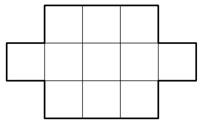
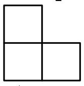
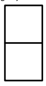
5 класс



5.1. Покажите, как разрезать фигуру, изображенную на рисунке, на несколько трехклеточных уголков  и доминошек . Фигурки можно поворачивать. Достаточно привести один способ разрезания.

Ответ: см. рисунок 5.1.
Ответ единственный с точностью до симметрии.

\+ *верный ответ*

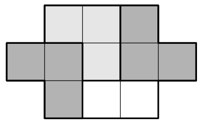


Рис. 5.1

5.2. Расставьте скобки в примере $7 \cdot 9 + 12 : 3 - 2 = 23$ так, чтобы равенство стало верным.
Ответ: $(7 \cdot 9 + 12) : 3 - 2 = 23$.

Если приведено верное равенство с «лишними» скобками, то задача решена верно.

\+ *верный ответ*

5.3. Найдите все натуральные числа, при делении которых на 5 в частном получится то же самое число, что и в остатке. Ответ обоснуйте.
Ответ: 6, 12, 18 24.

При делении на пять могут получаться остатки 0, 1, 2, 3, 4. Тогда, зная, что частное равно остатку, можно восстановить искомые числа:

Остаток	Частное	Исходное число
0	0	$0 \cdot 5 + 0 = 0$
1	1	$1 \cdot 5 + 1 = 6$
2	2	$2 \cdot 5 + 2 = 12$
3	3	$3 \cdot 5 + 3 = 18$
4	4	$4 \cdot 5 + 4 = 24$

Поскольку ноль не является натуральным числом, то искомых чисел — четыре.

\+ *верное обоснованное решение*
$\pm$ *верное обоснованное решение, но не отброшен ноль*
$\pm$ *верные рассуждения, но допущена одна арифметическая ошибка*
$\mp$ *приведен только верный ответ*
$-$ *приведен только ответ, в котором есть ошибки*

5.4. На новогоднем карнавале Мальвина получила подарок. Буратино считает, что ей подарили красный бантик, Пьеро уверен, что это голубой бантик, а Артемон говорит, что подарены белые туфельки. Оказалось, что каждый из них верно указал либо вид подарка, либо его цвет. Какой подарок получила Мальвина? Ответ обоснуйте.
Ответ: белый бантик.

Предположим, что Артемон угадал вид подарка (туфли), тогда Пьеро и Буратино угадали его цвет. Поскольку они назвали разные цвета, то такого быть не может.
Следовательно, Артемон угадал цвет подарка (белый), значит Пьеро и Буратино угадали его вид (бантик).

\+ *верное обоснованное решение*
$+/2$ *приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию*
$\mp$ *приведен только верный ответ*

5.5. У Карлсона было две полные банки варенья. Одна из банок в три раза больше другой. Когда в маленькой банке осталось 2 литра варенья, а в большой — 13 литров, Карлсон долил доверху маленькую банку из большой. В результате в большой банке осталась половина первоначального количества варенья. Найдите объем банок с вареньем.
Ответ: в большой банке было 18 литров, а в маленькой — 6 литров.

Первый способ. Пусть в большой банке содержится 6 частей варенья, тогда в маленькой банке — 2 части варенья. Половина от большой банки — 3 части варенья. 13 литров большой банки и 2 литра малой составляют вместе половину объема большой банки и весь объем маленькой банки (то есть, 5 частей). Значит, 5 частей варенья имеют объем 15 литров. Тогда 1 часть — 3 литра, следовательно, в большой банке было 18 литров, а в маленькой — 6 литров.
Рассуждения можно подкрепить рисунком.

Второй способ. Пусть из большой банки в маленькую перелили x литров варенья. Тогда в большой банке стало $(13 - x)$ литров, а в маленькой $(2 + x)$ литров. Следовательно, объем большой банки $2(13 - x)$. Зная, что объем маленькой банки составляет треть от объема большой, составим уравнение: $3(x + 2) = 2(13 - x)$. Решая уравнение, получим, что $x = 4$.
Тогда объем большой банки равен $2(13 - 4) = 18$ (л), а объем маленькой банки равен $4 + 2 = 6$ (л).

\+ *верное обоснованное решение*
$+/2$ *приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию*
$\mp$ *приведен только верный ответ*

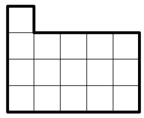
6 класс

6.1. На доске по порядку записаны числа: 1 2 3 4 5. Расставьте между некоторыми из них знаки арифметических действий и скобки так, чтобы значение полученного выражения было равно 50. Достаточно привести один способ расстановки.

Ответ: приведем несколько возможных способов решения: $(1+2+3+4)\cdot 5 = 50$, $(1\cdot 2\cdot 3+4)\cdot 5 = 50$, $1\cdot(2\cdot 3+4)\cdot 5 = 50$, $1\cdot 2+3+45 = 50$.

$+$ *приведен любой верный способ расстановки*

6.2. Фигуру, изображенную на рисунке, разрежьте на две фигуры, из которых можно сложить квадрат (разрешается поворачивать и переворачивать фигуры). Найдите какие-нибудь **три различных** решения этой задачи. В каждом случае покажите, как нужно разрезать и как нужно сложить.



Приведем некоторые из возможных решений, см. рисунки 6.2 а-д.

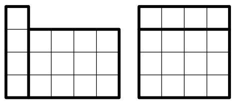


Рис. 6.2а

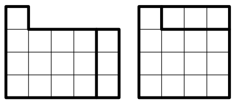


Рис. 6.2б

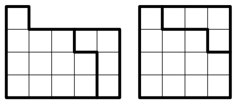


Рис. 6.2в

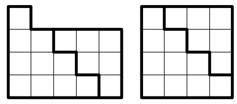


Рис. 6.2г

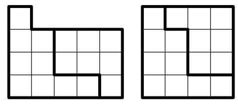


Рис. 6.2д

Возможны и другие способы решения (в том числе, и разрезания не по линиям сетки).

$+$ *приведены три верных способа разрезания и складывания*

$+/2$ *приведены два верных способа разрезания и складывания*

$\mp$ *приведен один верный способ разрезания и складывания*

$-$ *показано, как разрезать, но не показано, как сложить*

6.3. Пока Дима пробегает три ступеньки, Лёша пробегает пять ступенек. Дима побежал с восьмого этажа, а Лёша одновременно с ним — с двенадцатого этажа. Кто из них быстрее добежит до первого этажа?

Ответ: быстрее добежит Лёша.

Первый способ. Пока Дима пробегает 3 этажа, Лёша пробегает 5 этажей, значит, когда Дима пробежит 6 этажей, Лёша пробежит 10 этажей. Следовательно, на втором этаже они будут одновременно. Так как Лёша бежит быстрее Димы, то на первый этаж Лёша прибежит первым.

