Департамент образования города Москвы
Совет ректоров высших учебных заведений Москвы и Московской области
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXVIII

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

(МОСКОВСКАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ)

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва — 2005

Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу

119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11,
Московская математическая олимпиада

или по адресу электронной почты mmo@mccme.ru
или по телефону 241 12 37.

Сборник подготовили

А. В. Акопян, В. Д. Арнольд, М. А. Берштейн, А. Д. Блинков, И. И. Богданов, П. А. Бородин, Е. Ю. Бунькова, Д. Н. Вельтищев, М. Н. Вельтищев, А. И. Галочкин, Т. И. Голенищева-Кутузова, Е. С. Горская, Е. А. Горский, Г. Г. Гусев, А. А. Заславский, А. Я. Канель-Белов, Е. В. Корицкая, О. Н. Косухин, Ю. Г. Кудряшов, А. К. Кулыгин, М. В. Мазин, М. А. Макаров, С. В. Маркелов, Г. А. Мерзон, П. И. Митричев, Д. В. Мусатов, Д. А. Пермяков, И. Н. Сергеев, А. Б. Скопенков, С. В. Спиридонов, А. В. Устинов, Б. Р. Френкин, А. В. Хачатурян, И. А. Шейпак, И. В. Ященко

под общей редакцией

В. М. Тихомирова.

Рисунки выполнили

Д. Н. Вельтищев, М. Н. Вельтищев, В. Ю. Радионов.

Проведение олимпиады и издание осуществлены при поддержке Департамента образования г. Москвы, Московского института открытого образования, корпорации «Boeing», Научно-методического центра «Школа нового поколения», фирмы «НИКС».

LXVIII Московская математическая олимпиада.
Задачи и решения.

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано в печать 9/III 2005 года.
Формат бумаги $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Объём 1,75 печ. л. Печать офсетная.
Гарнитура Computer Modern. Тираж 3000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6 КЛАСС

1. Таракан Валентин объявил, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Ему не поверили, и правильно: на самом деле Валентин всё перепутал и думал, что в метре 60 сантиметров, а в минуте 100 секунд. С какой скоростью (в «нормальных» м/мин) бегает таракан Валентин?

(*А. Хачатурян*)

2.

На автобусе ездил Андрей На кружок и обратно домой, Заплатив 115 рублей, Покупал он себе проездной.	А в иной день кондуктор с него Брал 11 только рублей. Возвращаясь с кружка своего Всякий раз шёл пешком наш Андрей.
В январе он его не достал, И поэтому несколько дней У шофёра билет покупал Он себе за 15 рублей.	За январь сколько денег ушло, Посчитал бережливый Андрей: С удивлением он получил Аккурат 115 рублей!

Сосчитайте теперь поскорей,
Сколько раз был кружок в январе?

(*А. Блинков, Д. и М. Вельтищевы*)

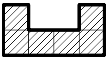
3. Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки; кому какая достанется — определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят её уравнять их кучки, и тогда она заберёт излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты.

а) Придумайте, как Лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 80 конфет (ни больше, ни меньше).

б) Может ли Лиса сделать так, чтобы в итоге съесть ровно 65 конфет?

(*И. Раскина*)

4. Незнайка разместил без наложений в квадрате 10×10 только 13 фигур («скобок»), изображённых на рисунке. Попробуйте разместить больше. (*А. Хачатурян*)

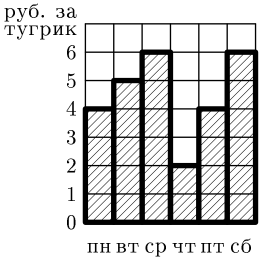


5. В числах МИХАЙЛО и ЛОМОНОСОВ каждая буква обозначает цифру (разным буквам соответствуют разные цифры). Известно, что у этих чисел произведения цифр равны. Могут ли оба числа быть нечётными? (*А. Хачатурян*)

6. В Пустоземье живут три племени: эльфы, гоблины и хоббиты. Эльф всегда говорит только правду, гоблин всегда лжёт, а хоббит через раз говорит то правду, то ложь. Однажды за круглым столом пировало несколько пустоземцев, и один из них сказал, указав на своего левого соседа: «Он — хоббит». Сосед сказал: «Мой правый сосед солгал». В точности ту же фразу затем повторил его левый сосед, потом её же произнёс следующий по кругу, и так они говорили «Мой правый сосед солгал» много-много кругов, да и сейчас ещё, возможно, говорят. Определите, из каких племён были пирующие, если известно, что за столом сидело а) девять; б) десять жителей Пустоземья.

Объясните своё решение. (*А. Заславский, А. Хачатурян*)

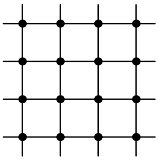
7 КЛАСС



1. На рисунке изображено, как изменялся курс тугрика в течение недели. У Пети было 30 рублей. В один из дней недели он обменял все свои рубли на тугрики. Потом он обменял все тугрики на рубли. Затем он ещё раз обменял все вырученные рубли на тугрики, и в конце концов, обменял все тугрики обратно на рубли.

Напишите, в какие дни он совершал эти операции, если в воскресенье у него оказалось 54 рубля. (Достаточно привести пример.) (*И. Ященко*)

2. Можно ли расставить числа а) от 1 до 7; б) от 1 до 9 по кругу так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей? (*С. Токарев, А. Спивак*)



3. Зачеркните все шестнадцать точек, изображённых на рисунке, шестью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя отрезков по линиям сетки. (*А. Спивак*)

4. Бумага расчерчена на клеточки со стороной 1. Ваня вырезал из неё по клеточкам прямоугольник и нашёл его площадь и периметр. Таня отобрала у него ножницы и со словами «Смотри, фокус!» вырезала с краю прямоугольника по клеточкам квадратик, квадратик выкинула и объявила: «Теперь у оставшейся фигуры периметр такой же, какая была площадь прямоугольника, а площадь — как был периметр!» Ваня убедился, что Таня права.

а) Квадратик какого размера вырезала и выкинула Таня?

б) Приведите пример такого прямоугольника и такого квадрата.

в) Прямоугольник каких размеров вырезал Ваня? (*А. Хачатурян*)

5. Решите ребус $250 \cdot \text{ЛЕТ} + \text{МГУ} = 2005 \cdot \text{ГОД}$. (Разными буквами обозначены разные цифры, а одинаковыми — одинаковые; при этом некоторыми буквами могут быть обозначены уже имеющиеся цифры 2, 5 и 0.)

а) Найдите хотя бы одно решение ребуса;

б) Докажите, что других решений нет. (*Д. и М. Вельтищевы*)

6. На острове Невезения с населением 96 человек правительство решило провести пять реформ. Каждой реформой недовольна ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое максимальное число людей правительство может ожидать на митинге? (Приведите пример и докажите, что больше нельзя.) (*Е. Корицкая*)

8 КЛАСС

1. Найти хотя бы одно целочисленное решение уравнения

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = 2005.$$

(*по мотивам И. Ященко*)

2. Клетчатый бумажный квадрат 8×8 согнули несколько раз по линиям клеток так, что получился квадратик 1×1. Его разрезали по отрезку, соединяющему середины двух противоположных сторон квадратика. На сколько частей мог при этом распасться квадрат?

(*С. Зайцев*)

3. Высоты AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X и Y — середины отрезков AB и CH соответственно. Доказать, что прямые XY и $A'B'$ перпендикулярны. (*А. Заславский*)

4. По кругу расставлены 2005 натуральных чисел. Доказать, что найдутся два соседних числа такие, что после их выкидывания оставшиеся числа нельзя разбить на две группы с равной суммой.

(*Е. Куликов, С. Токарев*)

5. Разрезать круг на несколько равных частей так, чтобы центр круга не лежал на границе хотя бы одной из них. (*С. Маркелов*)

6. На плоскости даны 2005 точек (никакие три из которых не лежат на одной прямой). Каждые две точки соединены отрезком. Тигр и Осёл играют в следующую игру. Осёл помечает каждый отрезок одной из цифр, а затем Тигр помечает каждую точку одной из цифр. Осёл выигрывает, если найдутся две точки, помеченные той же цифрой, что и соединяющий их отрезок, и проигрывает в противном случае. Доказать, что при правильной игре Осёл выиграет. (*С. Конягин*)

9 КЛАСС

1. Дискриминанты трёх приведённых квадратных трёхчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

(*А. Блинков*)

2. Существует ли 2005 различных натуральных чисел таких, что сумма любых 2004 из них делится на оставшееся число? (*Фольклор*)

3. Окружность ω_1 проходит через центр окружности ω_2. Из точки C, лежащей на ω_1, проведены касательные к ω_2, вторично пересекающие ω_1 в точках A и B. Доказать, что отрезок AB перпендикулярен прямой, проходящей через центры окружностей. (*А. Заславский*)

4. Верно ли, что любой треугольник можно разрезать на 1000 частей, из которых можно сложить квадрат? (*С. Маркелов*)

5. На окружности расставлено n цифр, ни одна из которых не 0. Сеня и Женя переписывают себе в тетрадки $n-1$ цифру, читая их по часовой стрелке. Оказалось, что хотя они начали с разных мест, записанные ими $(n-1)$-значные числа совпали. Докажите, что окружность можно разрезать на несколько дуг так, чтобы записанные на дугах цифры образовывали одинаковые числа. (*А. Канель-Белов*)

6. Дан остроугольный треугольник ABC и точка P, не совпадающая с точкой пересечения его высот. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников PAB, PAC, PBC и ABC, а также окружность, проходящая через проекции точки P на стороны $\triangle ABC$, пересекаются в одной точке. (*А. Заславский*)

10 КЛАСС

1. Существует ли плоский четырёхугольник, у которого тангенсы всех внутренних углов равны? (*А. Заславский*)

2. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс. (*Е. Горский*)

3. На сторонах треугольника ABC вовне построены квадраты ABB_1A_2, BCC_1B_2 и CAA_1C_2. На отрезках A_1A_2 и B_1B_2 также во внешнюю сторону от $\triangle AA_1A_2$ и $\triangle BB_1B_2$ построены квадраты $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Докажите, что $A_3B_4 \parallel AB$. (*А. Хачатурян*)

