11 класс

11.1. При каких значениях c числа $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ могут являться корнями квадратного уравнения $5x^2-3x+c=0$ (α — некоторый угол)?

Ответ: при $c=-1,6$.

Пусть $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ — корни данного квадратного уравнения, тогда из теоремы Виета следует, что $\sin\alpha+\cos\alpha=0,6$. Тогда $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=0,36\Leftrightarrow 1+2\sin\alpha\cos\alpha=0,36\Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha=-0,64\Leftrightarrow\sin\alpha\cos\alpha=-0,32$. Следовательно, $\frac{c}{5}=-0,32$, то есть, $c=-1,6$.

Наличие корней у квадратного уравнения следует из обратной теоремы Виета или из того, что дискриминант получившегося квадратного уравнения положителен.

Корни полученного уравнения действительно являются синусом и косинусом некоторого угла, так как уравнение $\sin\alpha+\cos\alpha=0,6\Leftrightarrow\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{10}$, которое имеет корни.

$+$ *приведены верный ответ и полное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и решение задачи, но не объяснено, почему уравнение* $\cos\alpha+\sin\alpha=0,6$ *имеет корни*

$\mp$ *приведены верные рассуждения, содержащие арифметическую ошибку.*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

11.2. В футбольном турнире участвовало 20 команд (каждая сыграла с каждой по одному матчу). Могло ли в результате оказаться так, что каждая из команд-участниц выиграла столько же матчей, сколько сыграла вничью?

Ответ: нет, не могло.

Пусть суммарное количество побед всех участниц турнира равно n, тогда суммарное количество их поражений также равно n.

Предположим, что у каждой команды такое же количество ничьих, как и побед, тогда суммарное количество ничьих в таблице результатов турнира также равно n. При таком подсчете каждый матч был учтен дважды, то есть сумма всех побед, ничьих и поражений в таблице результатов равна $20\cdot 19$. Но уравнение $3n=20\cdot 19$ не имеет натуральных решений. Противоречие.

$+$ *приведены верный ответ и полное решение*

$\mp$ *верный ответ получен на основании неверного утверждения, что у каждой команды поровну побед, ничьих и поражений*

$-$ *приведен только ответ*

11.3. Укажите точки на поверхности куба, из которых диагональ куба видна под наименьшим углом.

Ответ: все вершины куба, кроме концов этой диагонали.

Рассмотрим одну из диагоналей куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, например, A_1C (см. рис. 11.3б, в). Заметим, что диагональ A_1C видна из любой вершины куба (кроме точек A_1 и C) под прямым углом (это следует из теоремы о трех перпендикулярах или из теоремы, обратной теореме Пифагора). Докажем, что из других точек поверхности куба эта диагональ видна под тупым углом. Возможны различные способы рассуждений.

Первый способ. Опишем вокруг куба сферу. Из сказанного выше следует, что диагональ A_1C куба является ее диаметром. Докажем, что из любой точки P внутри сферы (не лежащей на диаметре) этот диаметр виден под тупым углом. Действительно, проведем сечение сферы плоскостью A_1PC и получим окружность. Из точек, лежащих внутри окружности, диаметр виден под тупым углом (∗), что и требовалось.

(∗) *Этот планиметрический факт можно доказывать различными способами, например, использовать то, что угол* A_1PC *— внешний для прямоугольного треугольника* PEC *(см. рис. 11.3а).*

Для удобства изложения других способов рассуждений рассмотрим произвольную точку P на поверхности куба, отличную от его вершин, и расположенную, например, в грани $ABCD$.

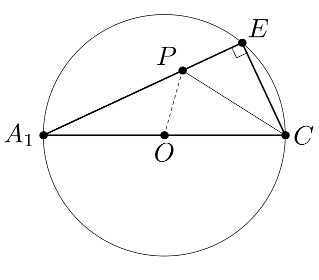

Рис. 11.3а

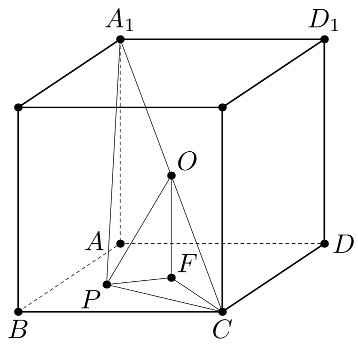

Рис. 11.3б

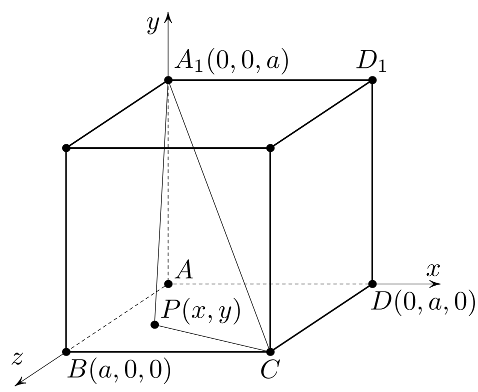

Рис. 11.3в

Второй способ. Пусть F — центр грани $ABCD$, являющийся проекцией середины O диагонали A_1C на грань $ABCD$ (см. рис. 11.3б).