Второй способ. Диме надо пробежать 7 промежутков между этажами, а Лёше — 11. На 3 промежутка, пробегаемых Димой, приходится 5 промежутков, пробегаемых Лёшей. Значит, надо сравнить дроби $\frac{7}{3}$ и $\frac{11}{5}$. Так как $\frac{7}{3} = \frac{35}{15}$, а $\frac{11}{5} = \frac{33}{15}$, то $\frac{7}{3} > \frac{11}{5}$. Таким образом, Дима будет бежать дольше, то есть, Лёша прибежит первым.

$+$ *верное обоснованное решение*

$+/2$ *при втором способе решения сравниваются дроби* $\frac{8}{3}$ *и* $\frac{12}{5}$ *(то есть, неверно подсчитано, сколько этажей нужно пробежать до* 1 *этажа)*

$\mp$ *приведены разумные соображения, не доведенные до верного ответа*

$-$ *приведен только верный ответ*

6.4. Мальчики шестого класса принесли на весенний бал по букету из 7 тюльпанов. Так как на всех одноклассниц букетов не хватило, они составили новые букеты по 5 тюльпанов и подарили их девочкам и классной руководительнице. Сколько девочек в этом классе, если всего учеников в нем больше, чем 20, но меньше, чем 30?

Ответ: в классе 13 девочек.

Общее количество тюльпанов кратно 7 и кратно 5. То есть их может быть 35, 70, 105 и т. д. Число 35 не является решением, так как в этом случае мальчиков — 5, а девочек (вместе с классной руководительницей) — 7, то есть общее количество детей меньше 20. Число 70 является решением, так как в этом случае получается, что в классе 10 мальчиков и 14 девочек (вместе с классной руководительницей). Число 105 не является решением, так как в этом случае мальчиков — 15, а девочек (вместе с классной руководительницей) — 21, то есть в классе — больше 30 детей. По тем же соображениям все числа, большие 105, не являются решением.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *приведен верный ответ, проверено, что он удовлетворяет условию, но не доказано, что других решений нет*

$+/2$ *приведены верные рассуждения, но в ответе получено* 14

$\mp$ *приведен только верный ответ*

6.5. Буратино зарыл на Поле Чудес золотую и серебряную монету. На следующее утро рядом с каждой золотой монетой лежало еще 2 золотые монеты, а рядом с каждой серебряной — еще 5 серебряных монет. Кот Базилио утверждает, что на Поле Чудес так происходит всегда, и что однажды он зарыл на Поле Чудес несколько монет, а через четыре дня откопал ровно 1000 монет. Могло ли такое быть?

Ответ: нет, не могло.

Заметим, что за ночь число золотых монет утраивается, а число серебряных монет возрастает в 6 раз. Это значит, что следующим утром общее количество монет делится на 3 (независимо от того, сколько их было). Следовательно, в любое утро общее количество монет должно делиться на 3, а 1000 на 3 не делится.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *приведены разумные соображения, не доведенные до верного ответа*

$-$ *приведен только верный ответ*

7 класс

7.1. Решите уравнение: $(1-(2-x):3)\cdot 4=5$.

Ответ: $2,75$.

Последовательно получим: $1-(2-x):3=1,25$; $(2-x):3=-0,25$; $2-x=-0,75$; $x=2,75$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *верный ход решения, но допущена одна арифметическая ошибка*

$-$ *приведен только ответ*

7.2. На левом рисунке изображен куб, а на правом — его развертка. Нарисуйте данную развертку, указав на ней буквы У и К в правильном положении.

Ответ: см. рис. 7.2.

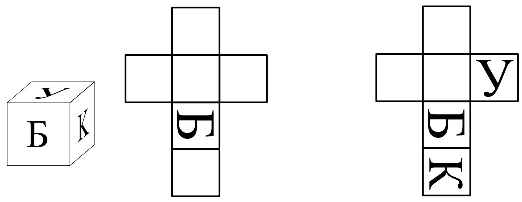


Рис. 7.2

$+$ *верно указаны обе буквы в правильном положении*

$\pm$ *верно указаны места букв, но одна из них находится в неправильном положении*

$\mp$ *верно указаны места букв, но обе находятся в неправильном положении*

$\mp$ *одна из букв находится на своем месте и в правильном положении, а другая буква не на своем месте*

7.3. Дан угол AOB, равный 15°. От луча OB отложили угол BOC, равный 50°, а затем от луча OC отложили угол COK, равный 43°. Чему может быть равна величина угла AOK?

Ответ: 8°; 22°; 78°; 108°.

I вариант. $\angle AOK=\angle AOB+\angle BOC+\angle COK=108^\circ$ (см. рис. 7.3а).

II вариант. $\angle AOK=\angle BOC+\angle COK-\angle AOB=78^\circ$ (см. рис. 7.3б).

III вариант. $\angle AOK=\angle AOB+\angle BOC-\angle COK=22^\circ$ (см. рис. 7.3в).

IV вариант. $\angle AOK=\angle AOB+\angle COK-\angle BOC=8^\circ$ (см. рис. 7.3г).

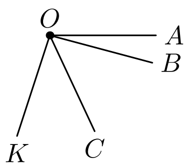


Рис. 7.3а

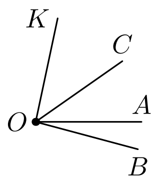


Рис. 7.3б

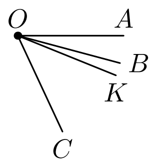


Рис. 7.3в

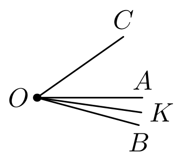


Рис. 7.3г

От участников не требуется обосновывать отсутствие других случаев.

$+$ *верно приведены четыре возможных варианта*

$\pm$ *верно приведены только три возможных варианта*

$+/2$ *верно приведены только два возможных варианта*

$\mp$ *верно приведен только один из возможных вариантов*

7.4. У Малыша была банка с вареньем. В первый раз Карлсон съел 20% варенья из банки, а во второй — 20% того, что осталось. После этого фрекен Бок долила в банку 25% того, что в ней еще оставалось. В результате этого в банке стало варенья на пол-литра меньше, чем было первоначально (до того, как Карлсон начал есть варенье). Сколько литров варенья было в банке первоначально?

Ответ: $2,5$ литра.

Первый способ. Пусть сначала в банке было x литров варенья. После того, как Карлсон в первый раз съел варенье, в банке осталось $0,8x$ литров варенья. Во второй раз в банке осталось $0,8\cdot 0,8x=0,64x$ литра варенья. Когда фрекен Бок долила варенье, в банке стало $0,64x+0,16x=0,8x$ литров варенья, то есть, на $0,2x$ литра меньше, чем было первоначально, что по условию составляет $0,5$ литра варенья. Тогда $0,2x=0,5$; $x=2,5$.

