9 класс

9.1. Задайте формулой какую-нибудь квадратичную функцию, график которой пересекает оси координат в вершинах прямоугольного треугольника.

Ответ: например, $y = x^2 - 1$.

График этой функции пересекает ось абсцисс в точках $A(-1;0)$ и $B(1;0)$, а ось ординат в точке $C(0;-1)$. Треугольник ABC — прямоугольный с гипотенузой AB.

Можно доказать, что указанным свойством обладают те и только те функции вида $y = ax^2 + bx + c$, *у которых* $ac = -1$. *От учащихся этого не требуется.*

$+$ *приведены верный ответ и верное пояснение (возможно, в виде аккуратного графика)*

$\pm$ *приведена верная формула без пояснений*

$\mp$ *приведен только аккуратный график*

$-$ *приведен только неаккуратный график*

9.2. Коля и Вася за ноябрь получили по 15 оценок: тройки, четвёрки и пятёрки. При этом Коля получил пятёрок столько же, сколько Вася четвёрок, четвёрок столько же, сколько Вася троек, а троек столько же, сколько Вася пятёрок. Оказалось, что средний балл за ноябрь у мальчиков одинаковый. Сколько троек получил Коля в ноябре? (*Средний балл — среднее арифметическое всех оценок.*)

Ответ: 5 троек.

Составим таблицу:

	5	4	3
Коля	x	z	y
Вася	y	x	z

Тогда $x + y + z = 15$, а равенство среднего балла (при одинакомвом количестве оценок) означает, что $5x + 4z + 3y = 5y + 4x + 3z$, откуда $x + z = 2y$, то есть $15 - y = 2y$, откуда $y = 5$.

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$-$ *приведен только ответ*

9.3. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на основании AD. Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.

Первый способ. По теореме об углах, вписанных в окружность, $\angle OBM = \angle OAM$ (см. рис. 9.3а). По определению трапеции $\angle OAM = \angle OCB$. Таким образом, $\angle OBM = \angle OCB$. Аналогично доказывается, что $\angle OCM = \angle OBC$. Складывая полученные равенства, найдём, что $\angle MBC = \angle MCB$, то есть, $BM = CM$.

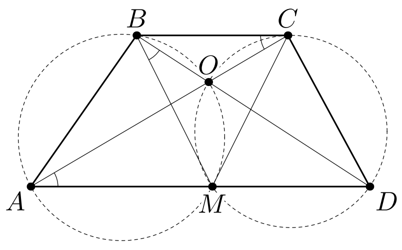

Рис. 9.3а

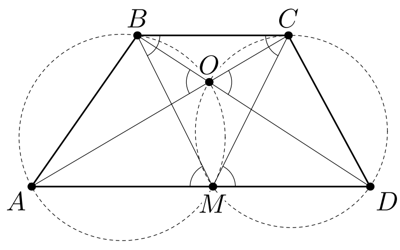

Рис. 9.3б

Второй способ. Рассмотрим цепочку равенств: $\angle CBM = \angle BMA = \angle BOA = \angle COD = \angle CMD = \angle BCM$ (см. рис. 9.3б). Первое и пятое равенства вытекают из параллельности оснований трапеции, второе и четвёртое — из свойства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, третье — равенство вертикальных углов. Из доказанного вытекает, что $\angle CBM = \angle BCM$, то есть, $BM = CM$.

$+$ *приведено верное решение*

$\pm$ *приведено верное решение с незначительными пробелами в обоснованиях*

9.4. Том Сойер взялся покрасить очень длинный забор, соблюдая условие: любые две доски, между которыми ровно две, ровно три или ровно пять досок, должны быть окрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красок потребуется Тому для этой работы?

Ответ: 3 краски.

Двух красок (скажем, белой и красной) не хватит: покрасив доску №1 в белый цвет, Том будет вынужден покрасить в красный цвет доски с номерами 4, 5 и 7. Тогда между красными досками №4 и №7 будет ровно две доски, что нарушает требование условия.

Трёх красок достаточно: Том может покрасить три доски подряд в белый цвет, потом три доски в синий, потом три — в красный, потом снова три — в белый и так далее. При этом между одинаково окрашенными досками будет либо не более одной доски (если они в одной тройке), либо не менее шести (если они в разных тройках), так что условие задачи будет выполнено.

