля начнёт действовать сила Ампера, направленная перпендикулярно магнитному полю и стержню и заставляющая стержень раскручиваться вокруг вертикальной оси, проходящей через шарнир. При таком раскручивании стержня в магнитном поле на его концах возникает ЭДС индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}}$. Полярность батареи, направление магнитного поля $\vec{B}$ и соответствующее этим условиям направление вращения стержня показаны на рисунке в условии задачи; в соответствии с правилом Ленца направление $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ противоположно направлению ЭДС батареи $\mathscr{E}$.

При вращении один конец стержня неподвижен, а другой описывает за период времени $T = 2\pi/\omega$ окружность радиуса $R\sin\alpha$ в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$. Площадь окружности $S = \pi(R\sin\alpha)^2$. Тогда

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = \frac{BS}{T} = \frac{B\pi(R\sin\alpha)^2}{2\pi/\omega} = \frac{BR^2\omega\sin^2\alpha}{2}.$$

Поскольку $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ возрастает по мере увеличения частоты $\omega$ вращения стержня и угла $\alpha$ между стержнем и вертикалью, $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ в конце концов сравняется с ЭДС батареи $\mathscr{E}$, ток перестанет протекать через стержень, сила Ампера станет равной нулю, и угол $\alpha$ и частота $\omega$ вращения стержня прекратят изменяться. В результате получится, что стержень движется, как конический маятник длиной $R$, вращающийся с угловой скоростью $\omega$ под углом $\alpha$ к вертикали.

Найдём этот угол $\alpha$. На шарик действуют сила тяжести $mg$ и суммарная сила реакции подвеса и опоры $T$. Поскольку трения нет, то сила реакции опоры направлена, как и сила реакции подвеса, вдоль стержня. Равнодействующая всех сил является центростремительной силой $F_{\text{ц}} = m(R\sin\alpha)\omega^2$, обеспечивающей вращение шарика вокруг оси. Уравнения движения шарика имеют вид:

$$T\sin\alpha = m(R\sin\alpha)\omega^2, \quad mg - T\cos\alpha = 0.$$

Отсюда $\cos\alpha = g/(\omega^2 R)$, и $\alpha = \arccos(g/(\omega^2 R)) = 60^\circ$, а ЭДС батареи равна

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\text{инд}} = \frac{BR^2\omega\sin^2\alpha}{2} = \frac{BR^2\omega}{2}(1-\cos^2\alpha) = \frac{BR^2\omega}{2}\left(1-\frac{g^2}{\omega^4R^2}\right) = 0{,}6\,\text{В}.$$

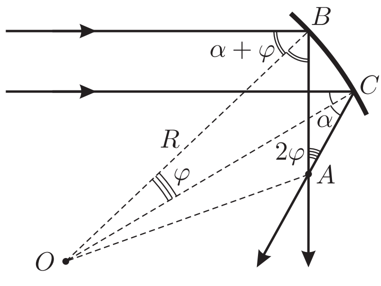
Теперь представим себе, что мы с самого начала закрутили стержень, как показано на рисунке, задав начальные параметры $\omega$, $\alpha = \arccos(g/(\omega^2 R))$ и $\mathscr{E} = (BR^2\omega/2)(1 - (g^2/(\omega^4 R^2))$. Тогда, очевидно, в дальнейшем это вращение и будет происходить с неизменной частотой $\omega$ и под найденным выше постоянным углом $\alpha$ к вертикали.

Заметим, что если закрутить стержень в противоположном направлении, то ЭДС индукции будет складываться с ЭДС батареи, в цепи пойдёт большой ток, сила Ампера быстро затормозит вращение стержня, и он остановится в вертикальном положении.

*Замечание.* У электродвигателей постоянного тока, вращающихся без нагрузки, ток холостого хода очень мал, несмотря на большое напряжение питания и небольшое сопротивление обмотки. Как и в только что разобранной задаче, в обмотке, вращающейся в магнитном поле, возникает «противоЭДС», почти полностью компенсирующая напряжение питания; малый ток через обмотку обеспечивает силу Ампера, необходимую только для преодоления небольших сил трения в двигателе.

**5.** Звуковая волна от удалённого источника падает на стену, имеющую вогнутую цилиндрическую форму, под углом, близким к $\alpha$, причём эта волна идёт перпендикулярно оси цилиндра. Определите, в какую точку $A$ вблизи стены следует поместить чувствительный микрофон, чтобы он зарегистрировал максимально возможную интенсивность звука. Найдите расстояние от этой точки $A$ до стены и до оси цилиндра. Радиус цилиндра $R$ много больше размеров стены, но много меньше расстояния до источника. Длина волны звука много меньше размеров стены.