Так как $FP<FC$, то по свойству наклонных и их проекций $OP<OC=\frac{1}{2}A_1C$.

Докажем, что угол A_1PC — тупой. Построим в плоскости A_1PC окружность на отрезке A_1C как на диаметре, тогда из доказанного неравенства следует, что точка P лежит внутри этой окружности, а из точек, лежащих внутри окружности, диаметр виден под тупым углом (∗), что и требовалось.

Третий способ. Прямая AP — проекция прямой A_1P на плоскость ABC (см. рис. 11.3б). Применим к прямым PA_1, PA и PC формулу трех косинусов: $\cos\angle A_1PC=\cos\angle A_1PA\cdot\cos\angle APC$.

Треугольник A_1PA — прямоугольный, значит, угол A_1PA — острый, то есть $\cos\angle A_1PA > 0$. Угол APC — тупой, так как точка P лежит внутри окружности с диаметром AC $(*)$, значит, $\cos\angle APC < 0$. Следовательно, $\cos\angle A_1PC < 0$, то есть угол A_1PC — тупой, что и требовалось.

Четвертый способ. Введем в пространстве декартову систему координат так, что $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A_1(0;0;a)$ (см. рис. 11.3в).

Пусть $P(x;y;0)$, тогда $0 < x \leqslant a$ и $0 < y \leqslant a$ (оба равенства одновременно выполняться не могут). Найдем стороны треугольника A_1PC: $PC^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2$, $PA_1^2 = PA^2 + AA_1^2 = x^2 + y^2 + a^2$, $A_1C^2 = 3a^2$. Тогда $PA_1^2 + PC^2 - A_1C^2 = 2x^2 - 2ax + 2y^2 - 2ay = 2x(x-a) + 2y(y-a) < 0$.

Следовательно, $\cos\angle A_1PC = \dfrac{PA_1^2 + PC^2 - A_1C^2}{2PA_1\cdot PC} < 0$, то есть угол A_1PC — тупой, что и требовалось.

От учащихся не требуется доказательство вспомогательного планиметрического утверждения (если оно сформулировано).

$+$ *приведены верный ответ и полное решение*

$\pm$ *приведено полное решение, но из ответа не исключены концы рассматриваемой диагонали*

11.4. Докажите, что если выражение $\dfrac{x}{x^2+x+1}$ принимает рациональное значение при некотором значении x, то и выражение $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ принимает рациональное значение при том же значении x.

Пусть $\dfrac{x}{x^2+x+1} = a$, где a — рациональное число.

1) Если $a = 0$, то $x = 0$, тогда $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1} = 0$, то есть рационально.

2) Если $a \neq 0$, то $x \neq 0$, тогда $\dfrac{x}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{x+\frac{1}{x}+1} = a$, откуда $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} - 1$.

Следовательно, $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1+\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - 1} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}-1\right)^2 - 1} = \dfrac{a^2}{1-2a}$.

Заметим, что $a \neq \dfrac{1}{2}$, иначе $x + \dfrac{1}{x} = 1$, что невозможно ни при каких x. При любых других рациональных значениях a выражение $\dfrac{a^2}{1-2a}$ принимает рациональные значения, что и требовалось.

$+$ *приведено полное решение*

$\pm$ *приведена основная часть решения, но не рассмотрен случай* 1) *и (или) не обосновано, что* $a \neq \dfrac{1}{2}$

11.5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AD; O — точка пересечения его диагоналей AC и BD является центром другой окружности, касающейся стороны BC. Из вершин B и C проведены касательные ко второй окружности, пересекающиеся в точке T. Докажите, что точка T лежит на отрезке AD.