4. Конструктор состоит из набора прямоугольных параллелепипедов. Все их можно поместить в одну коробку, также имеющую форму прямоугольного параллелепипеда. В бракованном наборе одно из измерений каждого параллелепипеда оказалось меньше стандартного. Всегда ли у коробки, в которую укладывается набор, тоже можно уменьшить одно из измерений (параллелепипеды укладываются в коробку так, что их рёбра параллельны рёбрам коробки)? (*А. Шаповалов*)

5. Дана последовательность $a_n = 1 + 2^n + \ldots + 5^n$. Существуют ли 5 идущих подряд её членов, делящихся на 2005? (*А. Канель-Белов*)

6. В пространстве даны 200 точек. Каждые две из них соединены отрезком, причём отрезки не пересекаются друг с другом. Первый игрок красит каждый отрезок в один из k цветов, затем второй игрок красит в один из тех же цветов каждую точку. Если найдутся две точки и отрезок между ними, окрашенные в один цвет, выигрывает первый игрок, в противном случае второй. Докажите, что первый может гарантировать себе выигрыш, если а) $k = 7$, б) $k = 10$. (*С. Конягин*)

11 КЛАСС

Вариант А

1. Числа a и b таковы, что первое уравнение системы

$$\begin{cases} \sin x + a = bx, \\ \cos x = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение. (*по мотивам Т. Голенищевой-Кутузовой и И. Ященко*)

2. Сумма модулей членов конечной арифметической прогрессии равна 100. Если все её члены увеличить на 1 или все её члены увеличить на 2, то в обоих случаях сумма модулей членов полученной прогрессии будет также равна 100. Какие значения при этих условиях может принимать величина n^2d, где d — разность прогрессии, а n — число её членов? (*И. Сергеев*)

3. Доска размером 2005×2005 разделена на квадратные клетки со стороной единица. Некоторые клетки доски в каком-то порядке занумерованы числами $1, 2, \ldots$ так, что на расстоянии, меньшем 10, от любой незанумерованной клетки найдётся занумерованная клетка. Докажите, что найдутся две клетки на расстоянии, меньшем 150, которые занумерованы числами, различающимися более, чем на 23. Расстояние между клетками — это расстояние между их центрами.

(*А. Скопенков, Д. Пермяков*)

4. С выпуклым четырёхугольником $ABCD$ проделывают следующую операцию: одну из данных вершин меняют на точку, симметричную этой вершине относительно серединного перпендикуляра к диагонали (концом которой она не является), обозначив новую точку прежней буквой. Эту операцию последовательно применяют к вершинам A, B, C, D, A, B, $\ldots$ — всего n раз. Назовём четырёхугольник допустимым, если его стороны попарно различны и после применения любого числа операций он остаётся выпуклым. Существует ли:

а) допустимый четырёхугольник, который после $n < 5$ операций становится равным исходному;

б) такое число n_0, что любой допустимый четырёхугольник после $n = n_0$ операций становится равным исходному? (*А. Устинов*)

5. К некоторому натуральному числу справа последовательно приписали два двузначных числа. Полученное число оказалось равным кубу суммы трёх исходных чисел. Найдите все возможные тройки исходных чисел. (*О. Косухин*)

6. На прямоугольном листе бумаги нарисован круг, внутри которого Миша мысленно выбирает n точек, а Коля пытается их разгадать. За одну попытку Коля указывает на листе (внутри или вне круга) одну точку, а Миша сообщает Коле расстояние от неё до ближайшей неразгаданной точки. Если оно оказывается нулевым, то после этого указанная точка считается разгаданной. Коля умеет отмечать на листе точки, откладывать расстояния и производить построения циркулем и линейкой. Может ли Коля наверняка разгадать все выбранные точки менее, чем за $(n+1)^2$ попыток? (*О. Косухин*)

Вариант Б

1. Числа a и b таковы, что первое уравнение системы

$$\begin{cases} \cos x = ax + b, \\ \sin x + a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение. (*по мотивам Т. Голенищевой-Кутузовой и И. Ященко*)

2. Сумма модулей членов конечной арифметической прогрессии равна 250. Если все её члены уменьшить на 1 или все её члены уменьшить на 2, то в обоих случаях сумма модулей членов полученной прогрессии будет также равна 250. Какие значения при этих условиях может принимать величина n^2d, где d — разность прогрессии, а n — число её членов? (*И. Сергеев*)

3. Доска размером 2005×2005 разделена на квадратные клетки со стороной единица. Некоторые клетки доски в каком-то порядке занумерованы числами $1, 2, \ldots$ так, что на расстоянии, меньшем 5, от любой незанумерованной клетки найдётся занумерованная клетка. Докажите, что найдутся две клетки на расстоянии, меньшем 100, которые занумерованы числами, различающимися более, чем на 34. Расстояние между клетками — это расстояние между их центрами.

(*А. Скопенков, Д. Пермяков*)

4. См. задачу 4 варианта А.

5. См. задачу 5 варианта А.

6. На прямоугольном листе бумаги нарисован круг, внутри которого Коля мысленно выбирает n точек, а Миша пытается их разгадать. За одну попытку Миша указывает на листе (внутри или вне круга) одну точку, а Коля сообщает Мише расстояние от неё до ближайшей неразгаданной точки. Если оно оказывается нулевым, то после этого указанная точка считается разгаданной. Миша умеет отмечать на листе точки, откладывать расстояния и производить построения циркулем и линейкой. Может ли Миша наверняка разгадать все выбранные точки менее, чем за $(n+1)^2$ попыток? (*О. Косухин*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 КЛАСС

1. Ответ: 18 м/мин.

Валентин пробегает $50 \cdot 60 = 3000$ см за 100 с, то есть его скорость 30 см/с, что составляет 18 м/мин.

2. Ответ: 9 раз.

Количество рублей, потраченных Андреем в те дни, когда он покупал билет у шофёра, делится на 5; на 5 делится и общее количество потраченных им в январе рублей. Значит, и в другие дни общее количество потраченных денег делилось на 5. Поэтому, количество дней, когда Андрей покупал билет у кондуктора, делится на 5. Числа 0 и 10 не годятся; числа, большие 10 — тем более, поэтому единственный возможный вариант — 5 дней. Тогда остальных дней $\dfrac{115 - 11 \cdot 5}{15} = 4$, а кружок был 9 раз.

3. О т в е т: а) 10, 10 и 80; б) нет.

а) Лиса раскладывает конфеты так: 10, 10 и 80. Если ей достанется кучка из 80 конфет, то медвежатам достанется поровну конфет, и они не будут жаловаться. Если ей достанется кучка из 10 конфет, то, для того чтобы уравнять доли медвежат, ей придётся съесть ещё 70 конфет.

П р и м е ч а н и е. Можно показать, что это — единственный способ действия Лисы. В самом деле, поскольку в итоге лиса съест 80 конфет, то медвежата съедят по $\frac{100-80}{2} = 10$ конфет. Так как у одного из медвежат количество конфет не менялось, то в кучке, доставшейся ему по жребию, было 10 конфет. Следовательно, какая бы кучка ни досталась Лисе по жребию, среди двух оставшихся обязательно есть кучка из 10 конфет. То есть кучек по 10 конфет по крайней мере две (если бы такая кучка из 10 конфет была лишь одна, то она по жребию могла достаться Лисе, и среди двух оставшихся не нашлось бы кучки из 10 конфет). Следовательно, Лиса может разложить конфеты по кучкам так, чтобы в итоге получить ровно 80 конфет, единственным способом.

б) Покажем, что число конфет, съеденных Лисой, всегда чётно (и поэтому не может быть равным 65). В итоге медвежата съели поровну конфет, поэтому суммарное число конфет, съеденных медвежатами, чётно. Так как 100 — чётное число, то Лиса также съела чётное число конфет.

4. Можно разместить 14, 15 или даже 16 «скобок». Больше разместить нельзя, так как 17 «скобок» занимают уже 102 клетки.

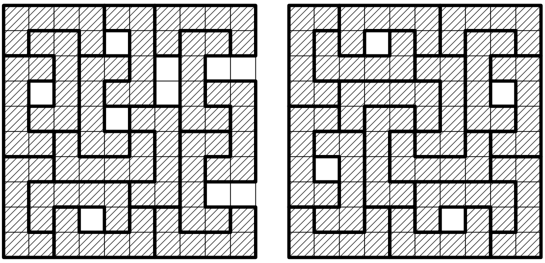


Рис. 1

5. О т в е т: нет.

Заметим, что использованы 10 различных букв, поэтому каждая цифра обозначена какой-нибудь буквой, в частности, среди этих цифр есть нуль. Таким образом, произведение цифр одного (а значит, и второго) числа равно нулю. Следовательно, в записи обоих чисел есть нуль. В словах МИХАЙЛО и ЛОМОНОСОВ общие буквы М, Л и О, поэтому нуль обозначает одна из них. Это не могут быть Л и М, поскольку числа не могут начинаться с нуля. Значит, нуль обозначен буквой О. В числе МИХАЙЛО на конце нуль, то есть оно чётное.

6. О т в е т: а) все были хоббитами; б) пять гоблинов и пять эльфов.

Рассмотрим того, про кого сказали, что он — хоббит, и для удобства назовём его Боб. Боб не согласился с тем, что он хоббит, следующий не согласился с ним, а значит, подтвердил, что Боб хоббит, и так далее —

все говорящие через раз подтверждали или отрицали, что Боб хоббит. Если пирующих было 9 (нечётное число), то на следующем круге каждый говорил противоположное к тому, что сказал на предыдущем, так что все они хоббиты, а первый хоббит про Боба сказал сначала правду, что вполне возможно. Мы решили пункт а) задачи. Для решения пункта б) заметим, что, поскольку 10 — чётное число, то говорящие на каждом круге говорят одно и то же, поэтому хоббитов среди них нет. Тогда и Боб — не хоббит, а сказавший так про него его правый сосед солгал, то есть он гоблин. Сам же Боб уличил гоблина во лжи, так что он эльф. Его сосед слева снова гоблин, и так далее — за столом сидят, чередуясь, пять гоблинов и пять эльфов.