**Решение.** Из условия следует, что при решении можно пользоваться приближением геометрической оптики и строить ход «лучей», как в оптических задачах. Рассмотрим звуковые волны, падающие на стену в близких точках $B$ и $C$. Поскольку источник звука находится далеко от стены, падающие на неё «лучи» звука вблизи стены идут практически параллельно (смотри рисунок). После отражения вблизи точки $C$ луч распространяется по направлению $CA$; после отражения вблизи точки $B$, где угол падения (то есть угол между направлением распространения падающей волны и нормалью к стене) больше — по направлению $BA$.



Лучи $CA$ и $BA$ пересекаются в точке $A$, где получается «изображение» источника звука. В этой точке колебания складываются, интенсивность звука максимальна — там и должен располагаться микрофон.

Пусть угол падения луча в точке $C$ равен $\alpha$, а в точке $B$ угол падения равен $\alpha + \varphi$; при этом длина дуги $BC$ равна $R\varphi$. Поскольку угол отражения звуковой волны равен углу её падения, то из построения вытекает, что $\angle BAC = 2\varphi$. При малых $\varphi$ из треугольника $ABC$ по теореме синусов получаем, что

$$\frac{|AC|}{\sin((\pi/2) - (\varphi + \alpha))} \approx \frac{|AC|}{\cos\alpha} \approx \frac{|BC|}{\sin(2\varphi)} \approx \frac{R\varphi}{2\varphi} = \frac{R}{2},$$

откуда $|AC| \approx 0{,}5 \cdot R\cos\alpha$. Это расстояние как раз и можно считать расстоянием до стены, поскольку размеры стены намного меньше $R$.

Далее, поскольку $\angle ACO = \alpha$, то расстояние $|OA|$ можно найти из треугольника $OAC$ по теореме косинусов:

$$|OA|^2 = |OC|^2 + |AC|^2 - 2|OC| \cdot |AC| \cos\alpha \approx R^2(1 - (3/4)\cos^2\alpha).$$

Отсюда $|OA| \approx R\sqrt{1 - (3/4)\cos^2\alpha}$.

# Экспериментальный тур

Состоялся 10 марта 2007 года.

Экспериментальный тур проводится начиная с самой первой Московской физической олимпиады (1939 год). До 2003 года включительно именно на экспериментальном туре определялись победители олимпиады.

С 2004 года формальные итоги олимпиады подводятся только по теоретическим турам. На экспериментальный тур, традиция проведения которого сохранилась, приглашаются по итогам теоретических туров московские школьники 9–11 классов. Это даёт возможность этим школьникам лучше подготовиться к участию во Всероссийской олимпиаде по физике, где при подведении итогов в равной степени учитываются результаты как теоретического, так и экспериментального туров.

Экспериментальный тур Московской физической олимпиады состоит из двух экспериментальных работ. На выполнение каждой работы отводится 2 астрономических часа. Школьникам каждого класса (9, 10 и 11) предлагаются одни и те же работы, но разные участники выполняют их в разной последовательности (спустя 2 часа после начала тура школьники сдают отчёт по первой работе и меняются местами с теми, кто выполнял другую работу; тем самым номера работ «1» и «2» в каждом классе являются условными).

Для выполнения каждой работы участнику тура выдаётся краткое описание (именно эти краткие описания и приводятся здесь ниже) и комплект необходимого оборудования (измерительные инструменты, приборы, детали, изучаемый объект). Сотрудники жюри дают разъяснения перед выполнением каждой работы, отвечают на вопросы школьников по ходу её выполнения, устраняют возникающие при этом технические неполадки.

Описания работ являются именно *краткими*. Они дают достаточно полное представление о работе, но не заменяют собой возможности реальной работы с оборудованием, разъяснений, ответов на вопросы и разбора решений после проведения тура. Пользуясь только краткими описаниями, в принципе невозможно *полностью* разобраться в заданиях экспериментальных туров (в отличие от теоретических туров, где вся необходимая информация содержится в тексте условия задачи).

## 9 класс

**9.1. Измерение удельной теплоты плавления сплава (припой — олово и свинец).**

Приборы и приспособления: термометры — электронный и обычный, стаканчики для горячей и холодной воды, кусок припоя (тонкая проволока), спички, шприц без иглы — мерный, миллиметровая бумага, штатив с лапкой.

Задание: экспериментально определить удельную теплоту плавления $\lambda$ (Дж/грамм) выданного образца сплава. Температура плавления сплава 230 °С считается известной; масса 10 см проволоки из сплава составляет 1,35 г.

**9.2. Измерение сопротивлений резисторов, включённых в электрическую цепь.**

Приборы и приспособления: батарейка плоская, провода, универсальный измерительный прибор («тестер» цифровой), потенциометр 1 кОм (это резистор сопротивления 1 кОм, у него сделаны три вывода — от концов резистора и от подвижного контакта, при повороте рукоятки контакт движется и меняются величины сопротивлений между выводом от этого контакта и крайними выводами, оставаясь в сумме равными 1 кОм), колодка с контактами — на колодке припаяны: «чёрный ящик» (в нём находятся полупроводниковый диод, параллельно диоду присоединён резистор $R_1$, последовательно с ними подключён резистор $R_2$), резистор 100 Ом — его сопротивление можно считать точно известным, и такой же диод, как находящийся внутри «чёрного ящика».