Второй способ. Можно сразу составить уравнение: $(x-0,2x)\cdot 0,8+0,25\cdot(x-0,2x)\cdot 0,8=x-0,5$, решением которого является $x=2,5$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *верное решение, но в конце допущена арифметическая ошибка, не нарушающая логики решения*

$+/2$ *уравнение составлено, но не решено*

$\mp$ *приведены верные соображения, но уравнение не составлено, либо приведен только верный ответ*

7.5. Можно ли подобрать такие целые числа a и b, для которых $ab(a+b)=200700002008$?

Ответ: нет, нельзя.

Условимся, что все буквы в решении обозначают целые числа.

Так как сумма цифр числа 200700002008 равна 19, то 200700002008 не делится на 3. Значит, ни одно из чисел a, b, $a+b$ не делится на три. Числа a и b не могут давать разные остатки от деления на три, иначе $a+b$ делится на три. Поэтому возможны только два варианта: 1) $a=3k+1$, $b=3p+1$ или 2) $a=3k+2$, $b=3p+2$.

Заметим, что число 200700002008 дает остаток 1 как при делении на 3, так и при делении на 9. Тогда:

1) Если $a=3k+1$, $b=3p+1$, то $a+b=3m+2$, тогда $ab(a+b)$ при делении на три дает остаток 2, а число 200700002008 — остаток 1. Следовательно, этот случай невозможен.

2) Если $a=3k+2$, $b=3p+2$, то $a+b=3(k+p)+4$, тогда число $ab(a+b)=(3k+2)(3p+2)(3(k+p)+4)=(9kp+6(k+p)+4)(3(k+p)+4)=27kp(k+p)+18(k+p)^2+36(k+p)+36kp+16=9n+7$, то есть, при делении на 9 дает остаток 7, а число 200700002008 — остаток 1. Следовательно, и этот случай невозможен.

Таким образом, чисел a и b, удовлетворяющих равенству $ab(a+b)=200700002008$, не существует.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *верное решение, но в преобразованиях допущена арифметическая ошибка, не нарушающая логики решения*

$\mp$ *установлено только, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на 3*

$-$ *приведен только ответ*

8 класс

8.1. Известно, что $x^2+y^2=19$, $xy=3$. Какие значения может принимать $x+y$?

Ответ: 5 или -5.

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=19+6=25$, следовательно, $x+y=5$ или $x+y=-5$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *найден только один ответ*

$-$ *приведен только ответ*

8.2. В равнобокой трапеции одно из оснований в три раза больше другого. Угол при большем основании равен $45°$. Покажите, как разрезать эту трапецию на три части и сложить из них квадрат. Обоснуйте решение.

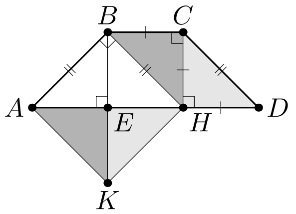


Рис. 8.2а

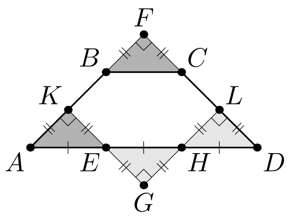


Рис. 8.2б

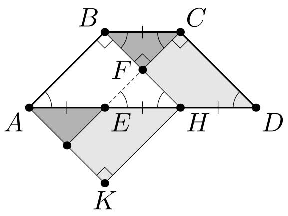


Рис. 8.2в

Первый способ. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (см. рис. 8.2а). Проведем высоты BE и CH. Так как трапеция равнобокая, то $AE=DH=\dfrac{AD-BC}{2}=\dfrac{3BC-BC}{2}=BC$. В прямоугольном треугольнике CHD острый угол равен $45°$, поэтому этот треугольник — равнобедренный. Треугольник BCH равен треугольнику CHD (по двум катетам). Из треугольников ABH, BCH и CHD можно сложить квадрат $ABHK$ (см. рис. 8.2а).

Второй способ. Пусть $ABCD$ — данная трапеция. Выберем точки E и H на основании AD так, что $AE=EH=DH$ (см. рис. 8.2б). Опустим из точек E и H высоты EK и HL на боковые стороны трапеции. F — точка пересечения прямых AB и CD, G — точка пересечения прямых KE и LH. Тогда треугольники AKE, HLD, BFC и EGH — равные прямоугольные равнобедренные. Следовательно, из треугольников AKE, HLD и шестиугольника $KBCLHE$ можно сложить квадрат $KFLG$ (см. рис. 8.2б).

Третий способ. Пусть $ABCD$ — данная трапеция. Выберем точки E и H на основании AD так, что $AE=EH=DH$ (см. рис. 8.2в). Пусть F — точка пересечения отрезков CE и BH. Поскольку $BC=HD=AE$ и $AD||BC$, то $ABCE$ и $BCDH$ — параллелограммы. Следовательно, $\angle CBH=\angle BCE=45°$, то есть, $\angle BFC=90°$. Следовательно, треугольники BFC и EFH — равные прямоугольные равнобедренные. Кроме того, треугольники ABH и ECD — равные прямоугольные равнобедренные. Таким образом, из треугольника BFC и четырехугольника $FCDH$ можно сложить треугольник ECD, а из треугольников ECD и ABH можно сложить квадрат $ABHK$ (см. рис. 8.2в).

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *верно показано, как разрезать и как сложить, но не приведены обоснования*

8.3. По кругу стоит 101 коробка, в каждой из которых лежат черные и белые шарики. На каждой коробке написано, сколько в ней черных шариков и сколько белых. Петя хочет переложить из каждой коробки по одному шарику в следующую (по часовой стрелке) коробку так, чтобы обе надписи на каждой из коробок стали неверными. Сможет ли он это сделать?

Ответ: нет, не сможет.

Пусть из какой-то коробки в следующую переложен белый шарик. Тогда в эту коробку из предыдущей надо обязательно переложить черный шарик, иначе надпись на ней останется верной. Аналогично, если из какой-то коробки переложен черный шарик, то из предыдущей в нее должен быть переложен белый. Значит, цвета переложенных шариков должны чередоваться. Начнем с какой-то коробки и пройдем полный круг. Так как количество коробок нечетно, то цвет шарика, переложенного в первую коробку, будет таким же, как цвет переложенного из нее. Противоречие.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *указано только, что если из коробки вынут черный шарик, то положить в нее надо белый (или наоборот)*

$-$ *приведен только верный ответ*

8.4. В остроугольном треугольнике ABC BH — высота, AM — медиана. Угол MCA в два раза больше угла MAC, $BC=10$ см. Найдите AH.

Ответ: 5 см.