7 КЛАСС

1. Во вторник он обменял свои рубли на 6 тугриков, продал их в среду и получил 36 рублей. В пятницу он обменял полученные рубли на 9 тугриков. Продав их в субботу, он получил 54 рубля.

2. О т в е т: а) да, см. рис. 2; б) нет.

б) Заметим, что нечётное число не делится на чётное, а значит, не может стоять в окружении чисел одинаковой чётности. Отсюда следует, что нечётные числа стоят парами. Однако среди чисел $1, 2, \ldots, 9$ нечётных чисел пять, и поэтому из них нельзя образовать пары.

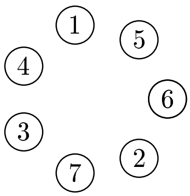


Рис. 2

3. Пример изображён на рис. 3.

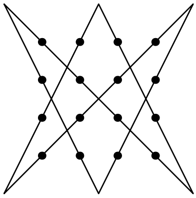


Рис. 3

4. О т в е т: а) 2×2; б) см. рис. 4; в) 3×10 или 4×6.

а) Квадратик не мог иметь общий угол с прямоугольником (см. рис. 4), так как тогда периметр остался бы прежним или уменьшился (убедитесь сами!), а площадь бы уменьшилась. Значит квадрат примыкает только к одной из сторон прямоугольника (см. рис. 4). Пусть сторона квадрата x. Тогда Таня, вырезав квадрат, уменьшила площадь фигуры на x^2, при этом периметр увеличился на две стороны квадрата, то есть на $2x$. Таким образом,

$$\text{исходная площадь} - x^2 = \text{площадь полученной фигуры},$$

$$\text{исходный периметр} + 2x = \text{периметр полученной фигуры}.$$

По условию

$$\text{исходная площадь} = \text{периметр полученной фигуры},$$

$$\text{исходный периметр} = \text{площадь полученной фигуры}.$$

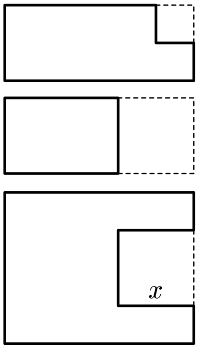
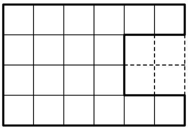


Рис. 4

Отсюда



исходная площадь $-\ x^2 =$ исходный периметр,

исходный периметр $+\ 2x =$ исходная площадь.

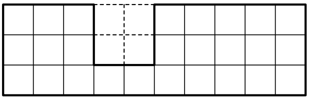


Рис. 5

Значит, $x^2 = 2x$, откуда $x = 2$.

в) Пусть стороны прямоугольника m и n. Тогда из решения пункта а) следует, что $mn = 2m + 2n + 4$. Наша задача — найти все возможные пары чисел m и n, удовлетворяющие этому равенству.

Можно рассуждать так. Ясно, что m и n превосходят 2, иначе квадрат 2×2 вырезать нельзя. Пусть $m \geqslant n$. Тогда, при $m \geqslant n \geqslant 5$, $2m + 2n + 4 \leqslant 4m + 4 < 5m \leqslant mn$. Значит, $2 < n < 5$. Подставляя $n = 3$, находим $m = 10$, а при $n = 4$ получаем $m = 6$. Таким образом, прямоугольники могли быть только такие, как показано на рисунках — 3×10 и 4×6.

Можно рассуждать иначе. Равенство $mn = 2m + 2n + 4$ можно записать в виде $(n-2)(m-2) = 8$. Поскольку m и n превосходят 2, задача сводится к поиску разложений числа 8 на два натуральных множителя.

5. Ответ: $250 \cdot 984 + 615 = 2005 \cdot 123$.

1) Заметим, что при Л $\leqslant 7$ левая часть не превосходит $250 \cdot 800 + 1000 = 201000$, а правая не меньше $2005 \cdot 102 = 204510$. Значит, Л $= 8$ или Л $= 9$. — Л $= 8; 9$

2) Если ГОД $\geqslant 124$, то число в правой части не меньше $2005 \cdot 124 = 248620$, а в левой части — не больше $250 \cdot 987 + 1000 = 247750$. Значит, ГОД $\leqslant 123$ и Г $= 1$, а потому О $= 0$ или О $= 2$. — Г $= 1$; О $= 0; 2$

3) Выражение в правой части и число 250 делятся на 5, поэтому либо У $= 5$, либо У $= 0$. Покажем, что второй случай невозможен. В самом деле, если У $= 0$, то правая часть оканчивается нулём и потому чётна, а значит, Д чётно. При этом О $= 2$ (так как О $\neq 0$), и минимальное значение Д равно 4, то есть ГОД $\geqslant 124$. Это противоречит пункту 2). Значит, У $= 5$, откуда следует, что Д нечётно. — У $= 5$; Д $= 2k + 1$

4) Для цифры Д есть всего 3 значения: Д $= 3$, Д $= 7$, и Д $= 9$. Рассмотрим остатки от деления на 50 выражений в левой и правой частях. Слева будет остаток 15 (так как Г $= 1$ и У $= 5$), значит, он должен быть таким же справа, что возможно лишь при Д $= 3$. — Д $= 3$

5) Определим значение О. Допустим, что О $= 0$. Тогда справа получаем $2005 \cdot 103 = 206515$, а значит, цифра Т чётна (иначе в разряде десятков слева не получится единицы). Тогда ЛЕТ $\geqslant 824$, а М $\geqslant 6$ (остальные цифры

заняты), и правая часть окажется меньше левой. Значит, О = 2. | О = 2

6) Имеем ГОД = 123. Случай Л = 8 не годится (слишком мало), остаётся Л = 9. По тем же соображениям Е $\geqslant$ 8, а так как цифра 9 занята, то Е = 8. Далее легко видеть, что Т = 4 и М = 6. | Л = 9; Е = 8

Примечание. Вполне возможны и иные рассуждения (даже решение прямым подбором), но приведённое решение одновременно решает пункты а) и б).

6. Ответ: 80.

Пусть x — число людей, вышедших на митинг. Рассмотрим общее число «недовольств». С одной стороны, каждой реформой недовольно ровно 48 жителей, а значит, общее число недовольств равно $48 \cdot 5 = 240$. С другой стороны, каждый вышедший на митинг недоволен хотя бы тремя реформами. Следовательно, общее число недовольств не меньше, чем $3x$. Таким образом, $240 \geqslant 3x$, откуда $x \leqslant 80$. Итак, искомое число не больше 80.

Приведём пример, когда на площадь выйдет ровно 80 человек. Выберем среди жителей острова 80 человек и разобьём их на пять групп по 16 человек. Пусть против первой реформы возражают люди из первых трёх групп, против второй — люди из второй, третьей и четвёртой групп, против третьей — люди из третьей, четвёртой и пятой групп, против четвёртой — люди из четвёртой, пятой и первой групп, а против пятой — люди из пятой, первой и второй групп. Тогда против каждой реформы возражают ровно $3 \cdot 16 = 48$ человек, и на митинг выйдут выбранные 80 человек.

8 КЛАСС

1. Ответ: Например, $a = 2$, $b = 20$.

Найдём все целочисленные решения этого уравнения. Разложим левую часть уравнения на множители: $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = (a^2 + 1)(b^2 + 1)$. Тогда уравнение примет вид $(a^2 + 1)(b^2 + 1) = 2005$. Теперь разложим число 2005 на множители: $2005 = 5 \cdot 401 = 1 \cdot 2005$. Отсюда, поскольку число 2004 не является полным квадратом, либо $a^2+1 = 5$ и $b^2+1 = 401$, либо $a^2 + 1 = 401$ и $b^2 + 1 = 5$. Решая эти уравнения, получаем, что все решения имеют вид $a = \pm 2$, $b = \pm 20$ или вид $a = \pm 20$, $b = \pm 2$.

2. Ответ: 9 частей.

Пусть разрез проходил вертикально. Проведём во всех квадратиках 1×1 вертикальные отрезки, соединяющие середины противоположных сторон. Заметим, что при сгибании по линиям клеток эти отрезки накладываются друг на друга. Следовательно, при разрезании разрезаются они и только они. Считая число получающихся при этом частей, получаем 9.

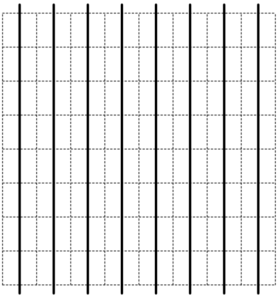


Рис. 6

3. Так как AA' и BB' — высоты, треугольники $AA'B$, $AB'B$, $CA'H$ и $CB'H$ — прямоугольные. Поскольку медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине, $XA' = \frac{1}{2}AB = XB'$ и $YA' = \frac{1}{2}CH = YB'$. Следовательно, точки X и Y лежат на серединном перпендикуляре к отрезку $A'B'$.

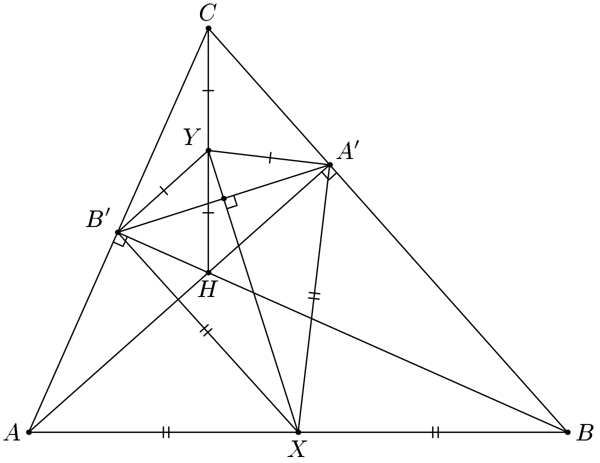


Рис. 7

4. Предположим, что среди всех 2005 чисел есть хотя бы одно нечётное. Тогда рассмотрим два случая: либо сумма всех чисел чётна, либо нечётна.

