Департамент образования города Москвы
Совет ректоров высших учебных заведений Москвы и Московской обл.
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXXIII

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Издательство МЦНМО
Москва, 2010

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу

119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11,
Московская математическая олимпиада,

по адресу электронной почты mmo@mccme.ru
или по телефону (499) 241-12-37.

☞ Материалы данной книги размещены на странице

http://www.mccme.ru/olympiads/mmo/

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).
Все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.) размещены на сайте

http://www.problems.ru

☞ Председатель оргкомитета LXXIII ММО

заместитель директора Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук
профессор *А. Г. Сергеев*

☞ Сборник подготовили:

В. Б. Алексеев, *В. Д. Арнольд*, *А. Г. Банникова*, *М. А. Берштейн*, *А. Д. Блинков*, *П. А. Бородин*, *А. С. Бохенек*, *В. В. Буланкина*, *А. С. Войнов*, *М. А. Волчкевич*, *Т. И. Голенищева-Кутузова*, *Г. Г. Гусев*, *П. С. Дергач*, *С. А. Дориченко*, *М. Е. Жуковский*, *О. М. Заплетина*, *А. А. Заславский*, *А. Я. Канель-Белов*, *А. Л. Канунников*, *Т. В. Караваева*, *В. А. Клепцын*, *А. А. Клячко*, *О. Н. Косухин*, *В. А. Кошелев*, *А. Б. Купавский*, *М. С. Лобанов*, *С. В. Маркелов*, *Г. А. Мерзон*, *И. В. Нетай*, *Н. М. Нетрусова*, *А. В. Окунев*, *В. С. Панфёров*, *В. Ю. Радионов*, *А. М. Райгородский*, *М. А. Раскин*, *И. В. Раскина*, *А. И. Сгибнев*, *И. Н. Сергеев*, *А. К. Толпыго*, *А. С. Трепалин*, *Ю. А. Устиновский*, *В. Г. Ушаков*, *В. П. Филимонов*, *Е. В. Френкель*, *Б. Р. Френкин*, *А. В. Хачатурян*, *А. А. Чернов*, *И. А. Шанин*, *А. В. Шаповалов*, *И. А. Шейпак*, *Д. Э. Шноль*, *Д. Е. Щербаков*, *И. С. Ярославцев*, *И. В. Ященко*.

☞ Проведение олимпиады и издание осуществлены при поддержке фирмы «НИКС», компании «Яндекс» и фонда «Математические этюды».

6 класс

1. На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным кольцам, получится 5 кусков, если по жёлтым — 7 кусков, а если по зелёным — 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трёх цветов? (*А. В. Шаповалов*)

2. В Лесогории живут только эльфы и гномы. Гномы лгут, говоря про своё золото, а в остальных случаях говорят правду. Эльфы лгут, говоря про гномов, а в остальных случаях говорят правду. Однажды два лесогорца сказали:

А: Всё моё золото я украл у Дракона.

Б: Ты лжёшь.

Определите, эльфом или гномом является каждый из них. (*И. В. Раскина*)

3. Поросёнок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы. (*А. В. Шаповалов*)

4. В обменном пункте совершаются операции двух типов:

1) дай 2 евро — получи 3 доллара и конфету в подарок;

2) дай 5 долларов — получи 3 евро и конфету в подарок.

Когда богатенький Буратино пришёл в обменник, у него были только доллары. Когда ушёл — долларов стало поменьше, евро так и не появились, зато он получил 50 конфет. Во сколько долларов обошёлся Буратино такой «подарок»? (*И. В. Раскина*)

5. Саша разрезал шахматную доску 8×8 по границам клеток на 30 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались даже углами (рис. 1). Попытайтесь улучшить его достижение, разрезав доску на большее число прямоугольников с соблюдением того же условия. (*А. В. Шаповалов*)

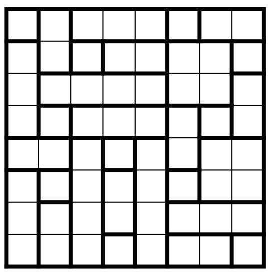


Рис. 1

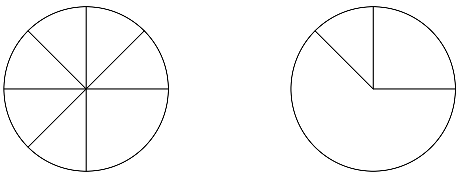
6. На краю круглого вращающегося стола через равные промежутки стояли 30 чашек с чаем. Мартовский Заяц и Соня сели за стол и стали пить чай из каких-то двух чашек (не обязательно соседних). Когда они допили чай, Заяц повернул стол так, что перед каждым опять оказалось по полной чашке. Когда и эти чашки опустели, Заяц снова повернул стол (возможно, на другой угол), и снова перед каждым оказалась полная чашка. И так продолжалось до тех пор, пока весь чай не был выпит. Докажите, что если бы Заяц всегда поворачивал стол так, чтобы его новая чашка стояла через одну от предыдущей, то им бы тоже удалось выпить весь чай (т. е. тоже каждый раз обе чашки оказывались бы полными).

(*И. В. Раскина*)

7 класс

1. У Юры есть калькулятор, который позволяет умножать число на 3, прибавлять к числу 3 или (если число делится на 3 нацело) делить на 3. Как на этом калькуляторе получить из числа 1 число 11? (*Т. И. Голенищева-Кутузова*)

2. На вертикальную ось надели несколько колёс со спицами. Вид сверху изображён на рис. 2, *а*). После этого колёса



а) *б*)

Рис. 2

повернули. Новый вид сверху изображён на рис. 2, *б*). Могло ли колёс быть: а) три; б) два? (*Т. И. Голенищева-Кутузова, В. А. Клепцын, И. В. Ященко*)

3. Маленькие детки кушали конфетки. Каждый съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но всё же больше одной конфеты. Сколько всего конфет было съедено?

(*А. В. Шаповалов*)

4. В конкурсе пения участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трёх исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причём за Петуха и Ворону было в сумме подано 15 голосов, за Ворону и Кукушку — 18 голосов, за Кукушку и Петуха — 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырёх названных им чисел отличается от правильного не более чем на 13. Сколько судей проголосовали за Ворону?

(*И. В. Раскина*)

5. а) Поросёнок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

б) А может ли Наф-Наф добиться, чтобы при этом каждые два квадрата граничили друг с другом? (*А. В. Шаповалов*)

6. Легко разместить комплект кораблей для игры в «Морской бой» на доске 10×10 (рис. 3). А на какой наименьшей

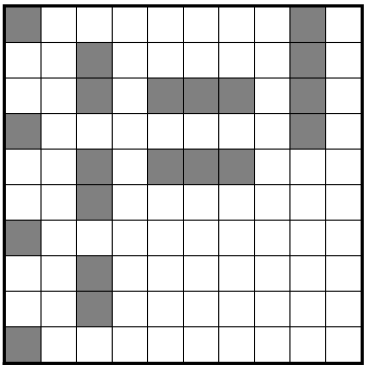


Рис. 3

квадратной доске можно разместить этот комплект? (Напомним, что согласно правилам корабли не должны соприкасаться даже углами.) (*А. Д. Блинков*)

8 класс

1. КУБ является кубом. Докажите, что ШАР кубом не является. (КУБ и ШАР — трёхзначные числа, разные буквы обозначают различные цифры.) (*А. В. Хачатурян*)

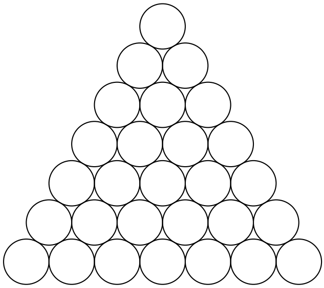


Рис. 4

2. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера (рис. 4). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.

(*А. В. Шаповалов*)

3. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, точка P лежит на стороне BC. Отрезок AP пересекает BM в точке O. Оказалось, что $BO = BP$. Найдите отношение $OM : PC$.

(*М. А. Волчкевич*)

4. Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

(*А. А. Клячко, Е. В. Френкель*)

5. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности. Точки M и N — середины сторон BC и AC соответственно. Известно, что угол AIN прямой. Докажите, что угол BIM — также прямой. (*А. А. Заславский*)

6. В некоторых клетках квадрата 20×20 стоит стрелочка в одном из четырёх направлений. На границе квадрата все стрелочки смотрят вдоль границы по часовой стрелке

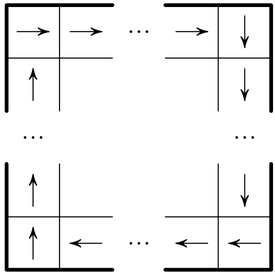


Рис. 5

(рис. 5). Кроме того, стрелочки в соседних (возможно, по диагонали) клетках не смотрят в противоположных направлениях. Докажите, что найдётся клетка, в которой стрелочки нет. (*Т. И. Голенищева-Кутузова, В. А. Клепцын, И. В. Ященко*)

9 класс

1. Съев на пустой желудок трёх поросят и семерых козлят, Серый Волк всё ещё страдал от голода. Зато в другой раз он съел на пустой желудок 7 поросят и козлёнка и страдал уже от обжорства. От чего пострадает Волк, если съест на пустой желудок 11 козлят? (*И. В. Раскина*)

2. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ выбрана точка M. Через эту точку проведён перпендикуляр к прямой CM, который пересекает сторону AD в точке E. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CE. Найдите угол APB. (*А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков*)

3. У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются *товарищами*, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана? (*А. Я. Канель-Белов*)

4. На окружности расставлены 2009 чисел, каждое из которых равно $+1$ или -1, причём не все числа одинаковые. Рассмотрим всевозможные десятки подряд стоящих чисел. Найдём произведения чисел в каждом десятке и сложим их. Какая наибольшая сумма может получиться? (*А. К. Толпыго*)

5. Дана незамкнутая несамопересекающаяся ломаная из 37 звеньев. Через каждое звено провели прямую. Какое наименьшее число различных прямых могло получиться? (*А. К. Толпыго*)

6. Толя хочет получить из данного натурального числа однозначное. Для этого разрешается расставить между цифрами плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить $12345 + 6 + 789 = 13140$). С полученным числом снова разрешается сделать подобную операцию, и так далее. Докажите, что за 10 операций всегда можно получить однозначное число.

(*А. К. Толпыго*)

10 класс

1. Известно, что сумма любых двух из трёх квадратных трёхчленов x^2+ax+b, x^2+cx+d, x^2+ex+f не имеет корней. Может ли сумма всех этих трёхчленов иметь корни?

(*А. Я. Канель-Белов*)

2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=a$ и $BC=b$. Точки M и N лежат на сторонах AB и CD соответственно, причём отрезок MN параллелен основаниям трапеции. Диагональ AC пересекает этот отрезок в точке O. Найдите MN, если известно, что площади треугольников AMO и CNO равны. (*М. А. Волчкевич*)

3. Можно ли, применяя к числу 2 функции sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg в любом количестве и в любом порядке, получить число 2010? (*С. В. Маркелов*)

4. Сумма цифр числа n равна 100. Может ли сумма цифр числа n^3 равняться 100^3? (*А. Я. Канель-Белов*)

5. В неравнобедренном треугольнике две медианы равны двум высотам. Найдите отношение третьей медианы к третьей высоте. (*А. А. Заславский*)

6. На плоскости отметили $4n$ точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1 см. Оказалось, что среди любых $n+1$ точек обязательно есть две, соединённые отрезком. Докажите, что всего проведено не менее $7n$ отрезков. (*А. М. Райгородский*)

11 класс

1. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$1:(a+2010:(b+1:c)),$$

где a, b, c — попарно различные ненулевые цифры?