Проведём отрезок HM (см. рис. 8.4а). Он является медианой в прямоугольном треугольнике BHC, поэтому равен половине BC. Пусть $\angle MAC=\alpha$, тогда $\angle MCA=2\alpha$. Так как $MC=MH$, то треугольник HMC равнобедренный, следовательно $\angle MHC=\angle MCH=2\alpha$. Так как угол MHC — внешний для треугольника AHM, то $\angle AMH=\angle MHC-\angle MAH=\alpha$. Таким образом, треугольник AHM равнобедренный, то есть $AH=HM=\dfrac{BC}{2}=5$ (см).

Доказать, что $HM=\dfrac{1}{2}BC$ *можно и по-другому. Например, продлим медиану* AM *на ее длину:* $DM=AM$ *(см. рис. 8.4б). Тогда* $ABDC$ *— параллелограмм,* BH *— его высота. Проведем высоту* CP*, тогда* $BHCP$ *— прямоугольник,* M *— точка пересечения его диагоналей, поэтому* $HM=\dfrac{1}{2}BC$.

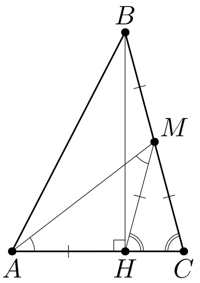


Рис. 8.4а

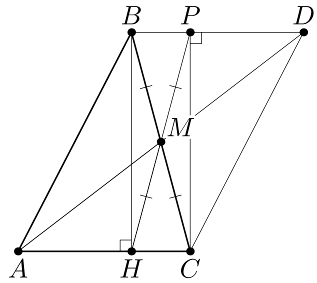


Рис. 8.4б

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *обоснованно только, что* $HM = BC/2$

$-$ *приведен только верный ответ*

8.5. Прямоугольник разделен на квадратики со стороной 1 см. В каждом квадратике записано число (не обязательно целое) так, что сумма чисел в каждой строке равна 1, а сумма чисел в каждом столбце равна 2. Может ли площадь прямоугольника оказаться равной 2008 см^2?

Ответ: нет, не может.

Пусть в прямоугольнике a строк и b столбцов, тогда его площадь: $ab = 2008$. Заметим, что сумма всех чисел в прямоугольнике, с одной стороны, равна a, а с другой стороны, равна $2b$. Следовательно, $a = 2b$, тогда $2b^2 = 2008$, $b^2 = 1004$, но 1004 не является квадратом натурального числа.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *без обоснования утверждается, что одна сторона прямоугольника вдвое больше другой*

$-$ *приведен только верный ответ*

8.6. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно выбрать так, чтобы сумма любых трех из них была простым числом?

Ответ: 4 числа.

Одним из примеров четырех чисел, удовлетворяющих условию задачи, служат числа 1, 3, 7, 9. Действительно, числа $1+3+7=11$, $1+3+9=13$, $1+7+9=17$, $3+7+9=19$ являются простыми.

Предположим, что удалось выбрать пять чисел. Рассмотрим остатки этих чисел при делении на 3. Если среди остатков есть три одинаковых, то сумма соответствующих им чисел делится на 3. Если же трех одинаковых остатков нет, то каждый из остатков 0, 1 и 2 должен присутствовать. Тогда сумма трех чисел, имеющих различные остатки от деления на 3, делится на 3. При этом эта сумма не равна 3, так как все числа — различные и натуральные. Значит, эта сумма — составное число.

Существуют и другие примеры, например, 3, 7, 9, 31 *и т. д.*

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *приведена верная оценка без примера*

$\pm$ *не оговаривается специально, что сумма чисел больше трёх*

$\mp$ *приведен верный ответ и пример*

$-$ *приведен только верный ответ*

9 класс

9.1. Известно, что значение выражения $((x+2x)\cdot 3x-4x):5x$ не изменится, если стереть все скобки. Чему равен x?

Ответ: $x=\dfrac{2}{15}$.

Из условия задачи получим, что $((x+2x)\cdot 3x-4x):5x = x+2x\cdot 3x-4x:5x$. При $x=0$ обе части уравнения теряют смысл, а при $x\neq 0$ оно преобразуется в уравнение $\dfrac{9x-4}{5}=x+6x^2-\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow 30x^2-4x=0$, откуда $x=\dfrac{2}{15}$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *верный ответ не упрощен (например,* $\dfrac{4}{30}$, $\dfrac{0,4}{3}$, $\dfrac{1}{7,5}$, *и т. д.)*

$\mp$ *допущена вычислительная ошибка*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$-$ *в ответ включен ноль*

9.2. В треугольнике ABC A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Известно, что A_1A и B_1B — биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: все углы по $60°$.

A_1B_1 и A_1C_1 — средние линии треугольника ABC, поэтому $A_1B_1||AB$ и $A_1C_1||AC$ (см. рис. 9.2). Далее можно рассуждать по-разному.

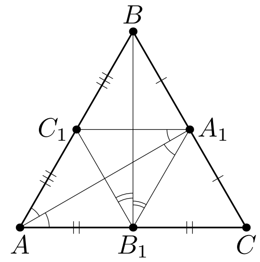


Рис. 9.2

Первый способ. Следовательно, $\angle BAA_1=\angle AA_1B_1=\angle AA_1C_1=\angle A_1AC$. Таким образом, в треугольнике ABC AA_1 является медианой и биссектрисой, а потому он равнобедренный ($AB=AC$). Аналогично, BB_1 — также медиана и биссектриса треугольника ABC, поэтому $CA=CB$. Таким образом, треугольник ABC равносторонний.

Второй способ. $AB_1A_1C_1$ — параллелограмм, в котором диагональ является биссектрисой угла. Следовательно, $AB_1A_1C_1$ — ромб, то есть, $A_1B_1=A_1C_1$. Аналогично, $BA_1B_1C_1$ — ромб, то есть, $A_1B_1=B_1C_1$. Таким образом, треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний, значит, треугольник ABC также равносторонний.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *при первом способе рассуждения использовано, но не доказано, что медианы треугольника* ABC *являются его биссектрисами*

$\mp$ *при втором способе рассуждения использовано, но не доказано, что четырехугольники* $AB_1A_1C_1$ *и* $BA_1B_1C_1$ *являются ромбами*

$-$ *приведен только ответ*

9.3. В каждой клетке таблицы 3×3 записано число. Произведение чисел в любом столбце и в любой строке равно 1, а произведение чисел в любом квадрате 2×2 равно 2. Определите, какие числа записаны в таблице.

Ответ: см. рис. 9.3а.

2	$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{4}$	16	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	2

Рис. 9.3а

Обозначим числа в таблице буквами так, как это покзано на рисунке 9.3б. Тогда $(def)\cdot(ghi)=1\cdot 1=1$. И $efhi=2$. Следовательно, $dg=\dfrac{1}{2}$. Так как $adg=1$, то $a=2$. Аналогичным образом доказывается, что $c=g=i=2$. Тогда $b=d=f=h=\dfrac{1}{4}$. Поэтому $e=16$.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Рис. 9.3б

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *найдены не все числа или допущены арифметические ошибки*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

9.4. В трапеции $ABCD$: $AB=BC=CD$. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Окружность, описанная около треугольника ABO, пересекает основание AD в точке E. Докажите, что $BEDC$ — ромб.