В первом случае все 2005 чисел нечётными быть не могут, то есть встречаются как чётные, так и нечётные числа. Но тогда среди них можно найти чётное и нечётное числа, стоящие рядом, и выкинуть их. Заметим, что сумма оставшихся чисел нечётна и их нельзя разбить на две группы с равной суммой.

Во втором случае, если нечётных чисел больше половины, то найдутся два нечётных числа, стоящие рядом. Действительно, иначе справа от каждого нечётного стоит чётное число, но тогда чётных чисел получится заведомо не меньше, чем нечётных. Если же нечётных чисел меньше половины, то аналогично найдутся два соседних чётных числа. Выкинем два соседних нечётных или чётных числа, тогда у оставшихся чисел сумма нечётна и их нельзя разбить на искомые группы.

Остался случай, когда все числа чётные. Будем делить их на два, пока хотя бы одно из чисел не станет нечётным. В результате каждое из чисел разделится на некоторое число N. Из получившегося набора выкинем два соседних числа так, чтобы оставшиеся числа нельзя было разбить на две группы с равной суммой. Заметим, что после умножения этих чисел на N их также нельзя будет разбить на две группы с равной суммой, что и требовалось доказать.

5. Разобьём окружность с центром в точке O на шесть равных частей точками A, B, C, D, E и F. Понятно, что треугольники OAB, OBC, OCD, ODE, OEF, OFA — равносторонние. Проведём дугу окружности с центром в точке A радиуса AB от точки B до точки O. Аналогично проведём дуги окружностей с центрами в точках B, C, D, E, F (см. рис. 8). Таким образом, мы разбили окружность на 6 равных частей. Теперь каждую из этих частей разобьём на две равные части одним из двух способов, изображённых на рисунке.

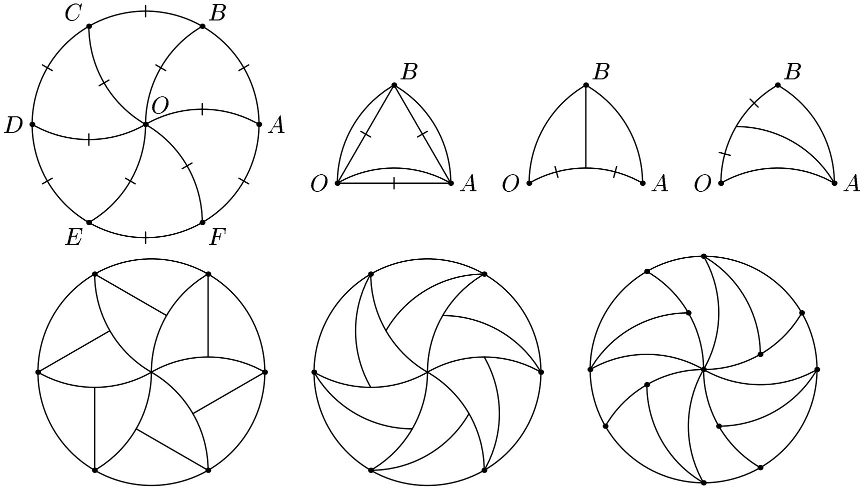


Рис. 8

К о м м е н т а р и й. Данная задача приоткрывает дверь в волшебный мир открытых проблем современной геометрии — ибо если начать смотреть чуть глубже в любом направлении, возникает нерешённая проблема. Укажем некоторые направления возможного исследования:

1) Круг разделён на 12 равных частей так, что центр лежит на границе некоторых, но не всех частей. Верно ли, что части равны частям, получающимся при одном из разрезаний, указанных в решении? Никто не знает!

2) При каких n круг можно разделить на n равных частей так, чтобы центр лежал на границе некоторых, но не всех частей? (пример известен лишь при n вида $6k$, $k \geqslant 2$; недавно наш соотечественник А. Я. Канель-Белов доказал, что при $n = 2$ такое деление невозможно (см. [1]), больше ничего не известно).

3) Круг разделён на несколько равных частей. Верно ли, что диаметр каждой из частей не меньше радиуса круга? Никто не знает! (Диаметром фигуры, отличной от круга, называют наибольшее из расстояний между её точками.)

4) Можно ли разделить круг на несколько равных частей так, чтобы центр круга лежал строго внутри (не на границе) одной из частей? Ответ на этот вопрос не известен не только для круга, но и для правильных n-угольников при $n > 4$.

5) Аналогичные вопросы можно поставить про шар в пространстве. Там не известно ни одного ответа (в том числе и на вопрос, аналогичный поставленному на олимпиаде).

Если Вы смогли решить одну из этих задач, или придумали иное решение исходной олимпиадной задачи, автору было бы интересно про это узнать, напишите, пожалуйста (Сергей Маркелов, markelov@mccme.ru).

[1] А. Я. Канель-Белов. Решение задачи 1.5 // Математическое просвещение. Третья серия. — 2002. — Вып. 6. — С. 139–140.

[2] S. Wagon. Partitioning intervals, spheres and balls into congruent pieces // Canadian Mathematical Bulletin. — 1983. — № 26. — С. 337–340.

6. Выделим из данных точек какие-нибудь 1024. Докажем, что Осёл может так пометить отрезки, что независимо от того, как пометит точки Тигр, среди выделенных 1024 точек найдутся две точки одного цвета, соединённые отрезком того же цвета.

Покажем, как может для этого действовать Осёл. Разобьём выделенные точки на 512 пар и пометим нулём отрезки, соединяющие точки из одной пары. Далее, объединим получившиеся пары по две. Получим 256 четвёрок. Пометим цифрой 1 ещё не помеченные отрезки, соединяющие точки одной четвёрки. После этого объединим получившиеся четвёрки по две. Получим 128 восьмёрок. Пометим цифрой 2 ещё не помеченные отрезки, соединяющие точки из одной восьмёрки, и так далее. На последнем шаге мы объединим получившиеся две группы по 512 точек в одну и пометим ещё не помеченные отрезки цифрой 9.

Докажем, что как бы теперь Тигр не покрасил точки, Осёл выиграет. Предположим, что Тигр может раскрасить точки так, чтобы не нашлось отрезка, помеченного той же цифрой, что и оба его конца. Заметим, что в каждой из 512 исходных пар найдётся точка, помеченная ненулевой цифрой. Действительно, иначе эти две точки образовывали бы пару, дающую выигрыш Ослу. Рассмотрим какую-нибудь из 256 четвёрок. В каждой из двух пар, из которых она образована, найдётся точка, помеченная не нулём. Если бы обе эти точки были помечены единицей, они образовывали пару, дающую выигрыш Ослу (поскольку они соединены отрезком, помеченным цифрой 1). Следовательно, в каждой из 256 четвёрок найдётся точка, помеченная не нулём и не единицей. Продолжая это рассуждение, получаем, что в каждой из 128 восьмёрок найдётся точка, помеченная не нулём, не единицей и не двойкой, и т. д.; в каждой из двух групп по 512 найдётся точка, помеченная не нулём, не единицей, не двойкой, ..., не восьмёркой. Следовательно, эти точки помечены цифрой 9. Но они соединены отрезком, помеченным цифрой 9, что противоречит предположению. Следовательно, Осёл выигрывает независимо от игры Тигра.

Из приведённого решения видно, что Осёл выигрывает даже для 1024 точек. Немного другой взгляд на эту игру — в задаче 10.6 (см. стр. 6 и 22). Можно доказать, что Осёл выигрывает даже для 121 точки (см. решение задачи 10.6, б).

9 КЛАСС

1. Так как корни приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ равны $x_1 = \dfrac{-p+\sqrt{D}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{-p-\sqrt{D}}{2}$, то $x_1 - x_2 = \sqrt{D}$.

Обозначим корни данных трёхчленов $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$, так что $x_1 - x_2 = 1$, $y_1 - y_2 = 2$ и $z_1 - z_2 = 3$. Тогда $x_1 + y_1 + z_2 = x_2 + y_2 + z_1$.

2. Ответ: да, существуют.

Несложно подобрать три натуральных числа таких, что сумма любых двух из них делится на третье: 1, 2 и 3. Заметим, что одно из этих чисел равно сумме двух других ($3 = 2 + 1$). Добавим к этим числам ещё одно — их сумму. Полученный набор чисел (1, 2, 3, 6) обладает тем свойством, что сумма любых трёх из них делится на четвёртое.

Покажем, что добавляя таким образом к уже имеющимся числам их сумму, мы получим набор, обладающий нужным свойством. Если есть числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, сумма любых $k - 1$ из которых делится на оставшееся, то $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ делится на каждое из этих чисел. Рассмотрим набор $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} = S_k$. Тогда сумма всех чисел, кроме a_i, равна $2S_k - a_i$ и делится на a_i, поскольку S_k делится на a_i.

Проделав такую операцию нужное количество раз, получим искомый набор: $1, 2, 3, 6, 12, 24, \ldots, 3 \cdot 2^{2003}$.

3. Пусть O_2 – центр окружности ω_2. Так как проведённые из точки C касательные к окружности ω_2 равны, то $\angle O_2CA = \angle O_2CB$. Так как эти углы вписаны в окружность ω_1, то равны её дуги AO и OB. Поэтому и стягивающие их хорды AO и OB равны. Следовательно, точки A и B симметричны друг другу относительно линии центров, поэтому соединяющий их отрезок перпендикулярен линии центров.