(*П. А. Бородин, О. Н. Косухин*)

2. В квадратной песочнице, засыпанной ровным слоем песка высотой 1, Маша и Паша делали куличи при помощи цилиндрического ведёрка высоты 2. У Маши все куличи удались, а у Паши — рассыпались и превратились в конусы той же высоты. В итоге весь песок ушёл на куличи, поставленные на дне песочницы отдельно друг от друга. Чьих куличей оказалось в песочнице больше: Машиных или Пашиных?

(*А. Л. Канунников*)

3. Докажите, что если числа x, y, z при некоторых значениях p и q являются решениями системы

$$\begin{cases} y = x^n + px + q, \\ z = y^n + py + q, \\ x = z^n + pz + q, \end{cases}$$

то выполнено неравенство $x^2y + y^2z + z^2x \geqslant x^2z + y^2x + z^2y$, где а) $n = 2$; б) $n = 2010$. (*О. Н. Косухин*)

4. Функция f каждому вектору v (с общим началом в точке O) пространства ставит в соответствие число $f(v)$, причём для любых векторов u, v и любых чисел α, β значение $f(\alpha u + \beta v)$ не превосходит хотя бы одного из чисел $f(u)$ или $f(v)$. Какое наибольшее количество значений может принимать такая функция? (*И. Н. Сергеев*)

5. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взята такая точка P, что $\angle PBA = \angle PCD = 90^\circ$. Точка M — середина стороны AD, причём $BM = CM$. Докажите, что $\angle PAB = \angle PDC$. (*В. П. Филимонов*)

6. Команда из n школьников участвует в игре: на каждого из них надевают шапку одного из k заранее известных цветов, а затем по свистку все школьники одновременно выбирают себе по одному шарфу. Команда получает столько очков, у скольких её участников цвет шапки совпал с цветом шарфа (шарфов и шапок любого цвета имеется достаточное количество; во время игры каждый участник не видит своей шапки, зато видит шапки всех остальных, но не имеет права выдавать до свистка никакую информацию). Какое наибольшее число очков команда, заранее наметив план действий каждого её члена, может гарантированно получить: а) при $n = k = 2$; б) при произвольных фиксированных n и k?

(*М. С. Лобанов, В. Г. Ушаков*)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс

1. О т в е т: 21 кусок.

Р е ш е н и е. Заметим, что количество частей всегда на 1 больше количества разрезов. Значит, красных колец 4, жёлтых — 6, а зелёных — 10. Таким образом, всего разрезов $4 + 6 + 10 = 20$, а частей 21.

2. О т в е т: оба гномы.

Р е ш е н и е. Предположим, что *А* эльф. Тогда он сказал правду, а *Б* солгал. Но ни гномы, ни эльфы не лгут, говоря про эльфов. Значит, *А* гном. Говоря про золото, он солгал. Поэтому *Б* сказал про *А* правду. Это мог сделать только гном.

3. О т в е т: например, он может сложить башню из четырёх кубиков, «завернуть» её в квадрат 4×4, а низ и верх заклеить квадратами 1×1 (рис. 6).

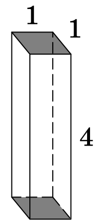


Рис. 6

4. О т в е т: в 10 долларов.

Р е ш е н и е. Поскольку Буратино получил 50 конфет, он совершил ровно 50 операций. При этом все полученные евро он вновь обменял на доллары. Поэтому на каждые 3 операции первого типа приходилось по 2 операции второго типа. То есть Буратино 30 раз получал по 3 доллара и 20 раз отдавал по 5 долларов. Значит, он потратил $20 \cdot 5 - 30 \cdot 3 = 10$ долларов.

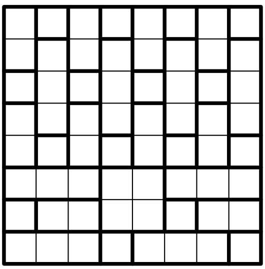


Рис. 7

5. На рисунке 7 доска разрезана на 35 прямоугольников.

К о м м е н т а р и й. Можно доказать (от участников олимпиады это, разумеется, не требовалось), что на большее число прямоугольников разрезать доску не удастся. Доказательство это довольно громоздкое, и помещать его полностью мы не станем.

Рассуждения, которые мы используем, похожи на те, что применены для решения задачи 6 из варианта 7 класса. Доказательство начнётся с оценки количества прямоугольников разной формы.

Одноклеточные прямоугольники. Прямоугольников 1×1 на доску поместится не более шестнадцати. В самом деле, мы можем разбить доску на квадраты 2×2: их ровно 16, и в каждом не более одного прямоугольника 1×1.

Двухклеточные прямоугольники. Прямоугольников 2×1 на доску поместится не более тринадцати. Пусть на доске N таких прямоугольников. Для доказательства окружим доску прямоугольной каёмкой шириной в полклетки, а также окружим такой каёмкой каждый размещенный на доске прямоугольник 2×1. (См. рисунок к первому решению задачи 7.6.) Площадь окаймлённого прямоугольника 2×1 будет равна 6. Понятно, что окаймлённые прямоугольники будут целиком лежать на окаймлённой доске и не будут накладываться друг на друга. Значит, их общая площадь, равная $6N$, не должна превосходить площади окаймлённой доски (81), откуда $N \leqslant 13$.

Прочие прямоугольники. Теперь оценим количество «многоклеточных» прямоугольников, площадь которых превышает 2.

Пусть теперь среди прямоугольников, на которые разрезана доска, x одноклеточных и y двухклеточных. Тогда всех остальных, площадь которых равна как минимум 3, не больше чем $\dfrac{64 - x - 2y}{3}$. Значит, общее число прямоугольников не превосходит

$$\frac{64 - x - 2y}{3} + x + y = \frac{64 + 2x + y}{3} \leqslant \frac{64 + 2 \cdot 16 + 13}{3} = 36\frac{1}{3} < 37.$$

Но, к сожалению, для 36 прямоугольников такие оценки не проходят — существует даже целых два набора прямоугольников, для которых по количеству клеток всё вроде бы сходится. Однако более тонкий анализ взаимного расположения прямоугольников показывает, что разрезать доску на такие наборы всё же невозможно.

6. Раскрасим чашки через одну в синий и красный цвет. Пусть Мартовский Заяц вначале пил из красной чашки. Докажем, что вначале Соня пила из синей чашки. В самом деле, если бы она пила из красной, то после любого поворота стола опорожнялись бы две чашки одного цвета. Поскольку и тех, и других по 15, а выпиваются они парами, в конце остались бы две чашки разного цвета, которые никаким поворотом стола нельзя было бы одновременно поместить перед Соней и Мартовским Зайцем. Теперь ясно, почему Заяц мог всегда поворачивать стол, ставя перед собой чашку через одну от только что выпитой, — при этом перед ним по очереди предстали бы все красные, а перед Соней — все синие чашки.

7 класс

1. Ответ: например, $((1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) + 3 + 3) : 3 = 11$ или $(1 \cdot 3 + 3) : 3 + 3 + 3 + 3 = 11$.

Комментарий. Заметим, что на Юрином калькуляторе любое число можно увеличить на 1, а именно: $(x \cdot 3 + 3) : 3 = x + 1$. Поэтому, в принципе, из единицы на нём можно получить любое натуральное число.

2. Ответ: а) да; б) нет.

Решение. а) См. рис. 8.

б) Из рис. 2, *б*) видно, что у каждого из колёс не более 3 спиц. Но из первого рисунка видно, что всего у колес не менее 7 спиц. Так как $3 \cdot 2 = 6 < 7$, двух колёс не хватит.

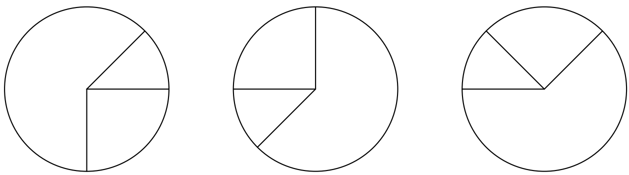


Рис. 8

3. Ответ: 21 конфета.

Решение. Выберем из детей одного — к примеру, Петю. Если из всех остальных конфет забрать 7, останется столько же, сколько у Пети. Значит, удвоенное число конфет Пети равно общему числу конфет без семи. То же можно сказать про любого из детей, значит, у всех детей конфет поровну — скажем, по одной кучке.

Ясно, что каждый съел на целое число кучек меньше остальных вместе. Поэтому 7 делится на размер кучки. Значит (так как по условию каждый съел больше 1 конфеты), в кучках по 7 конфет, т. е. каждый съел на кучку меньше остальных вместе. Петя съел одну кучку, следовательно, остальные — две. Значит, всего кучек три, а конфет — 21.

Это же решение можно записать и алгебраически.

Обозначим через S общее число конфет, которые съели дети. Если один из детей съел a конфет, то по условию все остальные съели $a + 7$ конфет, и тем самым все вместе съели $S = a + (a + 7) = 2a + 7$ конфет. Такое рассуждение справедливо для каждого ребёнка, поэтому все дети съели одно и то же количество конфет: по $a = (S - 7)/2$ штук.

Обозначим теперь через N число детей. Тогда условие записывается как $a = a(N - 1) - 7$, откуда $7 = a(N - 2)$. Число 7 простое, поэтому один из сомножителей равен 1, а другой 7. Но по условию $a > 1$, поэтому $a = 7$, $N - 2 = 1$. Тем самым $N = 3$, и была съедена $S = aN = 21$ конфета.

4. О т в е т: 13 судей.

Р е ш е н и е. Число голосов, поданных за Петуха и Ворону, не может быть больше $15 + 13 = 28$. Аналогично, за Ворону и Кукушку в сумме не может быть подано больше $18 + 13 = 31$ голоса, а за Кукушку и Петуха — не больше $20 + 13 = 33$ голосов. Сложив эти три количества поданных голосов, мы получим удвоенное число всех голосов (каждый голос вошёл в два из трёх слагаемых). Таким образом, общее число членов жюри не больше $(28 + 31 + 33)/2 = 46$. С другой стороны, из первого объявления Дятла оно не меньше $59 - 13 = 46$. Тем самым, членов жюри ровно 46, а все неравенства на самом деле обращаются в равенства.

Наконец, число проголосовавших за Ворону можно найти как разность общего числа членов жюри и суммы проголосовавших за Кукушку и Петуха: $46 - 33 = 13$ голосов.

5. Р е ш е н и е. а) См. решение задачи 3 шестого класса.

б) На рисунке 9 показано, как можно параллелепипед $1 \times 4 \times 6$ оклеить двумя квадратами 4×4 и одним квадратом 6×6. Большим квадратом оклеены три грани: передняя, нижняя и задняя, а каждым из меньших квадратов — половина верхней грани и одна из двух боковых.

К о м м е н т а р и й. Подобрать размеры параллелепипеда и квадратов можно, например, так.

Нарисуем развёртку из трёх квадратов, каждые два из которых граничат друг с другом (см. рисунок 10; линии сгиба обозначены пунктиром), и попробуем подобрать размеры квадратов так, чтобы из неё можно было сложить параллелепипед. Пусть сторона

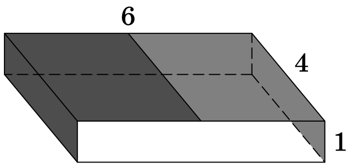


Рис. 9

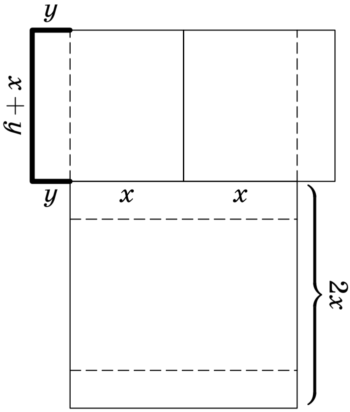


Рис. 10

нижнего квадрата равна $2x$. Один из отрезков, на которые разбита нижняя сторона другого квадрата, равен x. Обозначим второй через y.