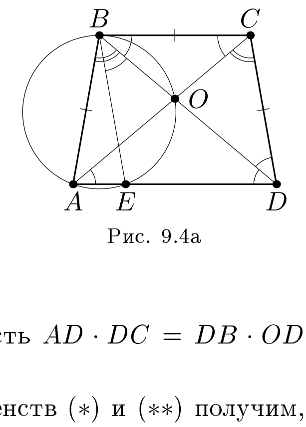


Рис. 9.4а

Первый способ. Используя свойства равнобокой трапеции и условие $BC=CD$, получим: $\angle BDC=\angle DBC=\angle BCA=\angle CAD$ (см. рис. 9.4а). Кроме того, углы CAD и DBE вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу OE, значит, $\angle CAD=\angle DBE$. Таким образом, $\angle BDC=\angle DBE$, следовательно $BE||CD$. Тогда $BEDC$ — параллелограмм с равными соседними сторонами. Следовательно, $BEDC$ — ромб.

Второй способ. Так как $AD||BC$ и $BC=CD$, то $\angle ADB=\angle CBD=\angle CDB$ (см. рис. 9.4а). Кроме того, из свойств равнобокой трапеции вытекает, что $\angle ABD=$ $=\angle ACD$. Тогда $\triangle ADB\sim\triangle ODC$ (по двум углам), следовательно, $\dfrac{AD}{OD}=\dfrac{DB}{DC}$, то есть $AD\cdot DC=DB\cdot OD$ $(*)$.

Так как DA и DB — секущие к окружности, то $DA\cdot DE=DB\cdot DO$ $(**)$. Из равенств $(*)$ и $(**)$ получим, что $DE=DC=BC$. Кроме того, $DE||BC$, поэтому $BEDC$ — параллелограмм с равными соседними сторонами. Следовательно, $BEDC$ — ромб.

Третий способ. Проведем $BK||CD$, тогда $BKDC$ — ромб. Следовательно, BD — биссектриса угла KBC. Так как $BC||AD$, то $\angle CBD = \angle BDA$. Так как $BC = CD$, то $\angle CBD = \angle CDB$. Так как трапеция равнобокая, то $\angle CBO = \angle OCA$, а из того, что $AB = BC$, следует, что $\angle BAC = \angle BCA$. Следовательно, $\angle BAC = \angle CAD$. Поскольку $\angle OBK = \angle OAK$, то точки A, B, O и K лежат на одной окружности, то есть, точка K совпадает с точкой E.

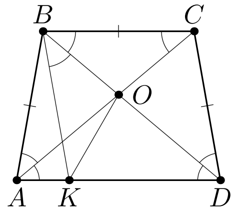


Рис. 9.4б

Заметим, что окружность пересекает основание AD только если это большее основание, иначе она пересечёт его продолжение. Однако утверждение задачи верно в обоих случаях; первый способ доказательства без изменения годится в обеих ситуациях, а во втором способе, если $BC > AD$, то равенство накрест лежащих углов заменяется свойством противоположных углов вписанного четырёхугольника.

Обоснование того, что AD — большее основание, от участника не требуется.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *частичные продвижения в решении*

9.5. Сумма трёх различных чисел равна шести, а сумма их попарных произведений равна девяти. Докажите, что эти числа положительные.

Пусть $a + b + c = 6$ и $ab + bc + ca = 9$.

Первый способ. Выразим ab: $ab = 9 - c(a + b) = 9 - c(6 - c) = 9 - 6c + c^2 = (c - 3)^2 \geqslant 0$. Аналогично доказывается, что $bc \geqslant 0$ и $ac \geqslant 0$. Докажем, что среди трех данных чисел нет нулей. Предположим, что $a = 0$, тогда из равенства $ab = (c - 3)^2$ следует, что $c = 3$, но тогда из условия $a + b + c = 6$ вытекает, что и $b = 3$, а это противоречит тому, что числа различны. Таким образом, $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $c \neq 0$. Тогда из полученных неравенств следует, что числа a, b и c одного знака. Так как $a + b + c > 0$, то $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Второй способ. Выразим из первого равенства a и подставим во второе: $a = 6-b-c$. Тогда $b^2+(c-6)b+(c-3)^2 = 0$. Рассматривая это равенство как квадратное уравнение относительно b, получим, что его дискриминант равен $D = (c-6)^2 - 4(c-3)^2 = -3c^2 + 12c = -3c(c-4)$. Если $c < 0$, то $D < 0$ и уравнение не имеет решений. Если $c = 0$, то $b = 3$, тогда и $a = 3$, что противоречит тому, что числа различные. Таким образом, $c > 0$. Выражая аналогичным образом переменные b и c, получим, что $a > 0$ и $b > 0$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *обоснованно все, кроме случая, когда одно из чисел равно* 0

$\mp$ *доказано только, что произведение двух чисел неотрицательно*

$\mp$ *приведенное рассуждение использует неверное утверждение, что «квадрат любого числа положителен»*

9.6. Дед Мороз пришёл в детский сад раздавать конфеты. Он обнаружил, что, хотя мальчиков в саду больше, чем девочек, он может все конфеты раздать поровну мальчикам, а может все конфеты раздать поровну девочкам. Дед Мороз, разумеется, раздал конфеты всем детям — каждому досталось по три. А если бы он и впрямь стал раздавать конфеты только девочкам, сколько бы получила каждая?

Ответ: 12 конфет.

Пусть в детском саду m мальчиков и d девочек, а у Деда Мороза $N = 3(m + d)$ конфет.

Первый способ. По условию, N делится на m и на d, то есть $N = mk$ и $N = dl$ (k и l — натуральные числа). Тогда $m = \dfrac{N}{k}$ и $d = \dfrac{N}{l}$. Подставляя в $N = 3(m + d)$, получим, что $N = \dfrac{3N}{k} + \dfrac{3N}{l}$. Отсюда $kl = 3(k + l) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow kl - 3k - 3l + 9 = 9 \Leftrightarrow (k - 3)(l - 3) = 9$. Так как $m > d$, то $k < l$, то есть, $k - 3 < l - 3$. Следовательно, $k - 3 = 1$ и $l - 3 = 9$. Таким образом $l = 12$, то есть девочки получили бы по 12 конфет.

Второй способ. Если бы Дед Мороз раздал все конфеты мальчикам, то каждый из них получил бы $\dfrac{3(m + d)}{m} =$ $= 3 + \dfrac{3d}{m}$ конфет. Следовательно, $\dfrac{3d}{m}$ — целое число. Так как $d < m$, то $\dfrac{3d}{m} < 3$.