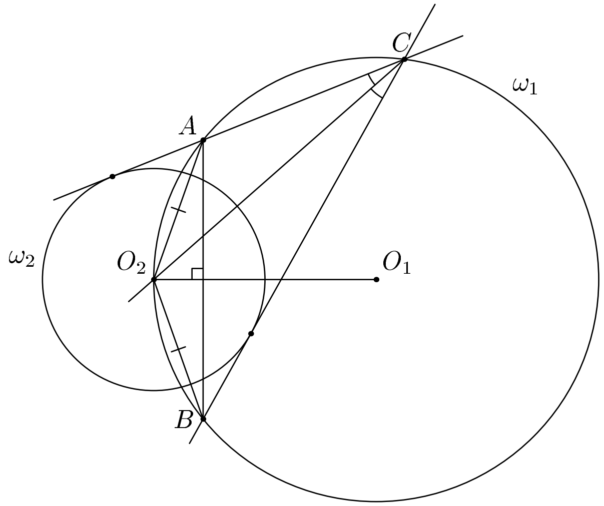


Рис. 9

4. Ответ: нет, не верно.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 20\,000$ и $BC = \dfrac{1}{10\,000}$. Его площадь равна 1. Предположим, что его можно разрезать на 1000 частей, из которых можно сложить квадрат. Тогда сторона этого квадрата должна быть равна 1. Разобьём катет AC длины 20 000 на 1000 равных отрезков точками $A = A_0, A_1, \ldots$ $\ldots, A_{999}, A_{1000} = C$. Поскольку частей 1000, а точек 1001, какие-нибудь две из этих точек попадут в одну часть. Эта часть не может поместиться в квадрат, поскольку расстояние между любыми двумя из точек $A_0, \ldots, A_{1000}$ не меньше 20, а расстояние между любыми двумя точками квадрата не превосходит $\sqrt{2}$. Полученное противоречие доказывает, что рассматриваемый треугольник невозможно разрезать на 1000 частей, из которых можно сложить квадрат.

Комментарий. В 1807 году венгерский математик Вольфганг Бойаи (Bolyai) доказал удивительную теорему: любые 2 многоугольника равной площади равносоставленны (т. е. один можно разрезать на несколько частей, и собрать из них второй). Возникает естественный вопрос — как определить, какое минимальное количество частей требуется для двух конкретных многоугольников? Задача 9.4 показывает нетривиальность вопроса — даже для треугольника и квадрата количество частей заранее неограниченно. В этой области науке известно весьма мало даже про наиболее естественный частный случай — какое минимальное количество частей требуется для разрезания правильного многоугольника с целью получить правильный многоугольник с другим числом сторон? В таблице показаны наилучшие известные разрезания правильных n-угольников при $n \leqslant 10$. Ни про одно из них минимальность не доказана (попробуйте улучшить какой-нибудь из результатов!). Некоторые из разрезаний, соответствующих числам в таблице, изображены на рис. 10.

	3	4	5	6	7	8	9
4	4						
5	6	6					
6	5	5	7				
7	8	7	9	8			
8	7	5	9	8	11		
9	8	9	10	10	13	12	
10	7	7	10	9	11	10	13

До недавнего времени считался открытым вопрос: являются ли равносоставленными круг и квадрат? Иными словами, можно ли разрезать круг на несколько

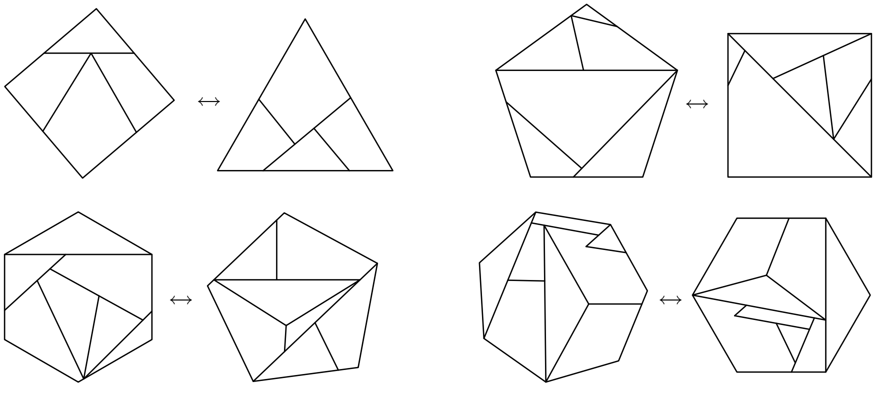


Рис. 10

частей, из которых можно составить квадрат? Интуитивно кажется, что ответ должен быть отрицательным, так все и предполагали, но доказательства найти не могли. В 1988 году венгерский математик Миклош Лацкович (Laczkovich) ко всеобщему удивлению доказал, что ответ — положительный! К сожалению, его решение существенно выходит за рамки школьной программы. Мы бы хотели поместить здесь рисунок круга и квадрата, разрезанного на одни и те же части, но сделать это затруднительно, т. к. в решении Миклоша используется около 10^{49} частей, а доступное нам полиграфическое оборудование поддерживает разрешение до 600 точек на дюйм, т. е. в этой книжечке не более 10^9 точек (и даже число атомов в ней не превосходит 10^{27}). Можно ли разрезать круг на меньшее количество частей так, чтобы из них можно было составить квадрат — открытая проблема; возможно, её удастся решить кому-то из участников олимпиады.

По-другому обстоят дела в пространстве. 8 августа 1900 года немецкий математик Давид Гильберт (Hilbert) на конгрессе прочитал список из 23 проблем, которые, по его мнению, должны определить развитие математики в XX веке. Проблема Гильберта № 3 звучала так: верно ли, что любые 2 тетраэдра равного объёма равносоставленны (т. е. их можно разрезать на равные многогранники)? Эта проблема была решена с момента доклада за отрицательное время — ибо в том же году ещё до выступления Гильберта другой немецкий математик Дэн (Dehn) сдал в печать статью с ответом (негативным) — существуют два тетраэдра объёма 1, которые нельзя разрезать на равные многогранники! Подробнее об этом можно прочитать в статье [2].

Однако, и в пространстве осталось немало нерешённых вопросов. Известно, что сделать из куба правильный тетраэдр нельзя, но некоторые (не все) неправильные тетраэдры — можно. Как описать геометрически, какие именно можно? Никто не знает (известно лишь необходимое условие — если из тетраэдра $ABCD$ можно сделать куб, то данный тетраэдр можно использовать в качестве кирпича: имея множество его одинаковых копий, можно замостить без пустот всё пространство). Как и на плоскости, когда разрезание возможно, ни в одном случае наука не знает, какое минимальное число частей требуется. А если разрешить резать не только прямым ножом (на многогранники), но и кривым — верно ли, что тогда из любого многогранника можно сделать куб? Никто не знает. Открытая проблема.

Заинтересовавшимся темой разрезаний рекомендуем (помимо описанных выше нерешённых задач) подумать также над следующими, решения которых известны (отсюда, вообще говоря, не следует, что они более простые):

1) Можно ли невыпуклый четырёхугольник разрезать двумя прямыми на 6 частей?

2) На плоскости нарисован неравнобедренный треугольник ABC и симметричный ему относительно прямой треугольник DEF. Можно ли разрезать треугольник ABC на несколько частей, из которых можно собрать DEF без переворачивания частей?

3) Дан многоугольник (см. рис. 11). На какое минимальное число частей его можно разрезать так, чтобы из них можно было сложить квадрат?

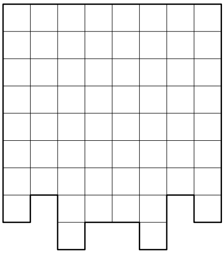


Рис. 11

4) Треугольник, все углы которого не превосходят 120 градусов, разрезан на несколько треугольников. Верно ли, что хотя бы у одного из полученных треугольников все углы не превосходят 120 градусов?

5) Можно ли какой-нибудь невыпуклый пятиугольник разрезать на два равных пятиугольника?

6) Можно ли квадрат (с границей и внутренностью) разбить на отрезки, т. е. представить в виде объединения непересекающихся отрезков?

[1] Г. Линдгрен. Занимательные задачи на разрезание. — М.: Мир, 1977.

[2] Д. Фукс. Можно ли из тетраэдра сделать куб? // Квант. — 1990. — № 11.

[3] В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии (рекомендуется третье издание (в 2 томах); четвёртое издание (однотомное) содержит много опечаток).

5. Так как у Сени и Жени получились одинаковые числа, каждая из цифр $1, 2, \ldots, 9$ входит в Сенино и Женино числа одно и то же число раз. Число появлений каждой из цифр на окружности постоянно, поэтому цифра, не выписанная Сеней, совпадает с цифрой, не выписанной Женей.

Предположим, что между теми точками на окружности, с которых Сеня и Женя соответственно начинали выписывать свои числа, расположена $k-1$ цифра (если считать по часовой стрелке). Тогда из условия и сказанного выше следует, что поворот окружности на k цифр по часовой стрелке совмещает каждую цифру с равной ей.

Пусть m — наименьшее ненулевое количество цифр, на которое можно повернуть по часовой стрелке окружность так, чтобы каждая цифр совместилась с равной ей. Докажем, что n делится на m.

Разделим n на m с остатком: $n = m \cdot q + r$. Тогда легко видеть, что поворот на r цифр по часовой стрелке тоже переводит каждую цифру в равную ей. Так как $r < m$, то из условия минимальности m следует, что $r = 0$. Значит, n делится на m.

Теперь Сеня и Женя могут разрезать окружность на дуги, содержащие по m цифр, причём записанные на дугах цифры будут образовывать одинаковые числа.

К о м м е н т а р и й. В основе задачи лежит следующий факт. Пусть дана периодическая последовательность с минимальным периодом n, в которой содержатся два одинаковых участка длины $n-1$. Тогда их начальные символы находятся на расстоянии, кратном n.

Подробнее о свойствах периодических последовательностей см.: А. Б е л о в, М. С а п и р. «И возвращается ветер...», или периодичность в математике // Квант. — 1990. — № 4. — С. 6–10, 56.

6. Обозначим середину AP через A_1, середину BC через A_2, проекцию точки P на BC через A_3. Точки B_1, B_2, B_3 и C_1, C_2, C_3 определим аналогично. Обозначим точку пересечения описанных окружностей треугольников $B_1C_2A_1$ и $C_1B_2A_1$ через Q. Докажем, что описанная окружность треугольника $C_1B_1A_2$ тоже содержит точку Q.

Заметим, что $\angle A_1QC_1 = 180^\circ - \angle A_1B_2C_1 = 180^\circ - \angle A_1PC_1$. Аналогично $\angle A_1QB_1 = 180^\circ - \angle A_1PB_1$. Значит,

$$\angle B_1QC_1 = \angle A_1QB_1 + \angle A_1QC_1 = 360^\circ - \angle A_1PC_1 - \angle A_1PB_1 = \\ = \angle B_1PC_1 = B_1A_2C_1.$$

Следовательно, описанная окружность треугольника $C_1B_1A_2$ тоже содержит точку Q.