При складывании параллелепипеда боковая сторона нижнего квадрата должна приклеиваться к жирной линии. Поэтому их длины должны быть равны: $y+(x+y)+y=2x$, откуда $3y=x$. Если взять $y=1$, $x=3$, получается приведённый выше пример.

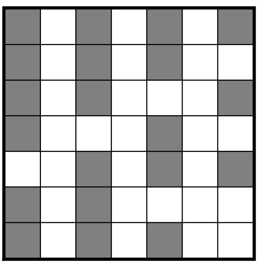


Рис. 11

6. Ответ: на доске 7×7.

Решение. Пример расстановки кораблей на доске 7×7 изображён на рис. 11. Остаётся доказать, что на доске 6×6 корабли расставить нельзя.

Доказательство 1. Будем считать не клетки, а *узлы* доски, занимаемые кораблями. Корабль 1×4 занимает $2\cdot 5=10$ узлов, корабль 1×3 занимает 8 узлов, корабль 1×2 — 6 узлов, корабль 1×1 — 4 узла (рис. 12); причём по правилам расстановки один узел не может принадлежать более чем одному кораблю. Значит, все корабли занимают $10+2\cdot 8+3\cdot 6+4\cdot 4=60$ узлов, и выставить их все на доску с меньшим числом узлов невозможно. Но всего на доске 6×6 имеется лишь $(6+1)^2=49<60$ узлов.

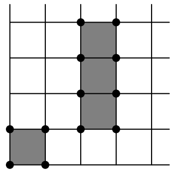


Рис. 12

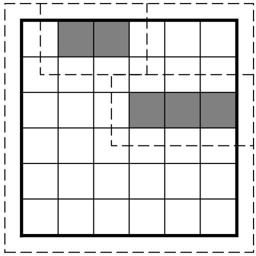


Рис. 13

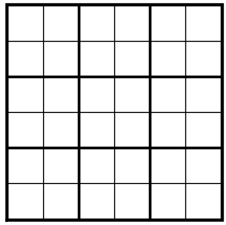


Рис. 14

Ту же идею можно оформить иначе. А именно, заключим каждый корабль в прямоугольник, увеличив его на полклетки в каждую сторону (рис. 13). Такие прямоугольники не могут пересекаться и занимают всего $10+2\cdot 8+3\cdot 6+4\cdot 4=60$ клеток. А если бы все корабли можно было разместить на доске 6×6, то все соответствующие прямоугольники располагались бы на доске 7×7, на которой имеется лишь $49<60$ клеток. (Отметим, что каждая клетка этой новой доски содержит ровно один узел старой — поэтому вычисление и получается точно таким же, как в первом доказательстве.)

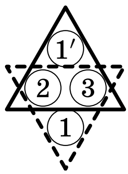
Доказательство 2. Разрежем доску 6×6 на 9 квадратов 2×2 (рис. 14). Каждый такой квадрат при расстановке по правилам может содержать клетки только одного корабля. Но всего кораблей 10, поэтому их на такой доске разместить нельзя. (Отметим, что это рассуждение доказывает, что на доску 6×6 все 10 кораблей нельзя было бы поставить, даже если все они имели бы размеры 1×1.)

8 класс

1. Рассмотрим все кубы, являющиеся трёхзначными числами. Это $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$ (других нет, так как $4^3=64<100$, а $10^3=1000>999$). Так как разные буквы обозначают разные цифры, ни одно из чисел КУБ и ШАР не равно 343. Но во всех оставшихся кубах есть общая цифра 2, а в числах КУБ и ШАР общих цифр нет.

2. Ответ: 60 г.

Первое решение. Возьмём ромбик из 4 монет. Как видно из рис. 15, массы двух монет в нём равны. Рассмат-



$1+2+3=$
$=2+3+1'$

Рис. 15

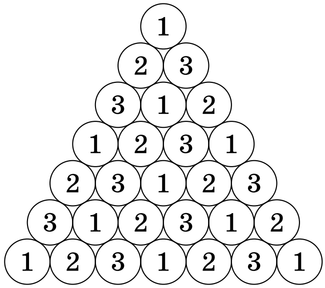


Рис. 16

ривая такие ромбики, получаем, что если покрасить монеты в 3 цвета, как на рис. 16, то монеты одного цвета будут иметь одинаковую массу.

Теперь легко найти и сумму масс монет на границе: там имеется по 6 монет каждого цвета, а сумма масс трёх разноцветных монет равна 10 г; значит, суммарная масса монет на границе равна $6 \cdot 10 = 60$ г.

В т о р о е р е ш е н и е. Все монеты без центральной можно разбить на 9 троек (рис. 17), а все внутренние монеты без

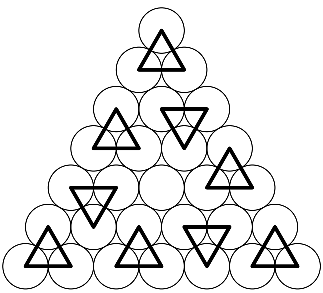


Рис. 17

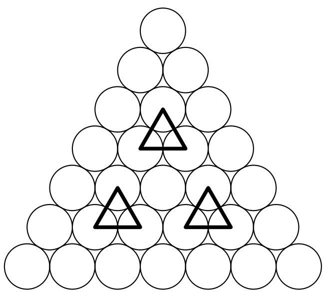


Рис. 18

центральной — на 3 тройки (рис. 18). Значит, монеты на границе весят столько же, сколько $9 - 3 = 6$ троек, т. е. 60 г.

3. О т в е т: $1:2$.

П е р в о е р е ш е н и е. Сделаем дополнительное построение: проведём через точку C прямую, параллельную BM;

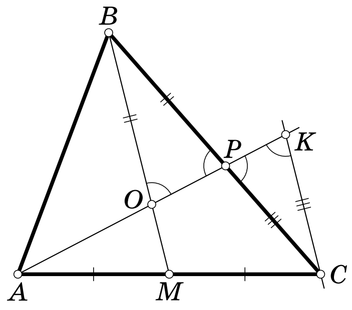


Рис. 19

точку пересечения этой прямой с прямой AP обозначим через K (рис. 19).

Рассмотрим треугольники OBP и KCP. Углы OPB и KPC равны как вертикальные, углы BOP и CKP равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых BM и CK секущей AK. Поскольку по условию треугольник OBP равнобедренный, $\angle BOP = \angle OPB$, а значит, и $\angle CPK = \angle CKP$. Значит, треугольник CKP — равнобедренный, то есть $CP = KC$. Но (например, по теореме Фалеса) OM — средняя линия в треугольнике CAK, она в два раза меньше, чем CK. Получаем, что $OM : PC = OM : CK = 1 : 2$.

В т о р о е р е ш е н и е. По теореме Менелая для треугольника MBC и прямой AP выполняется равенство

$$\frac{MO}{OB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CA}{AM} = 1.$$

Тогда, используя условия $AM = MC$ и $BO = BP$, получим, что $MO : PC = 1 : 2$.

4. О т в е т: да, могут.

Р е ш е н и е. Прежде чем строить пример, выясним, каким условиям должны удовлетворять скорости богатырей. Примем длину круга за 1. Рассмотрим каких-нибудь двух богатырей. Пусть их скорости равны u и v, $u < v$. Скорость их сближения равна $v - u$, поэтому время между последовательными их встречами равно $\frac{1}{v-u}$. Чтобы условие задачи выполнялось, за это время оба богатыря должны сделать по целому числу кругов, т. е. числа $\frac{v}{v-u}$ и $\frac{u}{v-u}$ должны быть целыми. Если богатыри стартуют в точке, в которой разрешён обгон, то выполнение этого условия (для каждой пары богатырей) является и достаточным.

Таким образом, задача свелась к построению набора натуральных[1] чисел $v_1, \ldots, v_{33}$, для которого v_i делится на $v_i - v_j$ для любых i и j.

Будем строить такой набор последовательно. Заметим, что если добавить к любому набору $v_1, \ldots, v_n$ число $v_{n+1} = 0$, то условия делимости по-прежнему будут выполняться. Осталось как-то подправить получившийся набор, чтобы числа в нём стали положительны. Попробуем увеличить все v_i на некоторое число V. Тогда условия делимости примут вид $(v_i + V) \vdots (v_i - v_j)$. Так как $v_i \vdots (v_i - v_j)$, достаточно, чтобы V делилось на все разности $v_i - v_j$ (для $i \neq j$). Поэтому в качестве V можно взять, например, произведение всех этих разностей.

Тем самым, построение можно начать, например, с двух богатырей со скоростями 1 и 2, а потом повторить 31 раз следующую процедуру: 1) добавить богатыря, который стоит в точке обгона; 2) увеличить скорость каждого богатыря на $V = \prod\limits_{i<j}(v_j - v_i)$.

К о м м е н т а р и й. Последнюю идею можно оформить иначе. Пусть уже имеется несколько богатырей, которые двигаются с целыми скоростями и встречаются только в точке старта. Тогда если мы прибавим к скорости каждого богатыря одно и то же число V, любая пара богатырей будет встречаться через тот же промежуток времени t, что и раньше. Чтобы место встречи вновь было начальной точкой, надо, чтобы каждый прошёл за это время целое число кругов. Для этого достаточно, чтобы V делилось на скорость каждого богатыря (тогда скорость каждого богатыря увеличится в целое число раз, и он за время t снова будет проходить целое число кругов).

5. Так как средняя линия MN треугольника ABC параллельна стороне AB, $\angle BAN + \angle MNA = 180^\circ$, а значит, $\frac{1}{2}\angle BAN + \frac{1}{2}\angle MNA = 90^\circ$. С другой стороны, поскольку угол

[1]Выбором подходящей единицы измерения времени можно сделать все скорости целыми.

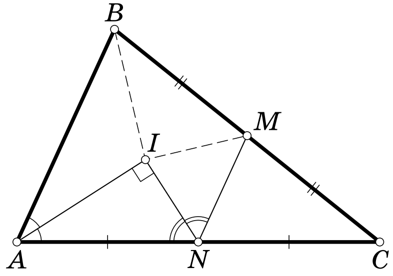


Рис. 20

AIN прямой, $\frac{1}{2}\angle BAN + \angle INA = 90^\circ$. Стало быть, $\angle INA = \frac{1}{2}\angle MNA$, т. е. точка I лежит на биссектрисе угла MNA (рис. 20).

Таким образом, из условия $\angle AIN = 90^\circ$ получаем, что центр I вписанной окружности треугольника ABC равноудалён от прямых AC, BC, AB и MN (т. е. вписанная окружность треугольника ABC касается его средней линии MN). Обращая переходы в предыдущем абзаце, получаем, что и $\angle BIM = 90^\circ$. А именно:

$$\angle IBM + \angle BMI = \frac{1}{2}\angle ABM + \frac{1}{2}\angle BMN = 90^\circ,$$

поэтому

$$\angle BIM = 180^\circ - (\angle IBM + \angle BMI) = 90^\circ.$$

Комментарий. Выпуклый четырёхугольник $ABMN$ является описанным тогда и только тогда, когда $AN + BM = AB + MN$. Замечая, что $MN = \frac{1}{2}AB$, получаем, что условие задачи выполняется в точности для треугольников, стороны которых удовлетворяют соотношению $3AB = AC + BC$.

6. Первое решение. Предположим, что клеток без стрелочек нет. Покрасим все клетки с горизонтальным стрелочками в чёрный цвет, а все клетки с вертикальными стрелочками — в белый.

Воспользуемся *леммой* (которую докажем чуть позже): если клетки квадрата раскрашены в два цвета, то найдётся либо путь по чёрным клеткам, соединяющий верхнюю и нижнюю стороны, либо путь по белым клеткам, соединяющий левую и правую стороны.

Без ограничения общности можем считать, что имеет место первый вариант. Но стрелки в первой и последней клетках этого пути смотрят в противоположные стороны. Значит, на этом пути есть и соседние клетки со стрелками, смотрящими в противоположные стороны, что противоречит условию.