Если $\dfrac{3d}{m} = 1$, то есть $m = 3d$, то каждая девочка получит $\dfrac{3(m + d)}{d} = \dfrac{3 \cdot 4d}{d} = 12$ конфет. Если $\dfrac{3d}{m} = 2$, то есть $2m = 3d$, то каждая девочка получит $\dfrac{3(m + d)}{d} = \dfrac{3 \cdot 2,5d}{d} = 7,5$ конфет, что противоречит условию.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *верный ход решения с неполными обоснованиями (например: $3 \leqslant \dfrac{N}{d} \leqslant \dfrac{9}{3} + 3$ получено верно и обосновано, а далее делается неверный вывод: «т. к. $\dfrac{9}{2} + 3 \notin N$, то $\dfrac{N}{d} = 3$»)*

$-$ *приведен только ответ (или ответ получен на числовом примере)*

10 класс

10.1. Найдите значение $x-y$, если $x^3-y^3=45$ и $xy(x-y)=6$.

Ответ: $x-y=3$.

Первый способ. Умножим второе равенство на 3 и вычтем из первого: $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=27 \Leftrightarrow (x-y)^3=27 \Leftrightarrow x-y=3$.

Второй способ. Пусть $x-y=a$, $xy=b$. Тогда $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x-y)((x-y)^2+3xy)=a(a^2+3b)$. Следовательно, $\begin{cases} ab=6 \\ a^3+3ab=45, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b=\dfrac{6}{a}, \\ a^3+18=45 \end{cases}$

Тогда $a^3=27$, то есть, $a=3$.

Возможно также вычислить значения x и y, решив исходную систему уравнений, но это приводит к весьма трудоемким вычислениям.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *верный ход решения, но допущены вычислительные ошибки*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

10.2. Ромб и равнобокая трапеция описаны около одной и той же окружности и имеют одинаковые площади. Сравните их острые углы.

Ответ: острые углы ромба и трапеции равны.

Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь вычисляется по формуле $S=p\cdot r$, где p — полупериметр, r — радиус окружности. Тогда из условия следует, что ромб и трапеция имеют одинаковые периметры. Кроме того, в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, поэтому сторона ромба равна боковой стороне данной трапеции.

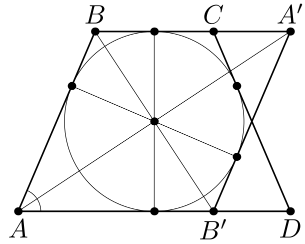


Рис. 10.2

Завершить рассуждения можно по-разному.

Первый способ. Расположим ромб и трапецию так, чтобы сторона AB ромба являлась также боковой стороной трапеции (см. рис. 10.2). Тогда смежные с AB стороны ромба и смежные с AB стороны трапеции (основания) лежат на касательных к окружности, поэтому углы ромба и трепеции при вершинах A и B совпадают.

Второй способ. Пусть a — длина общей стороны ромба и трапеции, α и β — острые углы ромба и трапеции соответственно. Поскольку высота ромба и высота трапеции равна диаметру вписанной окружности, то $\sin\alpha=\dfrac{a}{2r}$ и $\sin\beta=\dfrac{a}{2r}$. Так как α и β — острые углы, то $\alpha=\beta$.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *доказано только, что боковая сторона трапеции равна стороне ромба*

$-$ *приведен только ответ*

10.3. Решите уравнение $(x+1)^{99}+(x+1)^{98}(x+2)+(x+1)^{97}(x+2)^2+\ldots+(x+2)^{99}=0$.

Ответ: $-1,5$.

Первый способ. Воспользуемся формулой $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, где $a=x+1$, $b=x+2$, $n=100$. Так как и $a-b=-1\neq 0$, то умножив обе части исходного уравнения на $(x+1)-(x+2)=-1$ получим, что $(x+1)^{100}-(x+2)^{100}=0 \Leftrightarrow |x+1|=|x+2|$. Решая это уравнение (на координатной прямой или используя то, что $|a|=|b| \Leftrightarrow a=\pm b$ или возводя обе части уравнения в квадрат или раскрывая модули на различных промежутках), получим, что $x=-1,5$.

Второй способ. Непосредственной проверкой убедимся, что $x=-1$ не является корнем данного уравнения. Тогда левая часть уравнения представляет собой сумму первых ста членов геометрической прогрессии, у которой первый член $b_1=(x+1)^{99}$, а знаменатель $q=\dfrac{x+2}{x+1}$. Используя формулу $S_n=\dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, преобразуем исходное уравнение к виду $\dfrac{(x+1)^{99}\left(\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{100}-1\right)}{\dfrac{x+2}{x+1}-1}=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{100}=1 \Leftrightarrow x=-1,5$.

Третий способ. Сгруппируем слагаемые по два и вынесем общий множитель:

$$(x+1)^{98}(2x+3)+(x+1)^{96}(x+2)^2(2x+3)+\ldots+(2x+3)(x+2)^{98}=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(2x+3)((x+1)^{98}+(x+1)^{96}(x+2)^2+\ldots+(x+2)^{98})=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} 2x+3=0, \\ (x+1)^{98}+(x+1)^{96}(x+2)^2+\ldots+(x+2)^{98}=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-1,5 \\ \begin{cases} x+1=0, \\ x+2=0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x=-1,5.$$

$+$ *верное обоснованное решение*

$\pm$ *не проверено, что $a-b\neq 0$ (или $x\neq 0$)*

$\mp$ *верный ход решения, но допущены вычислительные ошибки*

$-$ *приведен только верный ответ*

10.4. В некотором натуральном числе переставили цифры. Докажите, что если сумма полученного числа с исходным равна 10^{2008}, то исходное число делится на 5.

Докажем, что исходное число делится на 10, откуда будет следовать требуемое утверждение. Из условия следует, что последняя цифра суммы равна 0. Если последняя цифра исходного числа a не равна 0, то ее сумма с последней цифрой полученного числа b равна 10, а суммы цифр в остальных 2007 разрядах равны 9. Следовательно, удвоенная сумма цифр числа a равна $10 + 9 \cdot 2007$. Полученное число — нечетное, в то время как удвоенная сумма цифр числа a должна быть четной.

+ *верное обоснованное решение*

10.5. В произвольный треугольник вписана окружность. Проведем три касательные к ней, параллельно сторонам треугольника. Докажите, что периметр образовавшегося шестиугольника не превосходит $\dfrac{2}{3}$ периметра исходного треугольника.

Пусть ABC — данный треугольник, I — центр вписанной окружности, касательные PQ, MN и TR параллельны сторонам треугольника (см. рис. 10.5).