Аналогично доказывается, что описанная окружность треугольника $A_2B_2C_2$ тоже содержит точку Q.

Осталось доказать, что описанная окружность треугольника $A_3B_3C_3$ тоже содержит точку Q. Для этого достаточно показать, что $\angle A_3C_3B_3 = \angle A_3QB_3$. Точка C_3 симметрична точке P относительно A_1B_1. Значит, $\angle A_1C_3B_1 = \angle A_1PB_1 = \angle A_1C_2B_1$. Поэтому точка C_3 лежит на описанной окружности треугольника $A_1C_2B_1$.

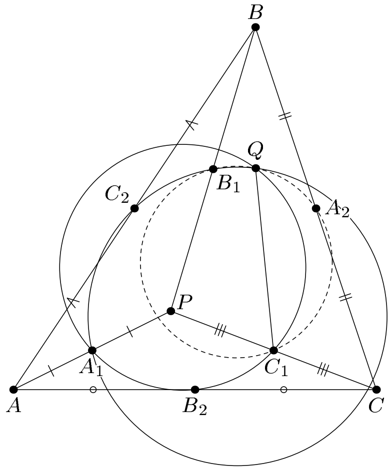


Рис. 12

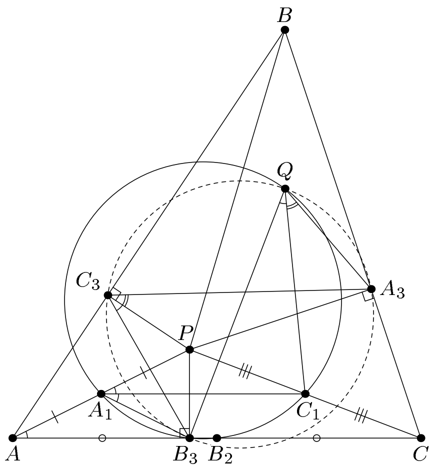


Рис. 13

Так как точки A_1, B_3, B_2, C_1, Q лежат на одной окружности и четырёхугольник AB_3PC_3 вписанный (поскольку углы B_3 и C_3 в нём прямые), то $\angle B_3QC_1 = \angle B_3A_1C_1 = \angle C_1A_1P = \angle PAB_3 = \angle B_3C_3P$.

Аналогично $\angle A_3C_3P = \angle A_3QC_1$. Значит,

$$\angle A_3C_3B_3 = \angle A_3C_3P + \angle B_3C_3P = \angle B_3QC_1 + \angle A_3QC_1 = \angle A_3QB_3,$$

что и требовалось доказать.

Другие случаи расположения точек рассматриваются аналогично.

10 КЛАСС

1. О т в е т: Да, существует.

Это четырёхугольник, у которого три угла равны 45°, а четвёртый — 225° (тогда тангенсы всех его углов равны 1).

К о м м е н т а р и й. Можно показать, что условие задачи определяет углы четырёхугольника однозначно.

2. Пусть точки имеют координаты $(x_1, P(x_1))$ и $(x_2, P(x_2))$, где $x_1 \neq x_2$. Тогда расстояние между ними равно

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (P(x_1) - P(x_2))^2} = |x_1 - x_2|\sqrt{1 + \left(\frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2}\right)^2}.$$

Отметим, что $x_1^n - x_2^n$ при любом натуральном n делится на $x_1 - x_2$. Поскольку коэффициенты многочлена $P(x)$ целые, $m = \dfrac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2}$ — целое число. Из формулы для расстояния следует, что число $\sqrt{m^2+1}$ рациональное, а значит и целое. Поскольку число вида $1 + m^2$ является полным квадратом только при $m = 0$, то $P(x_1) = P(x_2)$, что равносильно утверждению задачи.

Комментарий. Выкладки упрощаются, если параллельно перенести график многочлена так, чтобы одна из данных точек совпала с началом координат.

3. Первое решение. Поскольку $AB = BB_1$, $BC = BB_2$ и $\angle B_1BB_2 = \pi - \angle ABC$, то $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BB_1B_2}$. Аналогично, $S_{\triangle B_1A_2A_3} = S_{\triangle AA_1A_2} = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BB_1B_2} = S_{\triangle B_1A_2B_4}$. Следовательно, $A_3B_4 \parallel A_2B_1 \parallel AB$.

Второе решение. Прежде всего отметим, что медиана треугольника CC_1C_2, проведённая из вершины C, перпендикулярна отрезку AB и равна его половине. Действительно, если C' — четвёртая вершина параллелограмма $CC_1C'C_2$, то треугольник CC_2C' является образом треугольника ABC при повороте на 90° вокруг центра квадрата CAA_1C_2. Аналогично, отрезки A_2A_3 и B_1B_4 параллельны медианам треугольника ABC, проведённым соответственно из A и B, и вдвое длиннее их. Поэтому

$$\overrightarrow{A_3B_4} = \overrightarrow{A_3A_2} + \overrightarrow{A_2B_1} + \overrightarrow{B_1B_4} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}) = 4\overrightarrow{AB}.$$

Таким образом, мы доказали не только утверждение задачи, но и равенство $A_3B_4 = 4AB$.

4. Ответ: нет, не всегда.

Опишем самый простой из возможных контрпримеров. Пусть в коробку $2\times2\times3$ помещены два бруска $1\times2\times3$. Немного уменьшим у одного из них измерение длины 3, а у другого — измерение длины 2. Так как у второго бруска одно измерение равно 3, высоту коробки уменьшить нельзя. Так как высоты обоих брусков больше 2, их можно ставить в коробку только вертикально. Ясно, что изменить взаимное расположение брусков нельзя. Поэтому горизонтальные размеры коробки также нельзя уменьшить.

Выясните самостоятельно, изменится ли ответ в задаче, если у каждого бруска уменьшаются два измерения из трёх.

5. Ответ: нет, не существуют.

Так как $m^4 - 1 \mathrel{\vdots} 5$ для любого m, не делящегося на 5 (это утверждение является частным случаем малой теоремы Ферма, но легко доказывается и непосредственной проверкой), то a_n при $n \mathrel{\vdots} 4$ не делится на 5, а тогда и на 2005.

В действительности утверждение задачи — это частный случай гораздо более общего факта: если k — произвольное натуральное число, то ни для какого простого числа $p > k$ не существует k идущих подряд членов последовательности $1+2^n+\ldots+k^n$, делящихся на p. Для данной ситуации этот факт доказывается следующим образом (общий случай аналогичен).

Предположим, что числа $a_m, \ldots, a_{m+4}$ делятся на 2005. Тогда числа $b_n = a_{n+1} - a_n = 2^n + 2\cdot3^n + 3\cdot4^n + 4\cdot5^n$ также делятся на 2005 при $n = m, m+1, m+2, m+3$. Аналогично, на 2005 делятся числа $c_n = b_{n+1} - 2b_n = 2\cdot3^n + 6\cdot4^n + 12\cdot5^n$ при $n = m, m+1, m+2$. Рассмотрев затем числа $d_n = c_{n+1} - 3c_n$ и $d_{n+1} - 4d_n$, мы в итоге придём к числу $24 \cdot 5^n$, которое не делится на 401, а значит и на 2005.

6. а) Докажем по индукции следующее утверждение: если число цветов n, а число точек не меньше 2^n, то первый может гарантировать себе выигрыш.

При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно доказано для $n - 1$ цвета, докажем его для n. Разобьём точки на два множества, состоящие не менее чем из 2^{n-1} точек каждое. В каждом из множеств покрасим отрезки в $n - 1$ цвет в соответствии с индуктивным предположением. Все отрезки, соединяющие точки из разных множеств, покрасим оставшимся цветом. Если в каком-то из двух множеств нет точек, покрашенных в последний цвет, то искомый отрезок существует по предположению индукции. Если же в обоих множествах есть точки последнего цвета, то соединяющий их отрезок — искомый.

б) Докажем, что первый игрок может покрасить требуемым образом отрезки, соединяющие 121 точку. Занумеруем точки парами чисел (a, b), где a и b — числа от 1 до 11. При $k = 0, \ldots, 9$ отрезки между точками вида (a_1, b_1) и (a_2, b_2), где $(a_2 - a_1) - k(b_2 - b_1) \,\vdots\, 11$, покрасим цветом $k + 1$.

Выберем произвольный цвет. Если две точки соединены с третьей отрезками этого цвета, то между собой они соединены отрезком того же цвета. Таким образом, точки разбиваются на несколько множеств так, что все отрезки между точками из одного множества покрашены в выбранный цвет. При этом для любых a_1, b_1, b_2 существует ровно одно a_2 такое, что отрезок между (a_1, b_1) и (a_2, b_2) покрашен в данный цвет. Поэтому для каждого цвета точки разбиваются на 11 множеств по 11 точек в каждом. Теперь покрасим оставшиеся отрезки произвольным образом.

Как бы второй игрок ни покрасил точки, найдутся 12 точек одного цвета. Рассмотрим разбиение на 11 множеств, соответствующее этому цвету. Найдутся две точки, попавшие в одно множество. Соединяющий их отрезок — искомый.

11 КЛАСС

1. Вариант А. По условию функция $y = \sin x + a - bx$ обращается в нуль ровно в двух точках x_1 и x_2, $x_1 < x_2$.

Эти точки разбивают числовую ось на 3 промежутка $(-\infty, x_1]$, $(x_1, x_2]$, $(x_2, +\infty)$. Поскольку $b \neq 0$, а $|\sin x| \leqslant 1$, то на промежутках $(-\infty, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$ функция имеет разные знаки. Поэтому на некоторых двух соседних промежутках $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) или (x_1, x_2), $(x_2, +\infty)$ функция имеет одинаковые знаки, а тогда либо точка x_1, либо точка x_2 является точкой экстремума и производная в ней $y' = (\sin x + a - bx)' = \cos x - b$ обращается в нуль.

Решение задачи в варианте Б аналогично.

П р и м е ч а н и е. Докажите самостоятельно, что система имеет ровно одно решение.