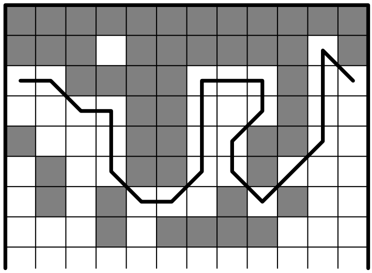


Рис. 21

Набросок доказательства леммы. Рассмотрим клетки, до которых можно дойти по чёрным клеткам от верхней стороны. Если образованная ими фигура касается нижней стороны, то существует чёрный путь, соединяющий верхнюю и нижнюю стороны. В противном случае вдоль нижней границы этой фигуры можно дойти от правой стороны до левой по белым клеткам (рис. 21).

В т о р о е р е ш е н и е. Предположим, что клеток без стрелочек нет. Для замкнутого пути по клеткам квадрата определим *индекс* как число оборотов (по часовой стрелке), которые делает на нём стрелочка. Т. е. пройдём по этому пути, на каждом шаге прибавляя к числу (равному нулю в начале пути) $1/4$, если стрелочка повернулась по часовой стрелке, вычитая $1/4$, если против, и не меняя число, если направление стрелки не изменилось[1]; индекс — это число, которое мы получим, сделав полный круг[2].

Индекс относительно пути вдоль границы квадрата равен 1. Начнём теперь уменьшать наш путь — «откусим» сначала его левый верхний уголок (рис. 22 и 23). Заметим,

[1]Здесь мы пользуемся тем, что в соседних клетках стрелочки не смотрят в противоположных направлениях: если бы на каком-то шаге нашего пути стрелка поменяла направление на противоположное, неясно было бы, надо нам прибавлять $1/2$ или вычитать.

[2]Так как при этом мы возвращаемся в клетку, с которой начинали, вектор делает целое число оборотов, т. е. индекс — *целое* число.

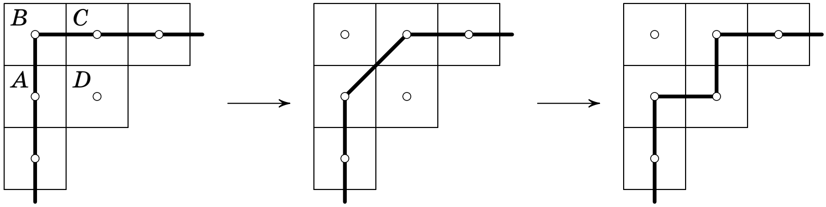


Рис. 22

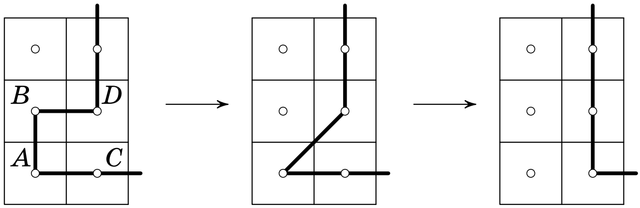


Рис. 23

что индекс при такой операции не меняется (так как среди стрелочек, выходящих из точек A, B, C и D, нет противоположных). Откусывая так по углу, через некоторое время мы продеформируем наш путь до пути, состоящего из одной клетки — а индекс такого пути равен 0. Противоречие.

Комментарии. 1. Второе решение доказывает и более общий факт. А именно, если в клетках какой-то фигуры расставлены стрелочки так, что индекс относительно границы фигуры не равен 0, то внутри фигуры обязательно есть пустая клетка. Более того, можно показать, что если индекс относительно границы равен k, то внутри есть хотя бы $|k|$ пустых клеток.

2. Эта задача представляет собой дискретный аналог следующего известного топологического факта. Пусть на круге задано векторное поле — т. е. в каждой точке круга задан вектор, причём вектор зависит от точки непрерывно. Тогда если на окружности эти вектора направлены по касательной (рис. 24), то внутри найдётся точка, вектор в которой равен нулю.

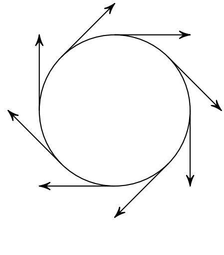


Рис. 24

Доказательство этого факта проходит в духе второго решения. А именно, определяется индекс векторного поля относительно кривой[1], проверяется, что для граничной окружности он равен 1, а для маленького контура вокруг точки с ненулевым вектором индекс равен 0 (рис. 25). После чего доказывается, что, если нулей у векторного поля нет, при уменьшении контура индекс не меняется.

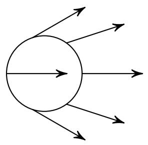


Рис. 25

Таким образом, имеет место *теорема*: если на границе некоторой области векторное поле имеет ненулевой индекс, то внутри области поле имеет хотя бы одну *особую точку* — точку, вектор в которой равен нулю.

Более подробно намеченное выше рассуждение изложено в пункте V.3.4 книги [1] (где оно применяется для доказательства замечательной теоремы Брауэра о существовании неподвижной точки непрерывного отображения диска в себя). А полное формальное доказательство можно узнать, прочитав книгу [2].

Более того. Определим индекс особой точки векторного поля как индекс относительно маленького пути вокруг этой точки. Тогда аналогичными рассуждениями можно показать, что индекс векторного поля относительно границы области равен сумме индексов особых точек внутри области (ср. с последним утверждением в комментарии 1). Дальнейшим развитием этого сюжета является знаменитая теорема Пуанкаре—Хопфа, связывающая эйлерову характеристику с суммой индексов особых точек.

[1] *Р. Курант*, *Г. Роббинс*. Что такое математика. — МЦНМО, 2007.
[2] *Н. Стинрод*, *У. Чинн*. Первые понятия топологии. — Мир, 1967.

9 класс

1. Ответ: Волк будет страдать от голода.

Решение. Обозначим «сытность» поросёнка через p, а козлёнка через k. Тогда имеем из условия

$$3p + 7k < 7p + k,$$

[1] Представляя себе векторное поле как отметки скорости ветра, можно сказать, что это число оборотов, которые сделает вокруг своей оси флюгер, если пронести его вдоль этого пути.

откуда $6k < 4p$, а стало быть, $k < 2p/3$. Значит, $11k < 7k + 3p$, то есть Волк после поедания 11 козлят будет страдать от голода.

2. Ответ: 90°.

Решение. Поскольку

$$\angle MAE = \angle MPE = \angle CPM = \angle MBC = 90^\circ$$

(рис. 26), четырёхугольники $AEPM$ и $BMPC$ вписанные. Стало быть,

$$\angle BPA = \angle BPM + \angle MPA = \angle BCM + \angle MEA = \\ = 180^\circ - \angle EMA - \angle CMB = \angle EMC = 90^\circ.$$

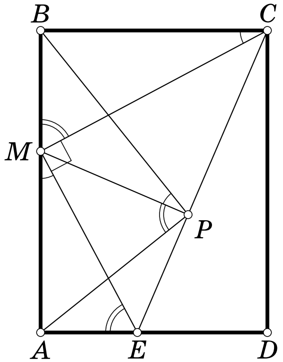


Рис. 26

3. Ответ: среднее количество товарищей у тараканов больше среднего количества тараканов у жителя города.

Решение. Пусть в городе проживает n жителей, и пусть у i-го жителя a_i тараканов. Тогда среднее число тараканов у жителя города равно $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$, а среднее число товарищей у таракана равно $\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$.

Докажем, что

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Избавившись от знаменателей, получим

$$n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2. \quad (1)$$

Правая часть равна

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n.$$

Осталось заметить, что поскольку $a_i^2 + a_j^2 \geqslant 2a_ia_j$ для любых i и j, исходное неравенство верно.

Значит, среднее количество товарищей у тараканов больше либо равно среднему количеству тараканов у жителя города. Однако равенство не достигается, потому что в (1) оно возможно только для $a_1 = \ldots = a_n$, что противоречит условию.

Комментарии. 1. Доказанное неравенство является частным случаем неравенства Коши—Буняковского.

2. Задача объясняет «закон подлости»: мы обычно ездим в автобусах, более переполненных, чем в среднем, и стоим в очередях, более длинных, чем обычно.

4. Ответ: 2005.

Решение. Обозначим числа на окружности $a_1, \ldots, a_{2009}$, а произведение десяти чисел по часовой стрелке, начиная с a_k, обозначим через s_k.

Если $s_k = s_{k+1}$, то

$$a_k \cdot \ldots \cdot a_{k+9} = a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_{k+10},$$

откуда $a_k = a_{k+10}$.

Предположим, что все s_k равны единице. Тогда по предыдущему утверждению

$$a_1 = a_{11} = \ldots = a_{2001} = a_2 = \ldots$$

и, таким образом, получаем, что все числа a_k равны, что противоречит условию задачи.

Теперь допустим, что все s_k, кроме одного, — единицы. Можно считать, что

$$s_1 = \ldots = s_{2008} = 1 = -s_{2009}.$$

Получаем, что

$$\begin{gathered} a_1 = a_{11} = \ldots = a_{2001}, \\ a_2 = a_{12} = \ldots = a_{2002}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{10} = a_{20} = \ldots = a_{2000}. \end{gathered}$$

Из равенств

$$s_{2000} = s_{2001} = \ldots = s_{2008}$$

получаем

$$a_{2000} = a_1, \quad a_{2001} = a_2, \quad \ldots, \quad a_{2007} = a_8.$$

В то же время, так как $s_{2008} = -s_{2009} = s_1$, то $a_{2008} = -a_9$, $a_{2009} = -a_{10}$. Пусть $a_1 = 1$, тогда

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_8 = a_{10} = 1 = -a_9$$

и $s_1 = -1$, что неверно. Аналогично, если $a_1 = -1$, то получаем, что $s_1 = -1$. Таким образом, среди s_k не более 2007 единиц.

Для 2007 приведём пример. Пусть

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{2007} = 1, \quad a_{2008} = a_{2009} = -1.$$

Тогда $s_{1999} = s_{2009} = -1$, а остальные s_k — единицы.

Стало быть, наибольшая возможная сумма равна 2005.

5. Ответ: 9.

Решение. Допустим, прямых 8. Тогда они имеют не более 28 точек пересечения, но ломаная не может иметь вершин не в точках пересечения прямых, кроме начальной и конечной, то есть не может иметь более 29 звеньев. Пример для девяти прямых изображён на рисунке 27. (На рисунке изображена окружность, на которой отмечено 9 точек — вершины правильного девятиугольника. Каждая из них соединена с двумя другими прямой. По этим прямым и проходит искомая ломаная, на рисунке обозначенная белым цветом.)

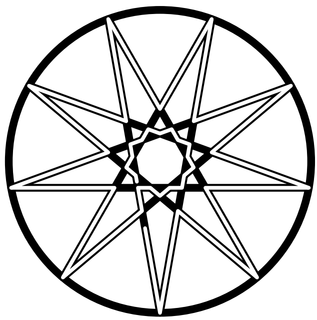


Рис. 27

6. Докажем, что можно получить однозначное число за 4 операции. Главная сложность в выборе первого действия.

Мы хотим добиться, чтобы после первой операции получилось число, имеющее не более трёх ненулевых цифр.

Пусть нам дано натуральное число N, и пусть A — сумма его цифр, стоящих на нечётных местах (первой, третьей и т. д.), а B — сумма его цифр, стоящих на чётных местах. В записи числа N расставим плюсы между всеми цифрами, получим число $A+B$. Заметим, что, если убрать плюс между двумя цифрами a и b, то сумма увеличится на $9a$. Предположим, что $A \geqslant B$ (случай $A < B$ разбирается полностью аналогично). Теперь станем последовательно убирать плюсы после цифр, стоящих на нечётных местах. Если стереть все плюсы, то получится число не меньшее чем $10A+B-9$ (девятка появляется за счёт того, что после последней цифры числа плюса нет и убрать его нельзя). Покажем, что в какой-то момент при последовательном стирании плюсов старший разряд суммы увеличится.

