7 класс

7.1. На длинной ленте написаны цифры 201520152015.... Вася вырезал ножницами два куска ленты и составил из них положительное число, которое делится на 45. Приведите пример таких кусков и запишите число, составленное из них.

Ответ: например, можно вырезать куски «2» и «520» и составить из них число 2520, которое делится на 45.

Возможны и другие варианты: из кусков 52 *и* 20 *составляется число* 5220; *из кусков* 1 *и* 2015 — *число* 12015, *из кусков* 201 *и* 15 — *число* 20115, *и так далее.*

Пример можно подобрать, исходя из следующих соображений: число делится на 45 *тогда и только тогда, когда оно делится на* 9 *и на* 5. *Поэтому, используя соответствующие признаки делимости, получим, что во втором куске последняя цифра должна быть либо* 5, *либо* 0, *а сумма цифр в обоих кусках должна делиться на* 9.

Критерии проверки:

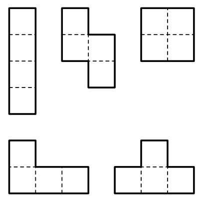
$+$ *верно указаны оба куска и составленное число (обоснования не требуются)*

$\pm$ *верно указаны оба куска, но не записано составленное число*

$\pm$ *приведено несколько примеров кусков и составленного числа, среди которых есть как верный, так и неверные*

$\mp$ *верно указано только составленное число, но неясно, из каких кусков оно составлено*

$-$ *задача не решена или решена неверно*



7.2. Заполните квадрат размером 6×6 фигурками тетриса (см. рисунок) так, чтобы использовать фигурки каждого из указанных видов. (*Фигурки можно как поворачивать, так и переворачивать.*)

Ответ: например, см. рис. 7.2.

Существуют и другие примеры.

Критерии проверки:

$+$ *приведен верный пример*

$\pm$ *приведено несколько примеров, среди которых есть как верный, так и неверные*

$\mp$ *приведен только пример, в котором отсутствует ровно один из указанных видов тетриса*

$-$ *приведен только пример, в котором отсутствуют несколько указанных видов тетриса (более одного вида)*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

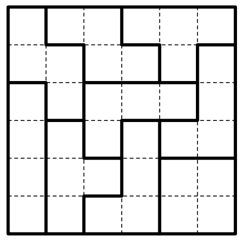


Рис. 7.2

7.3. На завтрак Карлсон съел 40% торта, а Малыш съел 150 г. На обед Фрекен Бок съела 30% остатка и ещё 120 г, а Матильда вылизала оставшиеся 90 г крошек от торта. Какой массы был торт изначально?

Ответ: 750 г.

Решение. *Первый способ (решаем «с конца»).*

1) $90 + 120 = 210$ (г) торта осталось после того, как Фрекен Бок съела 30% остатка.

Так как Фрекен Бок съела 30% остатка, то 210 г — это 70% остатка.

2) $210 : 0{,}7 = 300$ (г) торта было перед тем, как Фрекен Бок приступила к обеду.

3) $300 + 150 = 450$ (г) торта было перед тем, как начал есть Малыш.

Так как Карлсон съел 40% торта, то 450 г составляет 60% торта.

4) $450 : 0{,}6 = 750$ (г) изначальная масса торта.

Второй способ (составляем уравнение). Пусть x г — изначальная масса торта, тогда после завтрака Карлсона и Малыша осталось $0{,}6x - 150$ (г), после обеда фрекен Бок осталось $0{,}7(0{,}6x - 150) - 120 = 0{,}42x - 225$ (г), что составляет 90 г, вылизанных Матильдой. Получим уравнение $0{,}42x - 225 = 90$, решением которого является $x = 750$.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено решение «с конца», в котором верно выполнены все действия и получен верный ответ, но пояснения отсутствуют*

$\pm$ *верно составлено и решено уравнение, но пояснения к составлению уравнения отсутствуют*

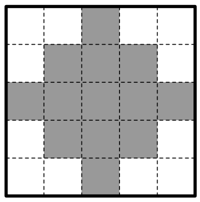
∓ *присутствует идея решения «с конца» и хотя бы первое действие выполнено верно, но до конца решение не доведено или доведено с ошибками*

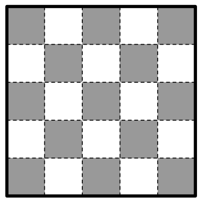
∓ *верно составлено уравнение, но оно не решено или при его решении допущена арифметическая ошибка*

∓ *приведен только верный ответ* (*возможно, с проверкой, что он годится*)

− *задача не решена или решена неверно*

7.4. За одну операцию можно поменять местами любые две строки или любые два столбца квадратной таблицы. Можно ли за несколько таких операций из закрашенной фигуры, изображенной на рисунке слева, получить закрашенную фигуру, изображенную на рисунке справа? Ответ обоснуйте.





Ответ: нельзя.