Задание: экспериментально определить сумму сопротивлений $(R_1 + R_2)$, а также сопротивление каждого из резисторов $R_1$ и $R_2$.

## 10 класс

### 10.1. Сосуды с газом.

Известно, что в «чёрном ящике» — коробке, прикреплённой к столу, — находятся два соединённых короткой трубкой сосуда. Один из них внутри ящика сообщается с атмосферой, из другого трубка выведена из «чёрного ящика» наружу. Внутри одного из сосудов находится поршень, который может без трения перемещаться вдоль стенок сосуда.

Предлагается нарисовать схему «чёрного ящика» и с помощью выданного оборудования узнать, каковы объёмы $V_1$ и $V_2$ каждого из сосудов в ящике.

Оборудование. 1. Шприц на 20 мл (без иглы), который можно «подключать» к пластиковой трубке и «отключать» от неё. 2. Пластиковая трубка с затычкой, предназначенная для изготовления манометра. Затычку можно вставлять в трубку и вынимать из неё. 3. Зелёная жидкость (в баночке), предназначенная для изготовления манометра. 4. Зажим, позволяющий пережимать трубку. 5. Тройник и резиновые муфты. 6. «Чёрный ящик» с выходящей из него трубкой. 7. Измерительная лента с делениями 1 мм, прикреплённая к столу. 8. Кусочки прозрачной липкой ленты (для крепления манометра к столу).

### 10.2. Электрический «чёрный ящик».

В «чёрном ящике» с двумя выводами находятся последовательно соединённые резистор и нелинейный элемент (в отличие от обычного резистора, для нелинейного элемента график зависимости между током через него и напряжением на нём получается криволинейным).

Приборы и приспособления: колодка с подключённым к ней «чёрным ящиком», вольтметр 6 Вольт, миллиамперметр 5/50 мА, батарейка плоская, потенциометр 470 Ом (или 1 кОм), провода.

Задание: построить график зависимости силы тока от напряжения для «чёрного ящика». Определить — в каких пределах может находиться величина сопротивления резистора, находящегося в «чёрном ящике».

# 11 класс

## 11.1. Определение параметров линзы.

В коробочке с двумя отверстиями находится часть плоско-выпуклой линзы. Не разбирая коробочку, определите параметры этой линзы: её фокусное расстояние $F$ и расстояние $L$ от главной оптической оси до метки (крестика) на плоской поверхности линзы.

Оборудование: коробочка с частью линзы, источник света — лазерная указка, миллиметровая бумага, липкая лента.

**Внимание!!** ***Запрещается направлять луч лазера на соседей и в свои глаза!!!*** Не держите лазер включённым длительное время (батарейки садятся!)

## 11.2. Измерения магнитного поля.

Измерение магнитной индукции часто производят с помощью датчиков, основанных на *эффекте Холла* — магнитное поле действует на движущиеся заряды с «поперечной» силой, вызывая появление электрического поля, которое перпендикулярно направлению движения заряженных частиц. Измеряя «поперечную» разность потенциалов, мы можем определить величину магнитной индукции $B$. В нашем опыте датчик представляет собой тонкую пластинку из полупроводника с примесью, которая обеспечивает проводимость $n$−типа (электронную), по ней пропускают ток (батарейка подключается к выводам белого цвета), электронным вольтметром измеряют разность потенциалов между другой парой выводов (короткие, полупрозрачные). Для используемого датчика: полупроводниковый образец имеет форму тонкой квадратной пластинки, 1 мм $\times$ 1 мм $\times$ 0,05 мм. Ток течёт вдоль длинной стороны, проводимость примесная, заряды-носители — электроны (заряд электрона $q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл), концентрация носителей $n = 1{,}3 \cdot 10^{21}$ м$^{-3}$. Датчик закреплён на керамической пластине толщиной 0,05 мм.

Оборудование: батарейка плоская, универсальный измерительный прибор (цифровой «тестер»), датчик Холла с выводами, 2 цилиндрических магнита (маленькие, блестящие, легко теряются), декоративный магнит «бабочка», миллиметровка, листы бумаги одинаковой толщины.

Задание: измерить величину магнитной индукции у торца цилиндрического магнита, измерить отношение максимальных величин магнитных полей «бабочки» и цилиндрического магнита, сделать более точную оценку магнитной индукции цилиндрического магнита непосредственно у его поверхности. Старайтесь во всех случаях измерять именно максимальное значение магнитной индукции — поля в разных местах у торца магнита заметно отличаются друг от друга.

# Оглавление