Действительно, пусть

$$c \cdot 10^n \leqslant A+B < (c+1) \cdot 10^n$$

(c — старший разряд числа $A+B$). Если старший разряд суммы не изменится, то

$$c \cdot 10^n \leqslant 10A+B-9 < (c+1) \cdot 10^n.$$

Домножим первое неравенство на -1 и прибавим ко второму. Получим

$$-10^n < 9A-9 < 10^n.$$

Но поскольку $A \geqslant B$, из первого неравенства получаем

$$A \geqslant \frac{c}{2} \cdot 10^n,$$

откуда

$$\frac{9c}{2} \cdot 10^n - 9 < 10^n.$$

Это означает, что

$$\frac{9c-2}{2} \cdot 10^n < 9,$$

что возможно только при $n=0$, то есть однозначном $A+B$. Этот случай, очевидно, нам не интересен.

Итак, можно последовательным стиранием плюсов перед цифрами, стоящими на местах некоторой чётности, увеличить старший разряд суммы. Будем последовательно стирать плюсы этим образом и остановимся ровно в тот момент, когда произойдёт увеличение старшего разряда. При этом каждый раз мы добавляем не более 81, так что в момент остановки мы получим сумму вида $\overline{*000\ldots000**}$, если не произойдёт перенос в старшем разряде, или $\overline{10000\ldots000**}$ иначе. Таким образом произведена первая операция.

Далее станем просто складывать все цифры. После второй операции мы получим не более 27, после третьей не более 10, после четвёртой получается однозначное число.

10 класс

1. Ответ: нет, не может.

Решение. Обозначим эти трёхчлены через $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$. По условию все их попарные суммы не имеют корней; поскольку у всех квадратных трёхчленов коэффициент при x^2 положительный, то каждая из функций $f_1(x)+f_2(x)$, $f_2(x)+f_3(x)$ и $f_3(x)+f_1(x)$ при всех x принимает только положительные значения.

Теперь заметим, что

$$2(f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)) = \\ = (f_1(x)+f_2(x)) + (f_2(x)+f_3(x)) + (f_3(x)+f_1(x)) > 0$$

для всех x, а значит, и неравенство $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)>0$ выполнено для всех значений x. Отсюда и следует утверждение задачи.

Комментарий. Может случиться так, что сумма любых двух трехчленов имеет корень, а сумма всех — нет. Подумайте над примером.

2. Ответ: $\sqrt{ab}$.

Решение. Докажем сначала, что прямые MC и AN параллельны.

Действительно, добавив к равновеликим по условию треугольникам MOA и CON (см. рис. 28) треугольник AON, получим, что треугольники AMN и ACN также равновелики. Они имеют общее

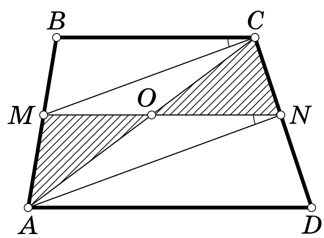


Рис. 28

основание AN, а значит, равны и их высоты, опущенные на это основание. Это означает, что точки M и C равноудалены от прямой AN. А поскольку они, очевидно, лежат по одну сторону от этой прямой, прямые MC и AN параллельны.

Продолжим решение задачи. Имеем две пары подобных треугольников (по трём углам): $\triangle MCN \sim \triangle AND$ (а значит, $AD : MN = AN : MC$) и $\triangle MCB \sim \triangle ANM$ (откуда, в свою очередь, $AN : MC = MN : BC$). Стало быть,

$$\frac{AD}{MN} = \frac{MN}{BC},$$

откуда получаем

$$MN^2 = AD \cdot BC = ab,$$

то есть $MN = \sqrt{ab}$.

3. Ответ: да, можно.

Решение. Из курса тригонометрии известно, что при $\sin t > 0$ и $s \neq 0$ выполнены тождества

$$\sin t = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t}}$$

и

$$\operatorname{ctg} \operatorname{arctg} \frac{1}{s} = s.$$

Подставляя в эти тождества $t = \operatorname{arcctg} 2$, $s = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t}}$, получаем:

$$\operatorname{ctg} \operatorname{arctg} \sin \operatorname{arcctg} 2 = \sqrt{2^2 + 1}.$$

Аналогично,

$$\operatorname{ctg} \operatorname{arctg} \sin \operatorname{arcctg} \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{2^2 + 2},$$

и поскольку

$$2010 = \sqrt{2^2 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{2010^2 - 2^2 \text{ раз}}},$$

через $2010^2 - 2^2$ повторений этой операции мы из числа 2 получим число 2010.

Итак,

$$2010 = \underbrace{\operatorname{ctg} \operatorname{arctg} \sin \operatorname{arcctg}}_{2010^2 - 2^2 \text{ раз}} 2,$$

или, ещё короче,

$$2010 = \operatorname{ctg} \underbrace{\operatorname{arctg} \sin}_{2010^2-2^2 \text{ раз}} \operatorname{arcctg} 2.$$

К о м м е н т а р и й. Прошедшая в 1935 году московская олимпиада школьников по математике была первой не только в нашей стране. Она вызвала большое обсуждение педагогической и научной общественности в разных странах. На вторую олимпиаду предложил свою задачу известный английский физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии по физике 1933 года Поль Дирак (Paul Dirac). Задача формулировалась так [1], [2]:

Представить произвольное натуральное число в виде выражения, в запись которого входят только три двойки и произвольные математические знаки.

Решение просто и элегантно:

$$-\log_2(\log_2(\sqrt{2})) = 1,$$

$$-\log_2(\log_2(\sqrt{\sqrt{2}})) = 2,$$

$$-\log_2(\log_2(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})) = 3,$$

и так далее.

Автор настоящей задачи, будучи школьником, прочитал задачу Дирака в замечательной книге [1] (которая всем рекомендуется к прочтению) и задумался: а можно ли обойтись *двумя* двойками? Через 17 лет удалось выяснить, что достаточно и одной. Решение несложно — достаточно лишь *поверить*, что одной двойки хватает, и задача решается. Так часто бывает в математике — неожиданный результат ждёт человека, который *разрешит себе поверить*.

Другое возможное решение приведено ниже:

$$2010 = \operatorname{tg} \underbrace{\operatorname{arcctg} \cos}_{2010^2-2^2 \text{ раз}} \operatorname{arctg} 2.$$

Обратите внимание на то, что второе решение получается из первого, если поменять местами синус с косинусом, а тангенс с котангенсом. Этот дуализм не случаен. Подумайте о его причинах.

[1] *Г. А. Гальперин*, *А. К. Толпыго*. Московские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1986. — С. 21, 153.

[2] *Н. Малов*. Задача Дирака // Квант. — 1981. — № 9. — С. 40.

4. Ответ: может.

Первое решение. Рассмотрим число

$$n = \sum_{k=0}^{99} 10^{10^k} = 10 + 10^{10} + \ldots + 10^{10^{99}}.$$

Его десятичная запись состоит из ста единиц и большого числа нулей.

Возведём это выражение в куб следующим образом: рассмотрим три таких выражения, перемножим их, раскрыв скобки, но не будем приводить подобные. Получим 100^3 слагаемых, каждое из которых является степенью числа 10.

Если бы все слагаемые были разными, то при суммировании мы получили бы число, десятичная запись которого состоит из 100^3 единиц и некоторого количества нулей, то есть сумма цифр равнялась бы 100^3. К сожалению, некоторые слагаемые будут одинаковыми. Но если мы докажем, что одинаковых слагаемых каждого типа меньше десяти, то при сложении не будет происходить переносов в следующий разряд, и сумма цифр числа будет действительно равна 100^3.

Посмотрим, сколько одинаковых слагаемых одного типа может получиться. Каждое из таких слагаемых получается из произведения трёх чисел: первое число с 10^p нулями берётся из первой скобки, второе с 10^q нулями — из второй, а третье с 10^r нулями — из третьей. Заметим, что слагаемое с таким же количеством нулей можно получить, только перемножая эти же три числа, взятые в другом порядке (подумайте, почему!). Но всего есть максимум $3! = 6$ способов выбрать три данных числа из трёх скобок, поэтому одинаковых слагаемых каждого типа может быть максимум 6.

Значит, при суммировании слагаемых не будет происходить переносов в следующий разряд, и сумма цифр числа n^3 будет равняться 100^3.

Второе решение. Докажем более общий факт: для любого натурального числа x найдётся такое натуральное число n, состоящее из нулей и единиц, что в десятичной записи числа n^2 присутствуют только нули, единицы и двойки и при этом $S(n) = x$, $S(n^2) = x^2$, а $S(n^3) = x^3$ (здесь через $S(p)$ мы, как водится, обозначаем сумму цифр числа p).

База индукции. Пусть $x = 1$, тогда, взяв $n = 1$, получим, что $S(1) = 1$, $S(1^2) = 1^2 = 1$ и $S(1^3) = 1^3 = 1$.

Переход. Пусть для некоего x мы нашли такое n, что $S(n) = x$, $S(n^2) = x^2$ и $S(n^3) = x^3$, при этом в десятичной записи числа n присутствуют только нули и единицы, а в десятичной записи n^2 — нули, единицы и двойки. Покажем, что для числа $x + 1$ найдётся такое натуральное m, что $S(m) = x + 1$, $S(m^2) = (x + 1)^2$, $S(m^3) = (x + 1)^3$, и при этом в десятичной записи числа m присутствуют только нули и единицы, а в десятичной записи m^2 — нули, единицы и двойки. Явно выразим m через n.

Пусть в десятичной записи числа n присутствует k цифр. Тогда возьмём $m = n + 10^{10k}$ (это число, конечно же, будет состоять только из нулей и единиц). Очевидно, что $S(m) = S(n) + 1 = x + 1$ (поскольку $10^{10k} > 10n$). Далее,

$$S(m^2) = S((n + 10^{10k})^2) = S(n^2 + 2n \cdot 10^{10k} + 10^{20k}) = \\ = S(n^2) + 2 \cdot S(n) + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

Убедимся, что это равенство действительно выполняется. В самом деле, если в десятичной записи числа n присутствует k цифр, то $n < 10^k$. Отсюда $n^2 < 10^{2k}$, и потому при сложении n^2, $2n \cdot 10^{10k}$ и 10^{20k} не найдётся такого разряда, что у каких-то двух слагаемых цифры в этом разряде не являются нулями. Также ясно, что число m^2 будет состоять только из нулей, единиц и двоек (убедитесь в этом сами).

Наконец,

$$m^3 = n^3 + 3n^2 \cdot 10^{10k} + 3n \cdot 10^{20k} + 10^{30k}.$$

Применяя рассуждения, аналогичные тем, которые мы использовали при доказательстве равенства $S(m^2) = (x + 1)^2$, получим, что $S(m^3) = (x + 1)^3$.

Стало быть, для всякого натурального x найдётся такое натуральное n, что $S(n) = x$ и $S(n^3) = x^3$. В частности, взяв $x = 100$, получим утверждение задачи.

Несложно проверить, что если при переходе индукции брать $m = n + 10^{10(k-1)}$, то после 99 шагов индукции мы получим число $\sum\limits_{k=0}^{99} 10^{10^k}$, рассмотренное в первом решении.

5. Ответ: 7/2.

Решение. Пусть в треугольнике ABC выполнено неравенство $1 = AB < AC < BC$. Тогда медиана AA' равна высоте, опущенной из вершины B, а медиана BB' — высоте, опущенной из вершины C. Значит, расстояние от точки A' до прямой AC равно половине AA', т. е. $\angle A'AC = 30°$. Аналогично, $\angle B'BA = 30°$.

