Всероссийская математическая олимпиада

II этап **8 класс** 14.12.2008

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. Известно, что $x^2 + y^2 = 19$, $xy = 3$. Какие значения может принимать $x + y$?

2. В равнобокой трапеции одно из оснований в три раза больше другого. Угол при большем основании равен $45°$. Покажите, как разрезать эту трапецию на три части и сложить из них квадрат. Обоснуйте решение.

3. По кругу стоит **101** коробка, в каждой из которых лежат черные и белые шарики. На каждой коробке написано, сколько в ней черных шариков и сколько белых. Петя хочет переложить из каждой коробки по одному шарику в следующую (по часовой стрелке) коробку так, чтобы обе надписи на каждой из коробок стали неверными. Сможет ли он это сделать?

4. В остроугольном треугольнике ABC BH — высота, AM — медиана. Угол MCA в два раза больше угла MAC, $BC = 10$ см. Найдите AH.

5. Прямоугольник разделен на квадратики со стороной **1** см. В каждом квадратике записано число (не обязательно целое) так, что сумма чисел в каждой строке равна **1**, а сумма чисел в каждом столбце равна **2**. Может ли площадь прямоугольника оказаться равной **2008** см^2?

6. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно выбрать так, чтобы сумма любых трех из них была простым числом?

Всероссийская математическая олимпиада

II этап **9 класс** 14.12.2008

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. Известно, что значение выражения $((x+2x)\cdot 3x-4x):5x$ не изменится, если стереть все скобки. Чему равен x?

2. В треугольнике ABC A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Известно, что A_1A и B_1B — биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите углы треугольника ABC.

3. В каждой клетке таблицы 3×3 записано число. Произведение чисел в любом столбце и в любой строке равно 1, а произведение чисел в любом квадрате 2×2 равно 2. Определите, какие числа записаны в таблице.

4. В трапеции $ABCD$: $AB=BC=CD$. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Окружность, описанная около треугольника ABO, пересекает основание AD в точке E. Докажите, что $BEDC$ — ромб.

5. Сумма трёх различных чисел равна шести, а сумма их попарных произведений равна девяти. Докажите, что эти числа положительные.

6. Дед Мороз пришёл в детский сад раздавать конфеты. Он обнаружил, что, хотя мальчиков в саду больше, чем девочек, он может все конфеты раздать поровну мальчикам, а может все конфеты раздать поровну девочкам. Дед Мороз, разумеется, раздал конфеты всем детям — каждому досталось по три. А если бы он и впрямь стал раздавать конфеты только девочкам, сколько бы получила каждая?

Региональный тур Всероссийской олимпиады школьников по математике
для 9-11 классов состоится 23 и 24 января 2009 года
на него приглашаются победители и призеры окружных олимпиад этого года.

LXII Московская математическая олимпиада (для 8–11 классов)
пройдет в МГУ 15 марта 2009 года. Начало в 10.00. Приглашаются все желающие!
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo

Всероссийская математическая олимпиада

II этап **10 класс** 14.12.2008

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. Найдите значение $x-y$, если $x^3-y^3=45$ и $xy(x-y)=6$.

2. Ромб и равнобокая трапеция описаны около одной и той же окружности и имеют одинаковые площади. Сравните их острые углы.

3. Решите уравнение

$$(x+1)^{99}+(x+1)^{98}(x+2)+(x+1)^{97}(x+2)^2+\ldots+(x+2)^{99}=0.$$

4. В некотором натуральном числе переставили цифры. Докажите, что если сумма полученного числа с исходным равна 10^{2008}, то исходное число делится на 5.

5. В произвольный треугольник вписана окружность. Проведем три касательные к ней, параллельно сторонам треугольника. Докажите, что периметр образовавшегося шестиугольника не превосходит $\frac{2}{3}$ периметра исходного треугольника.

6. Алиса и Базилио украли у Буратино чемодан. Замок на чемодане должен открыться, если три колесика на нем (каждое из которых может занимать одну из восьми допустимых позиций) установлены в определенной комбинации. Однако, в силу ветхости механизма, чемодан откроется, если любые два колесика из трех поставлены в правильное положение. Базилио утверждает, что он сможет открыть чемодан не более чем за 32 попытки. Прав ли он? (Попыткой называется установка какой-либо комбинации колесиков.)

Всероссийская математическая олимпиада

II этап **11 класс** 14.12.2008

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. Сколько корней имеет квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

если $|a + c| = |b|$, а числа a и c различны?

2. Решите уравнение

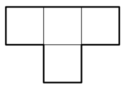
$$\sin x + \sin^3 x + 2008 \sin^5 x = \cos 2x + \cos^3 2x + 2008 \cos^5 2x.$$

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сравните расстояния от вершины A до плоскостей A_1BD и C_1BD. Обоснуйте ответ.

4. Последовательность чисел строится следующим образом. Первое число в ней равно **2**. Каждое последующее число равно сумме кубов цифр предыдущего числа. Вася утверждает, что среди чисел этой последовательности встретятся два одинаковых числа, Коля, — что этого никогда не произойдет. Кто из них прав?

5. Точка M — середина хорды AB. Хорда CD пересекает AB в точке M. На отрезке CD как на диаметре построена полуокружность. Точка E лежит на этой полуокружности и ME — перпендикуляр к CD. Найдите угол AEB.

6. Можно ли расставить в клетках шахматной доски натуральные числа от **1** до **64** так, чтобы сумма чисел в любой фигуре вида (см. рис.) была кратна **5**?



Региональный тур Всероссийской олимпиады школьников по математике
для 9-11 классов состоится 23 и 24 января 2009 года
на него приглашаются победители и призеры окружных олимпиад этого года.

LXII Московская математическая олимпиада (для 8–11 классов)
пройдет в МГУ 15 марта 2009 года. Начало в 10.00. Приглашаются все желающие!
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru/mmo