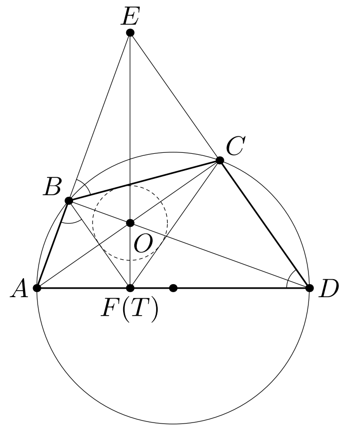

Рис. 11.5а

Первый способ. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке E (см. рис. 11.5а). Заметим, что $\angle ACD = \angle ABD = 90^\circ$ (вписанные углы, опирающиеся на диаметр). Тогда AC и BD — высоты треугольника DAE, а точка O является точкой пересечения высот этого треугольника (*ортоцентром*). Следовательно, EF — еще одна высота треугольника DAE — содержит точку O.

Докажем, что вторая окружность, упомянутая в условии задачи, совпадает с окружностью, вписанной в треугольник BCF.

Воспользуемся вспомогательным утверждением: высоты треугольника DAE являются биссектрисами треугольника BCF (его ортотреугольника) $(**)$. Следовательно, точка пересечения высот треугольника DAE (точка O) является центром окружности, вписанной в треугольник BCF. Тогда вписанная окружность совпадает с окружностью, заданной в условии, поскольку эти окружности имеют общий центр и обе касаются прямой BC.

Таким образом, касательные к окружности, проведенные из точек B и C, являются сторонами треугольника BCF и пересекаются на стороне AD в точке F, то есть точка F совпадает с точкой T. Следовательно, точка T лежит на диаметре AD, что и требовалось.

$(**)$ *Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что* $\angle FBA = \angle EBC$ *(см. рис. 11.5а). Это, в свою очередь, следует из того, что каждый из этих углов равен углу* ADE. *Действительно,* $\angle EBC = 90^\circ - \angle CBD = 90^\circ - \angle CAD = \angle ADE$. *Аналогично, если рассмотреть окружность, проходящую через точки* B, F, D *и* E, *получим, что* $\angle EBC = \angle ADE$.

Другой возможный способ — доказать, что каждый из треугольников ABF *и* BEC *подобен треугольнику* AED.

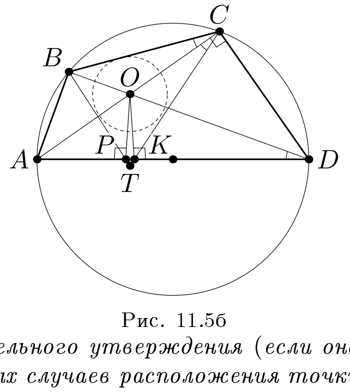

Рис. 11.5б

Второй способ. Пусть точка T не лежит на отрезке AD. Тогда прямая CT пересекает AD в некоторой точке K, а прямая BT пересекает AD в точке P (см. рис. 11.5б).

Используя то, что CA — биссектриса угла BCK и свойство углов, вписанных в окружность, получим: $\angle ACK = \angle BCA = \angle BDA$, следовательно, около четырёхугольника $OCDK$ можно описать окружность. При этом, угол OCD — прямой (вписанный и опирается на диаметр AD). Значит, и угол OKD — также прямой.

Аналогично доказывается, что угол OPA — прямой.

Таким образом, через точку O проходят два перпендикуляра к одной прямой AD, что невозможно. Значит, точки P и K совпадают с точкой T, что и требовалось.

При решении первым способом от учащихся не требуется доказательство вспомогательного утверждения (если оно сформулировано), а при решении вторым способом — не требуется рассмотрения различных случаев расположения точки T *относительно прямой* AD.

+ *верное обоснованное решение*

11.6. Какое наименьшее количество трехклеточных уголков можно разместить в квадрате 8×8 так, чтобы в этот квадрат больше нельзя было поместить ни одного такого уголка?

Ответ: 11.

В каждом квадрате 2×2, по крайней мере, две клетки должны быть покрыты уголками, (иначе в такой квадрат поместится еще один уголок).

Квадрат 8×8 можно разбить на 16 квадратов размером 2×2 каждый, то есть уголками должно быть покрыто не менее тридцати двух клеток, для чего потребуется не менее, чем 11 уголков.

Пример размещения одиннадцати уголков — см. рис. 11.6.

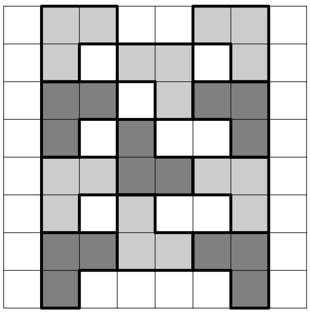

Рис. 116

+ *приведены верный ответ, пример и оценка*

∓ *приведен только верный пример, либо доказано, что уголков не меньше одиннадцати, но пример не приведен*

− *приведен только верный ответ*