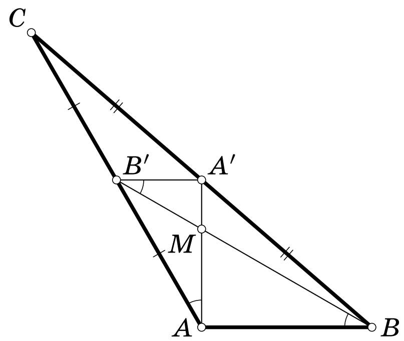


Рис. 29

Пусть M — точка пересечения медиан треугольника. Поскольку $\angle A'B'M = \angle B'BA = \angle B'AM$ (рис. 29), треугольники $B'A'M$ и $AA'B'$ подобны, т. е. $A'B'^2 = A'M \cdot AA' = 3A'M^2$. Следовательно, угол $A'MB'$ равен либо $120°$, либо $60°$.

В первом случае треугольник ABC равносторонний, что противоречит условию.

Во втором случае имеем $\angle B'A'A = \angle A'AB = 90°$, $\angle BB'A = 30°$ и $AB' = AB$. Таким образом, $AC = 2AB$ и $\angle BAC = 120°$. Теперь по теореме косинусов находим $BC = \sqrt{7}$, и значит, медиана из вершины C равна $\sqrt{21}/2$, а высота из вершины A равна $\sqrt{3/7}$.

6. Сначала докажем, что всего проведено не менее $6n$ отрезков.

Рассмотрим граф, множество V вершин которого состоит из всех отмеченных точек, а множество E рёбер состоит из всех пар точек, соединённых отрезками. Тогда по условию $|V| = 4n$, и для любого $W \subset V$, $|W| \geqslant n + 1$, найдутся x, $y \in W$, образующие ребро $(x, y) \in E$.

Возьмём произвольное множество $Q_1 \subset V$, которое не содержит рёбер и имеет максимальную мощность среди всех подмножеств множества V, которые не содержат рёбер. Ясно, что $|Q_1| \leqslant n$. Кроме того, ввиду максимальности множества Q_1 каждая вершина из $V \setminus Q_1$ имеет хотя бы одного соседа в Q_1. Значит, в E по крайней мере $3n$ элементов.

Далее, удалим из V множество Q_1. Останется граф G_1 со множеством вершин V_1 и множеством рёбер E_1, причём $|V_1| \geqslant 3n$, и для любого $W \subset V_1$, $|W| \geqslant n+1$, найдутся $x, y \in W$, образующие ребро $(x, y) \in E_1$. Опять возьмём произвольное множество $Q_2 \subset V_1$, которое не содержит рёбер и имеет максимальную мощность среди всех подмножеств множества V_1, не содержащих рёбер. Ясно, что $|Q_2| \leqslant n$. Кроме того, ввиду максимальности множества Q_2, каждая вершина из $V_1 \setminus Q_2$ имеет хотя бы одного соседа в Q_2. Значит, в E_1 по крайней мере $2n$ элементов. Поскольку рёбра, найденные на первом шаге поиска, заведомо отличны от рёбер, найденных только что, то в E уже не менее $5n$ элементов.

Делаем ещё один полностью аналогичный шаг и убеждаемся, что $|E| \geqslant 6n$.

Для того чтобы доказать, что рёбер по крайней мере $7n$, начнём сначала, немного усложнив процедуру: теперь мы учтём, что граф G — дистанционный граф на плоскости, то есть рёбрами соединены только пары вершин на расстоянии в 1 см друг от друга. Проведём почти ту же самую процедуру, что была описана выше; отличие будет только на первом шаге. Мы уже знаем, что каждая вершина из $V \setminus Q_1$ имеет *хотя бы* одного соседа в Q_1. Давайте разобьём $V \setminus Q_1$ на две части — W_1 и W_2. В W_1 будут те вершины, у каждой из которых *ровно* один сосед в Q_1, в W_2 — те вершины, у каждой из которых не менее двух соседей. Если мы докажем, что $|W_1| \leqslant 2n$, то увидим, что на первом шаге вклад в $|E|$ имеет величину не $3n$, как это было раньше, а по крайней мере $4n$. Это и даст нам в итоге оценку $7n$.

Предположим, что $|W_1| > 2n$. Тогда в Q_1 есть вершина q, смежная с тремя вершинами x_1, x_2, x_3 из W_1. Если между какими-то x_i и x_j нет ребра, то мы можем удалить q из Q_1 и добавить к этому множеству обе вершины x_i и x_j. Получится множество, в котором нет рёбер и у которого мощность строго больше $|Q_1|$. Значит, вершины x_1, x_2, x_3 и q попарно соединены рёбрами. Но полный граф на четырёх вершинах нельзя реализовать отрезками длины 1 см на плоскости. Противоречие, и задача решена.

Комментарий. Эта задача напрямую связана с самыми современными проблемами комбинаторной геометрии. Назовём граф $G=(V,E)$ *графом расстояний* (или *дистанционным графом*) на плоскости, если $V\subset\mathbb{R}^2$, а

$$E\subseteq\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\colon \mathbf{x},\mathbf{y}\in V,\ |\mathbf{x}-\mathbf{y}|=a\},$$

где $a>0$ — фиксированное число. Как правило, величина a роли не играет, поэтому для определённости рассматривают $a=1$ и говорят о графах единичных расстояний.

Наиболее известной задачей о дистанционных графах является задача о *хроматическом числе плоскости* (см. [1], [2], [3]). В то же время огромное количество серьёзных научных исследований посвящено проблемам отыскания ограничений на количества рёбер в графах расстояний. Так, например, очень важен следующий вопрос (см. [4]): каково максимальное количество e_n рёбер в дистанционном графе с n вершинами? Несмотря на усилия многих крупных специалистов в области комбинаторной геометрии, на этот вопрос по-прежнему нет окончательного ответа. Известны только нижние и верхние оценки величины e_n. Например, существует константа $c>0$, с которой $e_n\leqslant cn^{4/3}$. Подробности можно найти в [4].

Ещё один глубокий вопрос состоит в том, насколько большими могут быть *независимые множества вершин* в графах расстояний. Под независимыми множествами понимаются такие наборы вершин графа, в которых никакие две вершины не соединены ребром. Известно, например, что в любом дистанционном графе на плоскости, имеющем n вершин, есть независимое множество размера не меньше $[0{,}2293n]$ (см. [4], [5]).

Наша шестая задача в некотором смысле лежит на стыке двух упомянутых выше вопросов. А именно, её можно сформулировать так: каково минимальное количество рёбер у дистанционного графа, который имеет n вершин и не содержит независимых множеств размера $n/4+1$? Оказывается, что это количество никак не меньше $7n/4$. Отметим, что при больших n такие графы действительно существуют.

Аналогичными задачами занимаются не только в случае плоскости, но и в случае пространства $\mathbb{R}^n$ любой размерности (см. [4], [5], [6]).

[1] *А. М. Райгородский*. Хроматические числа. — МЦНМО, 2008.

[2] *А. М. Райгородский*. Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи матем. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 107—146.

[3] *А. Сойфер*. Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее // Математическое просвещение. — Сер. 3., Вып. 8. — 2004. — С. 186—221.

[4] *P. Brass*, *W. Moser*, *J. Pach*. Research problems in discrete geometry. — Springer, 2005.

[5] *L. A. Székely*. Erdős on unit distances and the Szemerédi—Trotter theorems // Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer. — 2002. — V. 11. — P. 649—666.

[6] *А. М. Райгородский*, *К. А. Михайлов*. О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в $\{0, 1\}^n$ // Матем. сборник. — 2009. — Т. 200, № 12. — С. 63—80.

11 класс

1. О т в е т: $1/203$ при $a = 2$, $b = 9$, $c = 1$.

Р е ш е н и е. Так как a, b, c — положительные числа, не превосходящие 9,

$$\frac{1}{a+\dfrac{2010}{9+\dfrac{1}{c}}} \geqslant \frac{1}{a+\dfrac{2010}{b+\dfrac{1}{c}}}$$

при любых a и c. Следовательно, если a и c — разные цифры, то максимальное значение выражения реализуется в одном из двух случаев: 1) $a = 1$, $c = 2$; 2) $a = 2$, $c = 1$. Проверяем:

$$\frac{1}{1+\dfrac{2010}{9+\dfrac{1}{2}}} = \frac{19}{4039} < \frac{1}{2+\dfrac{2010}{9+\dfrac{1}{1}}} = \frac{1}{203},$$

так как $19 \cdot 203 = 3857 < 4039$.

2. О т в е т: Машиных куличей больше.

Р е ш е н и е. Пусть в песочнице в итоге оказалось m Машиных и n Пашиных куличей. Обозначим через S площадь основания ведёрка. Так как все куличи имеют одинаковые высоты и одинаковые объёмы, то площадь основания каждого конического кулича равна $3S$ (из формул объёмов цилиндра и конуса).

Площадь основания песочницы, с одной стороны, численно равна объёму всего песка, т. е. суммарному объёму $2S(m+n)$ всех куличей, а с другой стороны, больше суммарной площади $Sm+3Sn$ оснований куличей, поскольку эти основания не пересекаются и, будучи кругами, не могут покрыть весь квадрат в основании песочницы. Итак, $2S(m+n) > Sm+3Sn$, откуда $m > n$.

3. Для пунктов а) и б) существует общее решение. Тем не менее, пункт а) можно решить независимо от пункта б).

а) Домножим первое, второе и третье уравнения системы соответственно на y, z и x:

$$\begin{cases} y^2 = x^2y + pxy + qy, \\ z^2 = y^2z + pyz + qz, \\ x^2 = z^2x + pxz + qx. \end{cases}$$

Сложив все три уравнения полученной системы, получим уравнение

$$x^2+y^2+z^2 = x^2y+y^2z+z^2x+pxy+pxz+pyz+qx+qy+qz. \tag{1}$$

Теперь домножим первое уравнение исходной системы на z, второе — на x, а третье — на y:

$$\begin{cases} yz = x^2z + pxz + qz, \\ zx = y^2x + pxy + qx, \\ xy = z^2y + pyz + qy. \end{cases}$$

Сложив все три уравнения этой системы, получим

$$xy+xz+yz = x^2z+y^2x+z^2y+pxy+pxz+pyz+qx+qy+qz. \tag{2}$$

Вычтем из уравнения (1) уравнение (2):

$$x^2+y^2+z^2-(xy+xz+yz) = \\ = x^2y+y^2z+z^2x-(x^2z+y^2x+z^2y).$$

Так как $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$, $\dfrac{x^2+z^2}{2} \geqslant xz$ и $\dfrac{y^2+z^2}{2} \geqslant yz$, то левая часть последнего уравнения неотрицательна, а значит, неотрицательна и правая часть, что и требовалось доказать.

б) Преобразуем неравенство, которое нужно доказать, к равносильному:

$$\begin{aligned} &x^2y + y^2z + z^2x \geqslant xy^2 + yz^2 + zx^2 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x^2y - zx^2 + z^2x - xy^2 + y^2z - yz^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x^2(y-z) - x(y+z)(y-z) + yz(y-z) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (x^2 - x(y+z) + yz)(y-z) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (x-y)(y-z)(z-x) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Если среди чисел x, y и z найдутся хотя бы два равных, то доказываемое неравенство обратится в верное равенство. Пусть теперь все эти числа попарно различны. Без ограничения общности можно считать, что наименьшим из них является x. Докажем, что тогда $z < y$.

