8 класс

8.1. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

Ответ: 133.

Так как $1000 = 5^3 \cdot 2^3$, то каждое из чисел в своем разложении на простые множители может содержать только двойки и пятёрки. Заметим, что оба этих множителя не могут присутствовать в разложении одного числа, иначе оно будет делиться на 10. Следовательно, одно из чисел равно 5^3, а другое — 2^3. Тогда их сумма равна: $5^3 + 2^3 = 125 + 8 = 133$.

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$\pm$ *приведено верное рассуждение, верно найдены оба числа, но при вычислении суммы допущена арифметическая ошибка*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

8.2. В треугольнике ABC медиана BM в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол $40°$. Найдите угол ABC.

Ответ: $110°$.

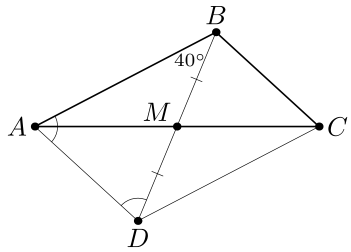

Рис. 8.2

Продлим медиану BM за точку M на ее длину и получим точку D (см. рис. 8.2). Так как $AB = 2BM$, то $AB = BD$, то есть треугольник ABD — равнобедренный. Следовательно, $\angle BAD = \angle BDA = (180° - 40°) : 2 = 70°$.

Четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит, $\angle CBD = \angle ADB = 70°$. Тогда $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 110°$.

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$\pm$ *приведен верный ответ и верные рассуждения, содержащие мелкие погрешности*

$\mp$ *присутствует идея достроения треугольника до параллелограмма, но решение не доведено до конца*

$-$ *приведен ответ, но решение отсутствует*

8.3. Школьный чемпионат по настольному теннису проводили по олимпийской системе. Победитель выиграл 6 партий. Сколько участников турнира выиграло игр больше, чем проиграло? (*На турнире по олимпийской системе участников разбивают на пары. Те, кто проиграл игру в первом туре, выбывают. Тех, кто выиграл в первом туре, снова разбивают на пары. Те, кто проиграл во втором туре, выбывают и т. д. В каждом туре для каждого участника нашлась пара.*)

Ответ: 16.

Так как в каждом туре для каждого игрока нашлась пара и в каждой паре один из игроков выбывал, то общее количество игроков после каждого тура уменьшалось в два раза. Победитель участвовал в каждом туре и побеждал, значит, всего туров было шесть. Так как после шестого тура победитель определился однозначно, то всего участников было $2^6 = 64$. Проигравшие в первом туре имеют одно поражение и ноль побед, проигравшие во втором туре имеют одну победу и одно поражение.

Все вышедшие в третий тур будут иметь по итогам турнира не менее двух побед и не более одного поражения (после которого они выбыли), то есть у них количество побед больше количества поражений. Так как после каждого тура количество участников уменьшалось в два раза, то в третий тур вышло 16 участников.

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$\pm$ *приведен верный ответ и, в целом, верные рассуждения, но не обосновано* ***либо*** *уменьшение количества игроков в два раза после каждого тура,* ***либо*** *количество участников турнира*

$\mp$ *приведет верный ответ, но не обосновано* ***ни*** *уменьшение количества игроков в два раза после каждого тура,* ***ни*** *количество участников турнира*

$\mp$ *приведен верный ответ без обоснований*

8.4. Представьте числовое выражение $2 \cdot 2009^2 + 2 \cdot 2010^2$ в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

Ответ: $4019^2 + 1^2$ или $2911^2 + 2771^2$.

Учащимся достаточно указать один из двух возможных ответов (других ответов не существует).

Покажем, как можно получить первый из приведенных ответов.

Первый способ. Пусть $2009 = a$, тогда $2010 = a + 1$. Получим: $2 \cdot 2009^2 + 2 \cdot 2010^2 = 2a^2 + 2(a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 2 = (2a+1)^2 + 1^2 = 4019^2 + 1^2$.

Второй способ. Воспользуемся формулой $2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$ $(*)$, справедливость которой можно проверить раскрытием скобок в правой части. Получим: $2 \cdot 2009^2 + 2 \cdot 2010^2 = 4019^2 + 1^2$.

Отметим, что формула $(*)$ показывает, что если какое-то целое число N представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел, то и число $2N$ также представимо в виде суммы двух квадратов. Этот факт помогает решить общую задачу о представлении натуральных чисел в виде суммы двух квадратов (задача Ферма–Эйлера, сыгравшая большую роль в развитии теории чисел).

Второй из приведенных ответов можно получить длинным перебором или используя комплексные числа.

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$\pm$ *приведен верный ответ и осуществлена его вычислительная проверка*

$\pm$ *приведена верная формула, но допущена вычислительная ошибка*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

8.5. В равнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BD к боковой стороне. На продолжении основания BC выбрана точка E так, что угол EDB — прямой. Найдите BE, если $CD = 1$.

Ответ: $BE = 2$.

Первый способ. Пусть прямая ED пересекает прямую AB в точке F (см. рис. 8.5а). Тогда в треугольнике EBF биссектриса BD является высотой, следовательно, этот треугольник — равнобедренный: $BE = BF$.

Проведем отрезок DG, параллельный BC (точка G лежит на стороне AB). Так как $\angle DCB = \angle GBC$, то трапеция $CDGB$ является равнобокой, то есть $BG = DC = 1$.

В треугольнике BEF отрезок DG делит пополам сторону EF и параллелен стороне BE. По теореме Фалеса $FG = GB$ (DG — средняя линия треугольника BEF). Следовательно, $BE = BF = 2BG = 2$.