К о м м е н т а р и й. Эта задача составлена по мотивам следующей физической задачи, предложенной Т. Голенищевой-Кутузовой и И. Ященко.

Вася спускается на парашюте, с постоянной скоростью 3 м/с, а его друг Миша катается на колесе обозрения, которое крутится с постоянной скоростью (колесо ниже начальной точки спуска парашютиста). Известно, что пока Вася спускался, они оказывались на одной высоте ровно 4 раза, считая тот момент, когда Вася приземлился, а кабинка колеса обозрения была внизу. Считая Васю и Мишу точками, найдите скорость изменения высоты Миши в тот момент, когда они впервые оказались на одной высоте.

Это задача допускает наглядное решение, основанное на рассмотрении графиков изменения высоты Миши и Васи.

График изменения высоты Васи — прямая L, а Миши — синусоида (см. рис. 14). В момент приземления парашютиста синусоида касается оси t, значит, «слева» от момента приземления прямая L идёт «выше» синусоиды. Будем двигаться по L влево. Если следующая её общая точка с синусоидой — точка касания, то больше общих точек не будет (см. рис. 15). Если нет, то L окажется ниже синусоиды, после следующей общей точки — опять сверху. Осталась одна общая точка, значит она — точка касания, и скорость изменения высоты Миши в этот момент равна скорости изменения высоты Васи, то есть равна 3 м/с.

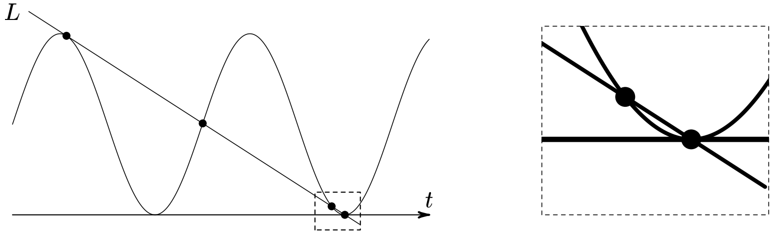


Рис. 14

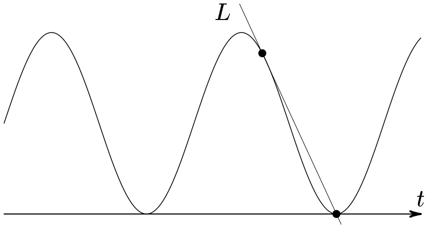


Рис. 15

2. О т в е т в в а р и а н т е А: ± 400, в в а р и а н т е Б: ± 1000.

Обозначим сумму модулей членов арифметической прогрессии через S. Покажем, что величина $\dfrac{S}{n^2 d}$ является постоянной для прогрессий, удовлетворяющих условию задачи, и равна $1/4$, если данная прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для определённости, возрастает (для убывающей прогрессии эта величина равна $-1/4$). Из условия задачи следует, что функция

$$S(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_n|$$

принимает в трёх различных точках одинаковые значения. Так как

$$S(x) = (2i-n)x + \mathrm{const}, \quad \text{при} \quad \begin{cases} x \leqslant a_i, & i = 1, \\ a_i \leqslant x \leqslant a_{i+1}, & i = 1, \ldots, n-1, \\ x \geqslant a_i, & i = n, \end{cases}$$

то при $x \leqslant a_{i+1}$ и $i < n/2$ эта функция убывает, при $a_i \leqslant x \leqslant a_{i+1}$ и $i = n/2$ — постоянна, а при $x \geqslant a_i$ и $i > n/2$ — возрастает. Следовательно, условие задачи может выполняться только, когда число $n = 2k$ чётно и

$$S = S\Big(a_k + \frac{d}{2}\Big) = 2 \cdot \frac{d/2 + d/2 + (k-1)d}{2} \cdot k = k^2 d = \frac{n^2 d}{4}.$$

3. Вариант А. Рассмотрим на доске произвольный клетчатый квадрат со стороной 105, который назовём большим. Разобьём его на 25 квадратов 21×21, которые назовём малыми.

Центр клетки с числом, находящийся на расстоянии менее 10 от центра некоторого малого квадрата, обязан находиться в этом малом квадрате. Так как малые квадраты не пересекаются, то в большом квадрате найдётся хотя бы 25 клеток с числами. Наименьшее из них отличается от наибольшего более, чем на 23. Соответствующие две клетки находятся на расстоянии менее 150, поскольку лежат в большом квадрате, расстояние между наиболее удалёнными угловыми клетками которого не превосходит $105\sqrt{2} < 150$.

Вариант Б. Рассмотрим на доске произвольный клетчатый квадрат со стороной 66, который назовём большим. Разобьём его на 36 квадратов 11×11, которые назовём малыми.

Центр клетки с числом, находящийся на расстоянии менее 5 от центра некоторого малого квадрата, обязан находиться в этом малом квадрате. Так как малые квадраты не пересекаются, то в большом квадрате найдётся хотя бы 36 клеток с числами. Наименьшее из них отличается от наибольшего более, чем на 34. Соответствующие две клетки находятся на расстоянии менее 100, поскольку лежат в большом квадрате, расстояние между наиболее удалёнными угловыми клетками которого не превосходит $66\sqrt{2} < 99$.

Примечание. Квадраты не являются единственно возможными фигурами для проведения анализа количества занумерованных клеток. Размер квадратов также можно менять. Например, в первом варианте можно в качестве малых квадратов взять квадраты 19×19. Соответственно уменьшится и размер большого квадрата.

4. Ответ: Если $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, то он перейдёт в равный четырёхугольник за три операции. Любой допустимый четырёхугольник перейдёт в равный ему четырёхугольник за $6k$ операций, $k \in \mathbb{N}$ (например, за $n_0 = 6$).

Обозначим через O точку пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям. Заметим, что эта точка остаётся на месте при применении любого количества операций к четырёхугольнику. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ углы образованные сторонами четырёхугольника и отрезками AO, BO, CO, DO (см. рис. 16). После применения трёх операций стороны четырёхугольника опять будут стоять в прежнем порядке: a, b, c, d, а указанные углы будут расположены, как указано на рис. 17.

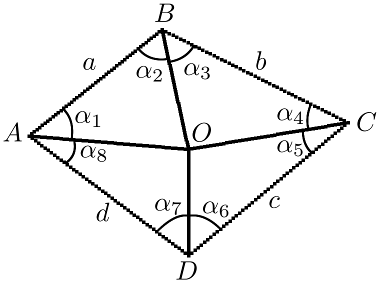


Рис. 16

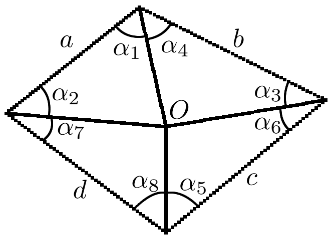


Рис. 17

Если $\alpha_1+\alpha_4 = \alpha_2+\alpha_3$ и $\alpha_6+\alpha_7 = \alpha_5+\alpha_8$, то четырёхугольник $ABCD$ вписанный. При этом он перейдёт в равный ему четырёхугольник за три операции.

После шести операций стороны опять будут расположены в прежнем порядке и углы будут расположены так, как показано на рис. 16.

Примечание. Для ответа на первый пункт задачи необязательно следить за этими «маленькими углами». Если сразу оговорить, что допустимый четырёхугольник вписанный, то достаточно проследить за центральными углами, опирающимися на стороны четырёхугольника (и даже достаточно просто проследить за сторонами четырёхугольника). Вписанный в данную окружность четырёхугольник однозначно определяется длинами и порядком расположения сторон.

5. Ответ: 9, 11, 25.

Обозначим через a первое натуральное число, а через b и c записанные за ним двузначные числа. Пусть x — их сумма: $x = a+b+c$. Согласно условию числа a, b, c и x удовлетворяют уравнению $a\cdot 10^4+100b+c = x^3$. Покажем, что $x < 100$. Если $x \geqslant 100$, то $x^3 \geqslant 10^4 \cdot x = 10^4(a+b+c) > > 10^4a+100b+c$, т.е. уравнение не имеет решений. Следовательно, x — двузначное число, a — либо однозначное, либо двузначное число, а x^3 либо пяти-, либо шестизначное число. Кроме того, $x \geqslant 22$ ($21^3 = 9261$ — четырёхзначное число). Заметим, что $x^3 - x = 9999a + 99b$, а значит $x^3 - x$ делится на 99 нацело. Т.к. $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$, то среди чисел $x-1$, x, $x+1$ какое-то делится нацело на 9 и какое-то на 11. Для x, удовлетворяющего условиям $22 \leqslant x \leqslant 99$, возможны следующие случаи:

1) $x = 44$ $(x+1 = 45)$, $44^3 = 85184$, $8+51+84 > 44$;
2) $x = 45$ $(x-1 = 44)$, $45^3 = 91125$, $a = 9$, $b = 11$, $c = 25$;
3) $x = 54$ $(x+1 = 45)$, $54^3 = 157464$, $15+74+64 > 54$;

4) $x = 55$, $(x - 1 = 54)$, $55^3 = 166375$, $16 + 63 + 75 > 55$;

5) $x = 89$, $(x - 1 = 88$, $x + 1 = 90)$, $89^3 = 704969$, $70 + 49 + 69 > 89$;

6) $x = 98$, $(x + 1 = 99)$, $98^3 = 941192$, $94 + 11 + 92 > 98$;

7) $x = 99$, $x^3 = 970299$, $97 + 2 + 99 > 99$, 2 — не двузначное число.

6. Пусть на листе бумаги осталось $k \geqslant 1$ неразгаданных точек $c_{k,1}$, $c_{k,2}$, …, $c_{k,k}$. Покажем, как с помощью $2k + 1$ попытки разгадать одну из них.

Начертим на листе бумаги отрезок прямой l, не пересекающей отмеченный круг. На этом отрезке так укажем $(k + 1)$ точку $a_{k,1}$, $a_{k,2}$, …, $a_{k,k+1}$, что $a_{k,j}$ лежит строго между $a_{k,j-1}$ и $a_{k,j+1}$ для всех $j = 2, 3, \ldots, k$. Пусть Миша назвал для этих точек расстояния $d_{k,1}, d_{k,2}, \ldots, d_{k,k+1}$ соответственно.