Функция $f(t) = t^{2010} + pt + q$ при всех t имеет производную $f'(t) = 2010t^{2009} + p$, причём $f'(t) < 0$ при $t < t_0 = \sqrt[2009]{-p/2010}$ и $f'(t) > 0$ при $t > t_0$. Следовательно, функция $f(t)$ убывает при $t < t_0$ и возрастает при $t > t_0$. Если $y \leqslant t_0$, то $x < y \leqslant t_0$ и $y = f(x) > z = f(y)$. Если же $z > y \geqslant t_0$, то $x = f(z) > z = f(y) > t_0$, что приводит к противоречию. Значит, $x < z < y$ и

$$(x-y)(y-z)(z-x) < 0.$$

Комментарий. Приведённое доказательство останется верным и при замене в нём функции f на любую другую функцию с монотонно неубывающей производной (такие функции называются выпуклыми), а всех строгих неравенств — на нестрогие. Поэтому при каждой такой функции f неравенство

$$x^2y + y^2z + z^2x \geqslant xy^2 + yz^2 + zx^2$$

будет верным и для любой тройки чисел x, y и z, связанных между собой равенствами $y = f(x)$, $z = f(y)$, $x = f(z)$. В частности, ещё одно доказательство неравенства в пункте а) получается из доказательства пункта б) заменой $f(t) = t^{2010} + pt + q$ на $f(t) = t^2 + pt + q$, $f'(t) = 2010t^{2009} + p$ — на $f'(t) = 2t + p$ и $t_0 = \sqrt[2009]{-p/2010}$ — на $t_0 = -p/2$.

4. Во-первых, последовательно докажем, что описанная в условии задачи функция f принимает:

а) не более двух различных значений на любой прямой (проходящей через точку O): действительно, если она на трёх векторах одной прямой принимает разные значения, причём на векторе v — наибольшее, а на некотором ненулевом (такой найдётся) векторе u — меньшее значение, то для некоторого числа α получим противоречие

$$v = \alpha u \quad \Rightarrow \quad f(v) = f(\alpha u + 0 \cdot u) \leqslant \max\{f(u), f(u)\} = f(u);$$

б) не более трёх различных значений на любой плоскости (проходящей через точку O): действительно, если она на четырёх векторах одной плоскости принимает разные значения, причём на векторе v — наибольшее, а на некоторых неколлинеарных (такие, в силу предыдущего пункта, найдутся) векторах u_1, u_2 — меньшие значения, то для некоторых чисел α_1, α_2 получим противоречие

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \quad \Rightarrow \quad f(v) = f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \leqslant \max\{f(u_1), f(u_2)\};$$

в) не более четырёх различных значений на всём пространстве: действительно, если она на пяти векторах принимает разные значения, причём на векторе v — наибольшее, а на некоторых некомпланарных (такие, в силу предыдущего пункта, найдутся) векторах u_1, u_2, u_3 — меньшие значения, то для некоторых чисел α_1, α_2, α_3 получим противоречие

$$\begin{aligned} v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \quad \Rightarrow& \\ \Rightarrow \quad f(v) = f(\alpha_1 u_1 + (\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3)) &\leqslant \\ \leqslant \max\{f(u_1), f(\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3)\} &\leqslant \\ \leqslant \max\{f(u_1), \max\{f(u_2), f(u_3)\}\} &= \\ = \max\{f(u_1), f(u_2), f(u_3)\}&. \end{aligned}$$

Во-вторых, приведём пример функции f, удовлетворяющей условию задачи и принимающей ровно четыре различных значения: введя в пространстве декартовы координаты с началом в точке O, определим

$$v=(x,y,z) \quad \Rightarrow \quad f(v)=\begin{cases} 0, & x=y=z=0; \\ 1, & x=y=0\neq z; \\ 2, & x=0\neq y; \\ 3, & 0\neq x. \end{cases}$$

К о м м е н т а р и й. Описанная в задаче функция возникла в исследованиях великого русского математика А. М. Ляпунова по устойчивости движения: роль векторов v играли решения линейной системы, образующие n-мерное пространство (в нашем случае — трёхмерное), а значениями функции f служили их показатели Ляпунова.

Такая функция удовлетворяла описанному в условии нашей задачи неравенству

$$f(\alpha u+\beta v)\leqslant \max\{f(u), f(v)\},$$

откуда вытекало, что у решений одной системы могло быть не более n различных конечных показателей Ляпунова (не считая показателя нулевого решения, равного по определению $-\infty$).

Для доказательства этого факта достаточно заметить, что у функции f прообраз любого замкнутого луча $[-\infty, y]$ представляет собой в исходном пространстве линейное подпространство, так как

$$f(u), f(v)\leqslant y \quad \Rightarrow \quad f(\alpha u+\beta v)\leqslant y,$$

а значит, если бы функция принимала не менее $n+2$ различных значений

$$y_0<y_1<\ldots<y_n<y_{n+1},$$

то прообразы соответствующих им лучей образовывали бы систему из $n+2$ вложенных подпространств

$$L_0\subsetneq L_1\subsetneq\ldots\subsetneq L_n\subsetneq L_{n+1}$$

возрастающей размерности, что противоречит n-мерности исходного пространства.

5. Проведём AK, DL, MN и PQ — перпендикуляры к прямой BC (рис. 30). Так как $AM=MD$, то $KN=NL$, а так как

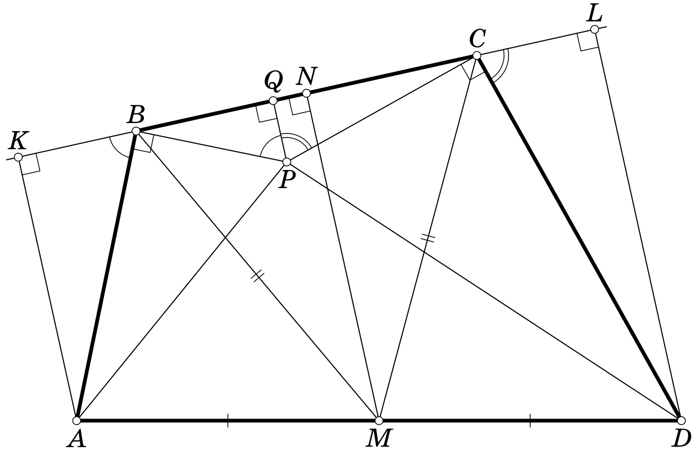


Рис. 30

$MB = MC$, то $BN = NC$. Следовательно, $KB = CL$. Из прямоугольных треугольников AKB и BPQ получаем

$$\cos\angle KBA = \cos\angle BPQ = \frac{KB}{AB} = \frac{QP}{BP}.$$

Аналогично, из прямоугольных треугольников CLD и QPC получаем

$$\cos\angle LCD = \cos\angle CPQ = \frac{CL}{CD} = \frac{QP}{CP}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{QP}{KB} = \frac{BP}{AB} \quad \text{и} \quad \frac{QP}{CL} = \frac{CP}{CD},$$

т. е. $\operatorname{tg}\angle BAP = \operatorname{tg}\angle CDP$.

6. Ответ: а) 1; б) $[n/k]$.

Решение. Отметим, что действия каждого игрока при любом плане действий однозначно определяются цветом шапок у остальных участников команды (так как другой информации у него нет).

а) Пусть $n = 2$ и $k = 2$. Какую бы шапку ни надели на первого игрока, после этого однозначно определяется, какой шарф выберет второй игрок. Так как на второго игрока могут надеть шапку любого из 2 цветов, то будут случаи, когда цвета шарфа и шапки у второго игрока не совпадут. Значит, нельзя гарантировать двух совпадений. Покажем, что одно совпадение всегда можно гарантировать.

Пусть игроки заранее договариваются о том, что первый игрок выбирает шарф так, чтобы его цвет совпал с цветом шапки второго игрока, а второй игрок выбирает шарф так, чтобы его цвет был противоположен цвету шапки первого игрока. Тогда, если им надели шапки одинакового цвета, то у первого игрока цвета шарфа и шапки совпадут, а если им надели шапки разного цвета, то у второго игрока цвета шарфа и шапки совпадут. Поэтому всегда будет ровно одно совпадение.

б) Докажем, что при произвольных n и k нельзя гарантировать больше чем $[n/k]$ совпадений. Пусть цвета шапок у всех игроков, кроме первого, фиксированы, а у первого игрока возможен любой из k цветов. Так как действия первого игрока однозначно определяются цветом шапок у остальных участников команды, то среди этих k случаев ровно в одном цвета шарфа и шапки у первого игрока совпадут. Поскольку на $n-1$ игроков шапки k цветов можно надеть k^{n-1} способами, то среди всех k^n способов надевания шапок на n игроков ровно в k^{n-1} случаях цвета шарфа и шапки у первого игрока совпадут. То же верно для любого игрока. Поэтому для любого фиксированного плана действий среди всех k^n способов надевания шапок будет всего nk^{n-1} совпадений цвета шарфа и шапки у каких-нибудь игроков. Значит, среднее число совпадений на один способ надевания шапок будет равно $nk^{n-1}/k^n = n/k$ и, следовательно, минимальное число совпадений не превосходит n/k. То есть найдётся хотя бы один способ надевания шапок, при котором число совпадений не превосходит n/k. Так как число совпадений должно быть целым, то оно при этом не превосходит $[n/k]$.

Опишем план действий игроков, при котором они всегда могут гарантировать $[n/k]$ совпадений. Сопоставим цветам числа $0, 1, 2, \ldots, k-1$. Пусть игроки составят $[n/k]$ групп по k игроков (оставшиеся игроки пусть действуют произвольно). В каждой группе пусть игроки получат разные номера $0, 1, 2, \ldots, k-1$. Во время игры пусть игрок с номером i выбирает цвет шарфа так, чтобы сумма всех чисел, соответствующих цвету его шарфа и цветам шапок остальных игроков его группы, давала при делении на k остаток i. Таким образом, если сумма чисел, сопоставленных цветам шапок остальных игроков его группы, равна a, то он должен выбрать число x из множества $0, 1, 2, \ldots, k-1$ так, чтобы число $a+x-i$ делилось на k. При любых a и i такое x определяется однозначно, то есть план действий корректен. При этом в любом случае ровно 1 игрок в группе угадает цвет своей шапки. А именно, если сумма чисел, сопоставленных цветам всех шапок, надетых игрокам данной группы, даёт при делении на k остаток j, то цвет шарфа и шапки совпадёт у игрока с номером j в данной группе. Следовательно, в любом случае цвет шарфа и шапки совпадёт как минимум у $[n/k]$ игроков.

К о м м е н т а р и й. Эта задача появилась в результате коллективного обсуждения «фольклорной» задачи (см. «Квант», 2006 г., № 3, задача M2000).

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс (1300 работ)

Баллы	Задача					
	1	2	3	4	5	6
0	442	306	917	591	905	649
1	271	209	15	130	58	389
2	80	316	68	42	53	158
3	507	67	9	428	0	75
4		402	46	46	182	3
5			245	8	0	0
6				55	38	2
7					0	7
8					53	17
9					1	
10					10	

7 класс (967 работ)

Баллы	Задача							
	1	2а	2б	3	4	5а	5б	6
0	188	443	466	596	750	662	938	141
1	17	79	68	278	66	19	2	14
2	19	445	45	31	71	27	7	739
3	743		388	12	6	259	0	51
4				15	7		20	17
5				35	7			2
6					60			0
7								0
8								3

8 класс (607 работ)

Оценка	Задача					
	1	2	3	4	5	6
+	321	295	129	0	28	3
±	14	46	15	0	3	4
∓	71	147	24	9	6	22
−	125	90	170	431	238	377
0	76	29	269	167	332	201

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

9 класс (612 работ)

Оценка	Задача					
	1	2	3	4	5	6
+	263	165	53	13	4	0
+.	20	10	1	0	1	0
±	29	7	13	0	1	0
∓	33	18	0	206	15	0
−.	10	1	2	11	0	3
−	232	257	490	243	485	260
0	25	154	53	139	106	349

10 класс (616 работ)

Оценка	Задача					
	1	2	3	4	5	6
+	115	170	18	13	6	0
+.	19	3	4	1	0	0
±	26	16	2	7	2	1
∓	53	26	2	13	10	9
−.	8	1	2	1	15	11
−	330	284	224	328	161	146
0	65	116	364	253	422	449

11 класс (925 работ)

Оценка	Задача							
	1	2	3а	3б	4	5	6а	6б
+	479	194	159	12	24	34	105	4
±	47	18	17	5	15	3	54	2
∓	131	102	45	34	64	5	15	8
−	268	611	704	874	822	883	751	911

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики. На факультете действуют научные школы, возглавляемые учёными самого высокого класса. Учебные планы факультета охватывают все современные направления математики и механики. Диплом механико-математического факультета признан во всём мире. Выпускники факультета трудятся во всех крупных научно-исследовательских центрах, учебных и иных учреждениях, не обязательно непосредственно связанных с математикой и механикой. На мехмате учат не столько рецептам решения конкретных задач, сколько умению думать самостоятельно, а также извлекать знания из разных источников. Именно это позволяет выпускникам факультета быстро включаться и быть эффективными практически в любой иной сфере деятельности — от компьютерной или финансовой до управления производством и политики.