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$\pm$ *приведен верный ответ, доказано, что двух красок не хватит, и приведен пример без пояснения, почему он удовлетворяет условию задачи*

$\mp$ *доказано только, что двух цветов недостаточно, либо приведены только ответ и пример для трех красок*

$-$ *приведен только ответ*

9.5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон BC и AD. В каком отношении она делит диагональ BD?

Ответ: пополам.

Пусть P — середина BC, Q — середина AD, N — середина PQ.

Первый способ. Выберем на прямой AC такие точки K и L (см. рис. 9.5а), что $BK||PQ||DL$. Тогда в треугольнике BCK отрезок PN параллелен основанию и проходит через середину стороны, так что это средняя линия, откуда $BK = 2PN$. Аналогично $DL = 2QN$. Так как $PN = QN$, то $DL = BK$. Поскольку $BK||DL$ и $BK = DL$, то $BKDL$ — параллелограмм, поэтому KL делит BD пополам.

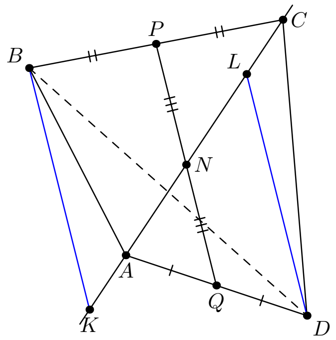

Рис. 9.5а

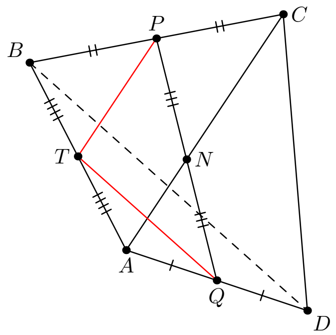

Рис. 9.5б

Второй способ. Пусть T — середина отрезка AB. Проведем отрезки TP и TQ (см. рис. 9.5б). Тогда TP — средняя линия треугольника ABC, следовательно, $TP||AC$. В треугольнике PQT прямая AC делит сторону PQ пополам и параллельна TP, поэтому она пересекает сторону TQ в ее середине. Так как $TQ||BD$, то прямая AC делит пополам отрезок BD.

Третий способ. Снабдим вершины четырёхугольника единичными массами. Тогда центром масс этой системы будет точка N. Но центром масс точек A и C является середина отрезка AC, аналогично и для точек B и D. Значит, N — середина отрезка, соединяющего середины AC и BD. Таким образом, AC делит отрезок BD пополам.

Четвертый способ. Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{d}$. Тогда $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}) = \dfrac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{4}$. По условию, точка N лежит на отрезке AC, то есть $\overrightarrow{AN}$ коллинеарен $\overrightarrow{c}$: $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{c}$. Тогда $\dfrac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{4} = k\overrightarrow{c}$, откуда $\dfrac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{d}}{2} = \dfrac{4k-1}{2} \cdot \overrightarrow{c}$, то есть вектор, с началом в точке A и концом в середине BD, коллинеарен $\overrightarrow{AC}$. Тем самым доказано, что AC делит отрезок BD пополам.

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное решение с незначительными пробелами в обоснованиях*

$-$ *приведен только ответ*

9.6. Дан набор из 2009 чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных чисел, то получится тот же набор. Найдите произведение всех чисел набора.

Ответ: 0.

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2009}$ — числа, составляющие этот набор, а $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2009}$ — их сумма. По условию, если любое число a_k заменить на число $S - a_k$, то получится тот же набор, в частности, сохранится сумма всех чисел, то есть $S = (S - a_1) + (S - a_2) + \ldots + (S - a_{2009})$. Это значит, что $S = 2009S - S$, откуда $S = 0$.

Отсюда вытекает, что замена любого числа на сумму остальных чисел есть замена числа на ему противоположное. То есть вместе с каждым числом в наборе присутствует и число, ему противоположное. Так как количество чисел набора нечетное, то одно из них будет противоположным самому себе, то есть равняться нулю. Значит и произведение всех чисел равно нулю.

$+$ *приведены верное решение и верный ответ*

$\mp$ *доказано только, что сумма чисел набора равна нулю*

$-$ *приведен только ответ, либо решение, основанное на конкретном примере*