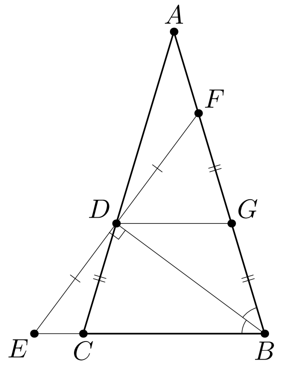

Рис. 8.5а

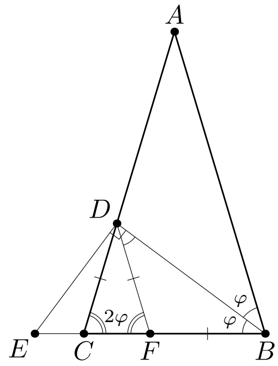

Рис. 8.5б

Второй способ. Пусть F — середина BE, $\angle ABC = \angle ACB = 2\varphi$, тогда $\angle DBE = \varphi$ (см. рис. 8.5б). DF — медиана прямоугольного треугольника BDE, проведённая к гипотенузе, следовательно, $DF = FE = FB$, поэтому, $\angle FDB = \angle DBE = \varphi$. Значит, $\angle DFE = 2\varphi$, то есть треугольник CDF — также равнобедренный.

Следовательно, $BE = 2BF = 2DF = 2CD = 2$.

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$\pm$ *приведены верный ответ и, в целом, верное рассуждение с незначительными пробелами*

$-$ *приведен только ответ*

8.6. На дне рождения у Васи было 10 ребят (включая Васю). Оказалось, что у каждых двух из этих ребят есть общий дедушка. Докажите, что у семи из них есть общий дедушка.

Если у всех десяти ребят есть общий дед, то назовем его *всеобщим*.

Первый способ. Докажем сначала лемму: *либо у ребят есть хотя бы один всеобщий дед, либо на всех есть ровно три деда.*

Доказательство. 1) Если у ребят два всеобщих деда, то лемма доказана.

2) Иначе должны быть двое ребят, назовем их Петей и Ваней, у которых один дед общий, назовем его Андрей, а два других — различные.

Действительно, рассмотрим любых двух ребят. Если у них один дед — общий, а два других различны, то эти ребята и есть Петя и Ваня (см. рис. 8.6а). Если же у них два общих деда, то среди оставшихся ребят есть тот (Петя), у кого один из дедов — другой (иначе на всех ребят есть два всеобщих деда) (см. рис. 8.6б). Тогда Андрей — это общий дед двух ребят и Пети. Значит, Ваня — любой из первых двух выбранных ребят.

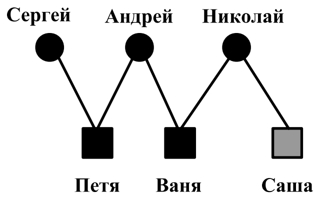

Рис. 8.6а

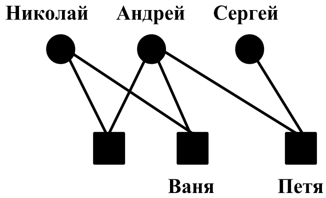

Рис. 8.6б

Пусть второй дед Пети — Сергей, а второй дед Вани — Николай. Если при этом Андрей — всеобщий дед, то лемма доказана. Рассмотрим случай, когда он не всеобщий — тогда среди ребят есть не внук Андрея — назовём его Саша (см. рис. 8.6а). У Саши должен быть общий дед с Ваней — это Николай, и общий с Петей — это может быть только Сергей.

Таким образом: 1) у любого внука Андрея второй дед должен быть Сергеем или Николаем — чтобы были общие деды с Сашей, 2) у любого не внука Андрея деды должны быть те же, что и у Саши — Сергей и Николай. Значит, в этом случае на всех ребят приходится ровно три деда — Андрей, Сергей и Николай. Итак, лемма доказана.

Теперь докажем утверждение задачи. Заметим, что если есть всеобщий дед, то у него целых 10 внуков, и всё доказано. Пусть есть ровно три деда на всех. Попросим каждого внука позвонить своим дедам. Так как у каждого из 10 внуков ровно по два деда, то всего будет сделано ровно 20 звонков. Значит, одному из трёх дедов позвонят не менее семи раз.

Второй способ. Если у ребят не более двух всеобщих дедов, то у каждого из них десять внуков.

Предположим, что на всех ребят есть ровно три деда (не обязательно, что среди них есть всеобщие). Будем изображать дедов точками, а внуков — линиями, которые соединяют эти точки. Тогда три точки соединены десятью линиями. По принципу Дирихле, какие-то две из точек соединены не более, чем тремя линиями. Тогда из третьей точки выходит не менее семи линий. Следовательно, у деда, соответствующего этой точке, будет семь внуков.

Предположим, что на всех ребят есть более трех дедов. По условию задачи, из каждой точки должна выходить хотя бы одна линия и любые две линии должны иметь общую точку. Рассмотрим первую точку, из нее идет линия ко второй точке. Рассмотрим третью точку, по условию задачи линия из нее должна идти к первой или второй точке. Предположим, что она идет к первой точке. Тогда линии из четвертой и последующих точек снова должны идти к первой точке (в противном случае будут две линии, у которых нет общей точки). Значит, будет точка, из которой выходят все линии, то есть, дед, соответствующий этой точке, будет всеобщим.

Таким образом, доказано, что найдется дед, у которого не менее семи внуков.

$+$ *приведено верное решение*

$\pm$ *доказано, что либо есть общий дед всех ребят, либо есть ровно три деда на всех*