Ежегодно в апреле механико-математический факультет проводит олимпиады для учащихся 7—10 классов, результаты которых учитываются при наборе в математические классы при факультете и в школу-интернат имени А. Н. Колмогорова. В 2010 году мехмат приглашает учеников 7—10 классов принять участие в олимпиаде по математике и механике (11 апреля, начало в 10^{00} для 7—9 классов и в 15^{00} для 10 класса). Олимпиада проходит в Главном здании МГУ на Воробьёвых горах, информация для участников вывешивается на колоннах перед входом за 15—20 минут до начала олимпиады. Предварительной регистрации не требуется. С собой достаточно иметь тетрадку и ручку.

ЖУРНАЛ «КВАНТ» В ИНТЕРНЕТЕ
http://kvant.mccme.ru/

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

Сейчас старые номера журнала «Квант» практически недоступны читателям. Имеется ничтожное число библиотек, в которых есть полное собрание вышедших журналов. Этот сайт призван открыть путь к богатому архиву журнала всем, кто этого пожелает.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет математики ГУ-ВШЭ — небольшой молодой математический факультет, ориентированный на исследования. Преподают на факультете ведущие математики Москвы, активно разрабатывающие собственные направления. Особенное внимание уделяется современным направлениям в алгебре, топологии, алгебраической геометрии. Студенты факультета получают широкую базовую математическую подготовку. Это даст выпускникам свободу выбора последующей специализации, а приобрётенные исследовательские навыки пригодятся вне зависимости от специальности.

По окончании программы бакалавриата выпускники смогут совершенствоваться в магистратуре и аспирантуре факультета математики, а также других факультетов ГУ-ВШЭ и других ведущих вузов России и мира.

Высшая школа экономики — государственный университет. Студенты получают отсрочку от призыва в вооружённые силы. В университете имеется военная кафедра. Иногородние студенты обеспечиваются общежитием.

В 2010 году факультет проведет прием на 40 бюджетных (бесплатных) мест. Зачисление проводится по результатам ЕГЭ по математике, русскому языку и физике, а также дополнительного устного экзамена по математике. Льготы для победителей олимпиад будут установлены позднее.

Подробную информацию о факультете и преподавателях см. на сайте http://math.hse.ru.

Информацию об учебных курсах и учебные материалы можно найти на сайте http://vyshka.math.ru.

Вопросы задавайте по электронной почте math@hse.ru.

ВОСЬМАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА ПО ГЕОМЕТРИИ

для 8—11 классов состоится 11 апреля 2010 года в помещении школы № 192 (Ленинский просп., д. 34-а, м. «Ленинский проспект».). Так как ожидается большое количество участников, то желающих принять участие в олимпиаде просим до 5 апреля зарегистрироваться на сайте школы. При регистрации необходимо указать свою фамилию, имя, класс, школу и округ (город). Более подробную информацию смотрите на сайте http://olympiads.mccme.ru/ustn/

О Г Л А В Л Е Н И Е

LXXIII Московская математическая олимпиада.
Задачи и решения

Подписано в печать 26/III 2010 г.
Формат бумаги 60 × 90/16. Объём 3 печ. л.
Гарнитура Школьная. Тираж 2000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано в ООО «Принт Сервис Групп».
Москва, 2-й Лихачёвский пер., д. 7.

ИНФОРМАЦИЯ О НАБОРЕ

в московские специализированные школы и классы на 2009/2010 учебный год*

Школа, адрес, тел., адрес в Интернете	Набираемые классы	Сроки приёма
№ 2 (499) 137-17-69 ул. Фотиевой, 18 (499) 137-69-31 http://www.sch2.ru/	7 и 8 физ.-матем.	Вступительные испытания с 19 марта по 14 мая
№ 25 (495) 939-39-35 Университетский пр., 7 http://sch25.ru/	7 физ.-матем., (*добор* в 8 и 9 физ.-матем.); 10 физ.-матем. при мехмате МГУ	7 кл. по вторникам с 16^{00}, 8 и 9 кл. по четвергам с 16^{00}
№ 54 (499) 245-54-25 ул. Доватора, 5/9 (499) 245-99-72 http://moscowschool54.narod.ru	8 матем. (*добор* в 9 и 10 матем.) при мехмате МГУ	С января по май по четвергам с 10^{20} до 12^{00} в каб. 36
№ 57 (495) 691-85-72 М. Знаменский пер., 7/10, стр. 5 (495) 691-54-58 http://www.sch57.msk.ru/	8, 9 матем., 9 гум.	8 матем. по средам в 16^{00} с 31 марта, 9 матем. по средам в 16^{00} с 24 марта, 9 гум. по понедельникам в 16^{00} с 29 марта
№ 91 (495) 690-35-58 ул. Поварская, 14 http://www.91.ru/ sch91-math@yandex.ru	8, 9 матем.	8 кл. 12, 19 и 26 апреля в 16^{00}, 9 кл. по понед. и четвергам с 5 апреля в 16^{00}
№ 179 (495) 692-48-51 ул. Бол. Дмитровка, 5/6, стр. 7 http://www.179.ru/	8, 9 матем.	8 кл. по средам в 17^{00} с 17 марта, 9 кл. по понед. в 17^{00} с 15 марта по 26 апреля
№ 192 (499) 137-33-55 Ленинский просп., 34-А (499) 137-72-85 http://www.sch192.ru/ mail@sch192.ru	5 ест.-научный, 7 био.-хим., физ.-матем., 9 физ.-хим., 10 физ.-хим.; *добор* в 6 подготов. к лицейск., 8, 9, 10 био.-хим., 8, 9, 10 физ.-матем.	Март—май по пятницам в 16^{00}

* Информация предоставлена школами в МЦНМО. Публикуется бесплатно. Обучение в школах (классах) бесплатное.

Школа, адрес, тел., адрес в Интернете	Набираемые классы	Сроки приёма
№ 218 Дмитровское ш., 5а (495) 976-19-85 sch218.edu@mtu-net.ru http://www.mccme.ru/schools/218/	6, 7 разноур. обуч. (матем. и рус. яз.), 8 инд. уч. планы с возм. углуб. изучения матем., физ., информ., рус. и ин. яз., литерат., ист., биол.; *добор* в 9 и 10	Запись на собеседование с 1 апреля по телефону (понед., среда, пятница 16^{00}—18^{00})
№ 463 (495) 312-33-51 Судостроительная ул., 10 (499) 612-34-19 http://sch463.edite.ru	8 при МФТИ, *добор* в 9, 10.	Экзамен 13 марта в 10^{30} в школе 1173
№ 1173 (495) 312-33-51 Чертановская ул., 27-Б (499) 313-06-46 http://sch1173.tdusite.ru	8 при МФТИ, *добор* в 9, 10.	Экзамен 13 марта в 10^{30}
№1434 (495) 932-00-00 ул. Раменки 15, корп. 1 http://coe1434.ru http://school1134.org.ru	9 физ.-матем. при мехмате МГУ *добор* в 10 физ.-матем. при мехмате МГУ	Апрель
№ 1543 (495) 433-16-44 ул. 26 Бакинских комиссаров, 3, корп. 5 (495) 434-26-44 http://www.1543.ru	8 матем., физ.-хим., био., гум.	Апрель
СУНЦ МГУ (495) 445-11-08 Кременчугская ул., 11 priem@pms.ru http://www.pms.ru	10 физ.-матем., хим., био., 11 физ.-матем.	Март—май
«Интеллектуал» (495) 445-52-10 Кременчугская ул., 13 http://int-sch.ru	5 кл. разноур. обуч. с возм. угл. изуч. матем., ист., биол., химии, геогр. и др. предм., 7 и *добор* в 8—10, широкий выбор кружков	Запись на экзамены с февраля на сайте

Более подробная информация о наборе в эти и другие школы — на сайте http://www.mccme.ru

Департамент образования города Москвы
Совет ректоров высших учебных заведений Москвы и Московской обл.
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московское математическое общество
Московский институт открытого образования
Московский центр непрерывного математического образования

LXXIII

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Издательство МЦНМО
Москва, 2010

А Р Х И В И З Д А Т Е Л Ь С Т В А Mathesis
http://maTHesis.ru

Одесское издательство Mathesis выпускало в 1904—1925 годах удивительно интересные книги. Некоторые из них стали классикой, часть сейчас незаслуженно забыта. Объединяет их то, что все они раритеты. Сделать доступными эти интересные книги с их неповторимым языком — главная задача архива.

Б И Б Л И О Т Е К А С А Й Т А Math.Ru
http://www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самый первый российский учебник по математике «Арифметика» Л. Ф. Магницкого, и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего более 400 книг).

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Е Э Т Ю Д Ы
http://www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях. Приглашаем совершить познавательные экскурсии по красивым математическим задачам. Их постановка понятна школьнику, но до сих пор некоторые задачи не решены учеными.

В С Е К Н И Г И П О М А Т Е М А Т И К Е
В М А Г А З И Н Е «М А Т Е М А Т И Ч Е С К А Я К Н И Г А»
В М Ц Н М О

В магазине представлен наиболее полный ассортимент книг издательства МЦНМО. Эти книги продаются по издательским ценам. Здесь также можно найти книги по математике ведущих издательств, таких как «Бином ЛЗ», Физматлит, УРСС, «Факториал», «Регулярная и хаотическая динамика», Фонд математического образования и просвещения.

В отделе школьной литературы представлен широкий ассортимент книг для школьников, учителей, руководителей математических кружков. В отделе вузовской и научной литературы можно найти учебники и научные монографии ведущих российских и зарубежных математиков. В магазине также имеются отделы «Книга — почтой» и букинистический.

Адрес магазина: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Проезд до ст. м. «Смоленская» или «Кропоткинская». Телефон для справок: (499) 241-72-85, (495) 745-80-31.

Магазин работает ежедневно кроме воскресенья с 11^{30} до 20^{00}.
E-mail: biblio@mccme.ru http://biblio.mccme.ru/

МЕХАНИЗМЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

http://tcheb.ru/

В проекте собираются все механизмы, созданные Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821—1894), великим российским математиком. Задача проекта — навсегда сохранить уникальное наследие. По каждому механизму будут приведены имеющиеся фотографии, компьютерная модель, интерактивная кинематическая схема, а также фильм, объясняющий принцип работы и показывающий механизм в движении.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

http://vofem.ru/

Электронная версия научно-популярного журнала, заложившего традиции жанра в литературе на русском языке.

С 1886 по 1917 год вышло 674 выпуска В. О. Ф. Э. М. Журнал в разные годы возглавляли: Эразм Корнелиевич Шпачинский (1886—1898), Владимир Акимович Циммерман (1898—1904), Вениамин Фёдорович Каган (1902—1917).

Периодичность — 24 раза в год отдельными выпусками в 24 или 32 страницы каждый.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы, отчёты о заседаниях московского математического кружка и многое другое.

Награждение наградами награждённых, не награждённых наградами на награждении, будет происходить по средам с 16^{00} до 18^{00} в комн. 303 МЦНМО (Бол. Власьевский пер., 11, м. «Кропоткинская» или «Смоленская», http://www.mccme.ru, mmo@mccme.ru, тел. (499) 241-12-37).

СХЕМА ПРОЕЗДА В МЦНМО