Найдём с помощью циркуля и линейки и укажем такие точки $b_{k,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, что они лежат по ту же сторону от прямой l, что и отмеченный круг, и отстоят от точек $a_{k,j}$ и $a_{k,j+1}$ на расстояния $d_{k,j}$ и $d_{k,j+1}$ соответственно (те индексы j, для которых такую точку $b_{k,j}$ указать невозможно, мы пропускаем).

Докажем, что среди указанных точек $b_{k,j}$ найдётся по крайней мере одна из точек $c_{k,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Действительно, по принципу Дирихле найдутся по крайней мере две точки $a_{k,j}$ и $a_{k,m}$ $(1 \leqslant j < m \leqslant k+1)$, для которых ближайшей из неразгаданных точек будет одна и та же точка $c_{k,i}$ для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Тогда, как нетрудно показать, для любой точки из отрезка $[a_{k,j}, a_{k,m}]$, и в частности для точки $a_{k,j+1}$, точка $c_{k,i}$ также будет являться ближайшей из всех неразгаданных точек. Следовательно, $c_{k,i}$ будет отстоять от точек $a_{k,j}$ и $a_{k,j+1}$ на расстояния $d_{k,j}$ и $d_{k,j+1}$ соответственно, и лежать по ту же сторону от прямой l, что и отмеченный круг. Таким образом, точка $c_{k,i}$ совпадает с одной из указанных нами точек $b_{k,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Итак, не более чем за $2k + 1$ попытки можно заведомо разгадать одну из неразгаданных точек.

Докажем индукцией по n, что действуя указанным выше образом для $k = n, n-1, \ldots, 1$, Коля разгадает все загаданные Мишей точки менее чем за $(n+1)^2$ попытку. Пусть $n = 1$, тогда указанный выше способ позволяет угадать единственную неразгаданную точку за $3 < (n + 1)^2$ попытки. Предположим, что N неразгаданных точек можно заведомо разгадать менее чем за $(N + 1)^2$ попытку. Пусть $n = N + 1$. Разгадаем одну из загаданных Мишей точек указанным выше способом не более чем за $2N + 3$ попытки. Тогда по предположению индукции, все точки могут быть разгаданы менее чем за $(N+1)^2+2N+3 = (N+2)^2$ попыток. Утверждение доказано.

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс (806 работ)

Баллы	Задачи							
	1	2	3а	3б	4	5	6а	6б
0	442	304	474	517	130	671	581	569
1	24	43	137	28	20	27	68	72
2	66	381	195	116	237	7	87	114
3	274	78	—	3	2	32	38	27
4	—	—	—	142	56	17	32	24
5	—	—	—	—	1	15	—	—
6	—	—	—	—	360	37	—	—

7 класс (724 работы)

Баллы	Задачи									
	1	2а	2б	3	4а	4б	4в	5а	5б	6
0	181	597	710	616	696	592	719	708	708	663
1	2	0	6	1	19	3	4	2	10	15
2	1	0	0	2	9	1	0	1	2	8
3	540	127	8	1	—	128	0	0	3	9
4	—	—	—	104	—	—	1	13	1	15
5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8

8 класс (635 работ)

Оценки	Задачи					
	1	2	3	4	5	6
0	77	68	247	295	209	358
$-$	113	302	320	211	412	272
$-.$	1	0	0	27	2	1
$\mp$	31	127	2	58	4	1
$\pm$	10	80	1	18	0	0
$+.$	1	1	1	3	0	0
$+$	402	57	64	23	8	3

9 класс (654 работы)

Оценки	Задачи					
	1	2	3	4	5	6
0	43	203	185	240	255	528
−	109	308	311	376	366	120
−.	22	38	26	6	5	2
∓	43	36	5	6	23	3
+/2	0	2	0	0	1	0
±	32	17	10	6	0	1
+.	23	6	13	10	1	0
+	382	44	104	10	3	0

10 класс (809 работ)

Оценки	Задачи						
	1	2	3	4	5	6а	6б
0	40	330	322	288	263	542	623
−	326	250	373	294	226	246	182
−.	14	37	4	44	16	1	2
∓	28	30	9	53	47	2	1
+/2	0	7	2	0	1	0	0
±	15	74	11	21	140	3	0
+.	22	18	7	33	19	3	0
+	364	63	81	76	97	11	1
+!	0	0	0	0	0	1	0

11 класс (1246 работ)

Оценки	Задачи						
	1	2	3	4а	4б	5	6
0	143	26	386	547	627	32	642
−	528	967	619	576	564	1146	572
∓	86	141	126	88	50	48	30
±	72	74	29	15	3	6	1
+	417	38	86	20	2	14	1

Информация о наборе в специализированные школы и классы на 2005/2006 учебный год

Школа, адрес, телефон, адрес в Интернете		Набираемые классы	Сроки приёма
№ 2 ул. Фотиевой, 18 http://www.sch2.ru http://www.school2.ru	137 17 69 137 69 31	7 физ.-мат.; 8 физ.-мат., прогр.; *добор* в 9 и 10	Приём заявл.: 15 марта–15 апр.; экзам.: апр.–май
№ 17 ул. Введенского, 28	420 98 11 429 00 66	7 мат.; *добор* в 8 мат.	Собеседование по ср. в 16.00
№ 25 Университетский пр., 7 http://school-25.nm.ru	939 39 35 938 00 25	8 мат., экон.; 10 мат., экон., соц.-гум.	С 21 по 30 марта
№ 54 ул. Доватора, 5/9	245 99 72 245 54 25	8 мат., гум.; 9 мат.	апрель–май
№ 57 Мал. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 http://www.sch57.msk.ru	291 85 72 291 54 58	8 мат.; 9 мат., гум.	Мат.: по ср. и сб. с 26 марта; гум.: по пн. с 4 апр.
№ 91 ул. Поварская, 14 http://www.91.ru	290 35 58	9 мат.	Собеседование в апреле
№ 179 ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 http://179.mioo.ru	292 48 51 292 01 05	7 естест.-научн.; 8 мат.-физ.-инф.; 9 мат.	Март–апрель
№ 218 Дмитровское ш., 5а http://218.nm.ru sch218.edu@mtu-net.ru	976 19 85 976 03 20 976 40 87	8 инд. уч. пл. (углуб. изуч. мат., физ., инф., биол., хим., рус. и ин. яз.); *добор* в 9 и 10	Запись на собеседование с 15 марта
№ 463 Судостроительная ул., 10, к. 1 http://www.abitu.ru/schools/school463.esp	312 33 51 112 34 19	8 физ.-мат.; 5 гимназ.	5 кл.: март–июнь, 8 кл.: 12 марта в 13.00
№ 520 ул. Винокурова, 19 http://s520.mosuzedu.ru	123 60 50 123 63 60	9 биол.; *Добор* в 10 биол.	2 апр. в 17.30 на Биол. фак. МГУ (ауд. М-1)
№ 1101 ул. Академика Варги, 34 http://shkola1101.narod.ru sch1101@mtu-net.ru	339 77 39	7 мат.; *добор* в 8, 9, 10 мат.	Апрель, по ср. с 15.00
№ 1134 ул. Раменки, 15, к. 1 sch1134@mtu-net.ru	932 08 01 932 00 00	9 физ.-мат.; *добор* в 10 физ.-мат.	Апрель–май
№ 1511 Пролетарский пр., 6, к. 3 http://www.1511.ru nauka1511@fromru.com	324 29 21	9, 10 физ.-мат.; 10 гум.	Приём заявл. с 24 февр. по 1 марта; собесед.: март
№ 1514 ул. Крупской, 12 gym1514@yandex.ru http://www.1september.ru/ru/gim1514	131 80 38 131 80 33	5 гимн.; 8 мат., гум.; 9 культуролог.; *добор* в 8, 9, 10	Конец марта–май
№ 1538 Новотушинский пр., 8, к. 2	751 14 91	5 гимназ.; *добор* в 8, 10 мат.-экон., гум.	Приём заявл. с 1 марта; экзам.: март–апрель
№ 1543 ул. 26-ти Бакинских Комиссаров, 3, к. 5 http://www.1543.ru	433 16 44 434 26 44	8 мат., гум., биол., физ.-хим.; 5 гимназ.; *добор* в 9, 10	Март–апрель

Окончание на 4-й стр. обложки

Окончание. Начало на 3-й стр. обложки

№ 1580 (и **537**) Балаклавский пр., 6а http://www.1580.ru	316 59 66 316 50 22	8 физ.-мат. (школа 537); 10, 11 физ.-мат.	Запись на экзам.: апрель–март
2007 ул. Горчакова, 9, к. 1. http://www.fmsh2007.ru	716 29 35 716 27 51	7, 8 физ.-мат.	Собесед. с 10 марта по чт. в 16.00
«Интеллектуал» Кременчугская ул., 13	445 52 10	5, 7, 10 с угл. изуч. осн. предм. *Добор* в 6, 8, 9.	Запись на экзам. с февраля
СУНЦ МГУ Кременчугская ул., 11 http://www.pms.ru	445 11 08	10 физ.-мат., хим. биол.; 11 физ.-мат.	Московский рег.: 17 апр. письм., 24 апр. устн.; друг. рег.: апрель–май

Более полная и свежая информация о наборе в специализированные школы и классы на сайте МЦНМО http://www.mccme.ru/schools/

Расписание мероприятий 13 марта 2005 года

Время	Мероприятие	Место проведения (аудитория)			
		8 класс	9 класс	10 класс	11 класс
12^{00}	Разбор задач	ДК	02	01	16–24
13^{00}	Показ работ	13–06 13–11	14–08	16–10 16–24	12–05 12–06 12–07
14^{00}	Лекция	01			
16^{00}	Торжественное закрытие, награждение победителей	ДК МГУ			

Награждение наградами награждённых, не награждённых наградами на награждении будет происходить по средам с 16^{00} до 18^{00} в комн. 303 МЦНМО (Бол. Власьевский пер., 11, ст. м. «Кропоткинская» или «Смоленская»; http://www.mccme.ru/, mmo@mccme.ru, тел. 241 12 37).