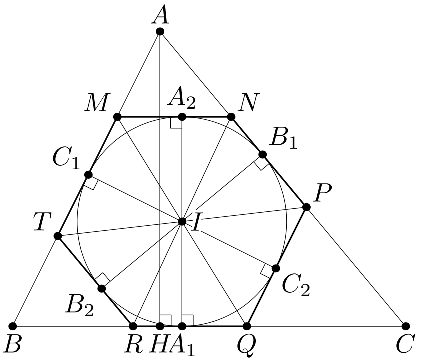


Рис. 10.5

Из попарной параллельности касательных к окружности следует, что образовавшийся шестиугольник $MNPQRT$ центрально-симметричен (I — центр симметрии). Следовательно, его противоположные стороны попарно равны.

Введем обозначения: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $MN = RQ = a_1$, $NP = NR = b_1$, $TM = PQ = c_1$, r — радиус вписанной окружности, P — периметр треугольника ABC.

Требуется доказать, что $2(a_1+b_1+c_1) \leqslant \dfrac{2}{3}(a+b+c) \Leftrightarrow a_1+b_1+c_1 \leqslant \dfrac{P}{3}$. Воспользуемся тем, что треугольники AMN и ABC подобны с коэффициентом $k_a = \dfrac{a_1}{a} = \dfrac{h_a - 2r}{h_a}$ (где $h_a = AH$ — высота). Следовательно, $a_1 = a\Big(1 - \dfrac{2r}{h_a}\Big)$. Так как $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}Pr = \dfrac{1}{2}ah_a$, то $\dfrac{2r}{h_a} = \dfrac{2a}{P}$. Таким образом $a_1 = a\Big(1 - \dfrac{2a}{P}\Big)$.

Аналогично, $b_1 = b\Big(1 - \dfrac{2b}{P}\Big)$ и $c_1 = c\Big(1 - \dfrac{2c}{P}\Big)$. Следовательно, $a_1 + b_1 + c_1 \leqslant \dfrac{P}{3} \Leftrightarrow a + b + c - \dfrac{2(a^2+b^2+c^2)}{P} \leqslant \dfrac{P}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2P}{3} \leqslant \dfrac{2(a^2+b^2+c^2)}{P} \Leftrightarrow P^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$ $(*)$. Неравенство $(*)$ можно доказать различными способами, например,

1) Используя неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным, получим: $\dfrac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}} \Leftrightarrow \dfrac{(a+b+c)^2}{9} \leqslant \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$.

2) $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geqslant 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0$.

Отметим, что периметр шестиугольника ***равен*** $\dfrac{2}{3}$ *периметра треугольника ABC только в том случае, когда треугольник ABC — равносторонний. Это следует из доказательства неравенства $(*)$.*

+ *верное обоснованное решение*

± *решение сведено к доказательству алгебраического неравенства типа $*$, которое не доказано*

∓ *доказано только, что в заданном шестиугольнике равны противоположные стороны*

− *доказательство дано только для правильного треугольника*

10.6. Алиса и Базилио украли у Буратино чемодан. Замок на чемодане должен открыться, если три колесика на нем (каждое из которых может занимать одну из восьми допустимых позиций) установлены в определенной комбинации. Однако, в силу ветхости механизма, чемодан откроется, если любые два колесика из трех поставлены в правильное положение. Базилио утверждает, что он сможет открыть чемодан не более чем за 32 попытки. Прав ли он? (Попыткой называется установка какой-либо комбинации колесиков.)

Ответ: Базилио прав.

Обозначим колесики буквами A, B и C, а их допустимые положения — натуральными числами от 1 до 8. Тогда некоторая тройка натуральных чисел (a, b, c) задает код замка (a отвечает положению колесика A и т. д.).

Итак, пусть набрана некая комбинация (a, b, c), открывающая чемодан. Тогда (*по принципу Дирихле*) какие-то две из трех цифр a, b и c попадут <u>или</u> в набор $(1, 2, 3, 4)$ <u>или</u> в набор $(5, 6, 7, 8)$. Рассмотрим первый случай. Покажем, что мы сумеем открыть чемодан не более чем за 16 попыток.

Допустим, что мы знаем, какие две из цифр 1, 2, 3, 4 являются цифрами рассматриваемой комбинации, какая из них стоит раньше, но не знаем места, на которых они стоят. Обозначим эти цифры m и n. В силу неисправности замка, он должен открыться за три попытки: $(m, n, *)$, $(*, m, n)$, $(m, *, n)$ (звездочка означает, что вместо нее можно поставить любую цифру).

Составим таблицу размером 3×16, заполненную цифрами 1, 2, 3, 4 таким образом, чтобы *любая упорядоченная пара (m, n), такая, что $1 \leqslant m \leqslant 4$ и $1 \leqslant n \leqslant 4$ встречалась хотя бы в одном столбце.*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
B	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
C	1	2	3	4	4	1	2	3	3	4	1	2	2	3	4	1

Если замок не открылся после перебора приведенных 16 комбинаций, то две верные цифры из искомой комбинации попали в четверку $(5, 6, 7, 8)$. Для нее составляется аналогичная таблица, которая отличается от уже приведенной тем, что к каждой цифре прибавляется 4.

$+$ *верное обоснованное решение*

$-$ *приведен только верный ответ*

11 класс

11.1. Сколько корней имеет квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, если $|a+c|=|b|$, а числа a и c различны?
Ответ: 2 корня.

Первый способ. $D=b^2-4ac=|a+c|^2-4ac=(a-c)^2$. Так как числа a и c различны, то $D>0$, то есть уравнение имеет два корня.

Второй способ. $|a+c|=|b| \Leftrightarrow a+c=\pm b \Leftrightarrow a+b+c=0$ или $a-b+c=0$. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Тогда $a+b+c=f(1)$, а $a-b+c=f(-1)$. В первом случае уравнение имеет корни 1 и $\frac{c}{a}$, а во втором случае имеет корни -1 и $-\frac{c}{a}$. Корни совпадать не могут, так как $a\neq c$.

$+$ *верное обоснованное решение*
$\mp$ *не использовано условие* $a\neq c$
$-$ *приведен только ответ*

11.2. Решите уравнение $\sin x+\sin^3 x+2008\sin^5 x=\cos 2x+\cos^3 2x+2008\cos^5 2x$.
Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\frac{\pi}{6}+2\pi m$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, где $\{m,n,k\}\subset Z$.

Пусть $f(t)=t+t^3+2008t^5$. Тогда уравнение имеет вид $f(\sin x)=f(\cos 2x)$. Функция $f(t)$ является суммой трех возрастающих функций, поэтому также является возрастающей. Следовательно, $f(\sin x)=f(\cos 2x)\Leftrightarrow \sin x=\cos 2x$.

Решаем полученное уравнение: $2\sin^2 x+\sin x-1=0\Leftrightarrow \sin x=-1$ или $\sin x=\frac{1}{2}$.

Возможны другие варианты записи правильного ответа.

$+$ *верное обоснованное решение*
$\mp$ *обоснован переход к уравнению* $\sin x=\cos 2x$, *но допущены ошибки при его решении*
$\mp$ *не обосновано получение уравнения* $\sin x=\cos 2x$
$-$ *приведен только ответ*

11.3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сравните расстояния от вершины A до плоскостей A_1BD и C_1BD. Обоснуйте ответ.
Ответ: расстояния равны.

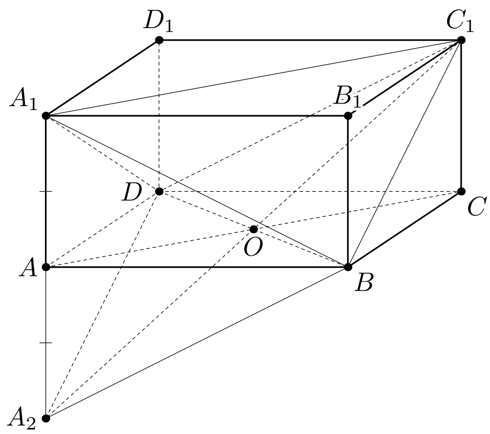


Рис. 11.3

Пусть O — точка пересечения AC и BD (см. рис. 11.3), прямые C_1O и A_1A пересекаются в точке A_2 (обе прямые лежат в плоскости диагонального сечения AA_1C_1C). Тогда A_2 — точка пересечения прямой A_1A с плоскостью C_1BD.

Так как $AO||A_1C_1$ и $AO=\frac{1}{2}A_1C_1$, то AO — средняя линия треугольника $A_1A_2C_1$, следовательно, $A_1A=A_2A$.

Таким образом, точки A_1 и A_2 симметричны относительно плоскости ABC, следовательно, и тетраэдры AA_1BD и AA_2BD симметричны относительно этой плоскости. Расстояния от точки A до плоскостей A_1BD и C_1BD равны длинам высот этих тетраэдров, проведенных из точки A. Следовательно, расстояния от A до плоскостей A_1BD и C_1BD равны.

Возможны другие способы решения, использующие, например, объемы, векторы или координаты.

$+$ *верное обоснованное решение*
$\pm$ *верно использована, но не обоснована симметрия тетраэдров* AA_1BD *и* AA_2BD
$\mp$ *использовано, но не доказано, что* A_2 *принадлежит плоскости* BDC_1
$-$ *приведен только ответ*

11.4. Последовательность чисел строится следующим образом. Первое число в ней равно 2. Каждое последующее число равно сумме кубов цифр предыдущего числа. Вася утверждает, что среди чисел этой последовательности встретятся два одинаковых числа, Коля, — что этого никогда не произойдет. Кто из них прав?
Ответ: прав Вася.

Первый способ. Рассмотрим несколько первых членов этой последовательности: $a_1=2$, $a_2=2^3=8$, $a_3=8^3=512$, $a_4=5^3+1^3+2^3=134$, $a_5=1^3+3^3+4^3=92$, $a_6=9^3+2^3=737$, $a_7=7^3+3^3+7^3=713$, $a_8=7^3+1^3+3^3=371$, $a_9=3^3+7^3+1^3=371$, и т. д. Таким образом, начиная с восьмого члена все члены последовательности равны 371, следовательно, прав Вася.

Второй способ. Докажем, что в заданной последовательности не может встретиться пятизначное число. Пусть $a_n=\overline{xyzu}$, тогда следующее за ним число $a_{n+1}=x^3+y^3+z^3+u^3\leqslant 4\cdot 9^3<4000$. Следовательно, все члены последовательности меньше 4000, а поскольку их бесконечное число, то они когда-нибудь начнут повторяться (принцип Дирихле).

Возможны и другие оценки, доказывающие ограниченность данной последовательности.

$+$ *верное обоснованное решение*
$\pm$ *доказана только ограниченность последовательности, но не пояснено, почему ее члены будут повторяться*
$\mp$ *верно использована ограниченность последовательности, которая не доказана*

11.5. Точка M — середина хорды AB. Хорда CD пересекает AB в точке M. На отрезке CD как на диаметре построена полуокружность. Точка E лежит на этой полуокружности и ME — перпендикуляр к CD. Найдите угол AEB.

Ответ: $\angle AEB = 90°$.

Угол CED — прямой, так как он вписан в окружность и опирается на ее диаметр (см. рис. 11.5). Из прямоугольного треугольника CED: $EM^2 = CM \cdot MD$. Кроме того, по свойству отрезков хорд $CM \cdot MD = AM \cdot MB = AM^2$. Следовательно, $EM = AM = MB$, то есть, в треугольнике AEB медиана EM равна половине стороны AB. Значит, угол AEB — прямой.

Решение не зависит от того, в какую полуплоскость проведена заданная полуокружность. Поэтому рассматривать два случая нет необходимости.

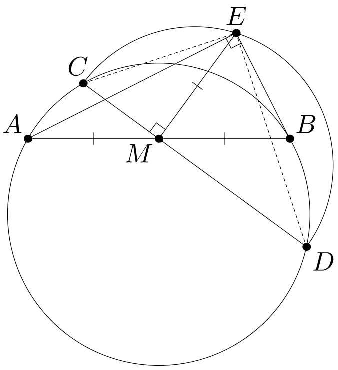
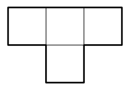


Рис. 11.5

$+$ *верное обоснованное решение*

$-$ *приведен только ответ*

11.6. Можно ли расставить в клетках шахматной доски натуральные числа от 1 до 64 так, чтобы сумма чисел в любой фигуре вида (см. рис.) была кратна 5?



Ответ: нет, нельзя.

Предположим, что указанная расстановка возможна. Рассмотрим пятиклеточную фигуру, у которой центральная клетка окрашена в черный цвет, с расположенными в ней числами a, b, c, d и x (см. рис. 11.6). Пусть $S = a+b+c+d+x$, тогда $a = S-(b+c+d+x)$, $b = S-(a+c+d+x)$, и т. д. Из условия следует, что сумма $b+c+d+x$ делится на 5, $a+c+d+x$ делится на 5, и т. д. Следовательно, числа a, b, c и d имеют одинаковые остатки от деления на 5.

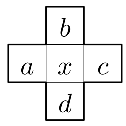


Рис. 11.6

Рассмотрев все такие пятиклеточные фигуры, получим, что все числа, стоящие на белых полях шахматной доски, должны иметь одинаковые остатки от деления на 5. Поскольку белых клеток — 32, а среди чисел от 1 до 64 одинаковые остатки могут иметь не более тринадцати, то получено противоречие.

$+$ *верное обоснованное решение*

$\mp$ *найден и обоснован один из возможных инвариантов, но решение не доведено до конца*

$-$ *приведен только ответ*