Решение. Заметим, что фигура, изображенная слева, содержит полностью закрашенный столбец таблицы, а у фигуры, изображенной справа, такого столбца нет. При любой перестановке столбцов или строк этот столбец сохранится, так как перестановка столбцов изменяет только его расположение, а перестановка строк не изменяет в нем ничего. Следовательно, никаким количеством указанных операций получить из одной фигуры другую невозможно.

Можно также проводить аналогичное рассуждение не для закрашенного столбца, а для полностью закрашенной строки.

Отметим, что рассуждение типа «при любой перестановке столбцов всегда будет полностью закрашенный столбец, а при любой перестановке строк всегда будет полностью закрашенная строка» нельзя признать полностью верным, так как, формально говоря, из этого не следует, что перестановка столбцов не может разрушить закрашенную строку, а перестановка строк не может разрушить закрашенный столбец.

Критерии проверки:

+ *приведено полное обоснованное решение*

± *приведено верное в целом рассуждение, в котором присутствует идея «инварианта», но она сформулирована недостаточно четко* (*например, см. комментарий*)

− *приведен только ответ*

− *задача не решена или решена неверно*

7.5. На доске записаны 7 различных нечётных чисел. Таня подсчитала их среднее арифметическое, а Даня упорядочил эти числа по возрастанию и выбрал из них число, оказавшееся посередине. Если из Таниного числа вычесть Данино, то получится число $\frac{3}{7}$. Не ошибся ли кто-нибудь из них?

Ответ: кто-то из них наверняка ошибся.

Решение. Пусть на доске записаны числа a, b, c, d, e, f и g, причем $a < b < c < d < e < f < g$, тогда Танино число равно $\frac{a+b+c+d+e+f+g}{7}$, а Данино число — это d. Из условия задачи следует, что $\frac{a+b+c+d+e+f+g}{7} - d = \frac{3}{7}$, то есть $a+b+c+d+e+f+g-7d = 3$.

После приведения подобных слагаемых это равенство можно записать так: $a+b+c+e+f+g = 6d+3$. Заметим, что в левой части полученного равенства стоит сумма шести нечетных слагаемых, которая всегда четна, а в правой части стоит число, которое нечетно при любых целых значениях d. Таким образом, это равенство выполняться не может, значит, Таней или Даней допущена ошибка (*возможно, ошибку допустили оба*).

Критерии проверки:

+ *приведено полное обоснованное решение*

± *приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные неточности или пробелы*

∓ *в рассуждениях присутствует идея «четности», но решение не доведено до конца или содержит либо логические, либо арифметические ошибки*

− *верный ответ получен путем рассмотрения конкретного набора чисел*

− *приведен только ответ*

− *задача не решена или решена неверно*

8 класс

8.1. Натуральное число n называется «хорошим», если после приписывания его справа к любому натуральному числу получается число, делящееся на n. Запишите десять «хороших» чисел, которые меньше, чем 1000. (*Достаточно привести ответ.*)

Ответ: любые 10 чисел из набора: 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 200, 250, 500.

Ответ можно получить, исходя из следующих соображений. Приписывание справа числа n равносильно умножению исходного числа на 10^p, где p — количество цифр в числе n, и прибавлению к результату самого числа n. Так как исходное число может быть любым, то число n окажется «хорошим» тогда и только тогда, когда 10^p кратно n. Поэтому в разложении числа n на простые множители могут встречаться только множители 2 и 5. Заметим, что этого недостаточно; например, числа 4 и 625 «хорошими» не являются.

Критерии проверки:

$+$ *верно записано не менее, чем 10 «хороших» чисел, и других чисел в ответе нет*

$\pm$ *верно записано не менее, чем 10 «хороших» чисел, но, кроме них, в ответе присутствуют одно или два числа, не являющихся «хорошими»*

$\pm$ *верно записано 8 или 9 «хороших» чисел, и других чисел в ответе нет*

$\mp$ *верно записано 5 – 9 «хороших» чисел, но, кроме них, в ответе присутствуют не более двух чисел, не являющихся «хорошими»*

$-$ *во всех других случаях*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

Наличие в решении любых рассуждений (в том числе, и неверных) на результат проверки не влияет.

8.2. Сорока-ворона кашу варила, деток кормила. Третьему птенцу досталось столько же каши, сколько первым двум вместе взятым. Четвертому — столько же, сколько второму и третьему. Пятому — столько же, сколько третьему и четвертому. Шестому — столько же, сколько четвертому и пятому. А седьмому не досталось — каша кончилась! Известно, что пятый птенец получил 10 г каши. Сколько каши сварила сорока-ворона?

Ответ: 40 г.

Решение. Пусть первому птенцу досталось m г каши, а второму — n г. Тогда третьему досталось $m + n$ (г), четвертому — $m + 2n$ (г), пятому — $2m + 3n$ (г), шестому — $3m + 5n$ (г). Следовательно, всего было каши: $m+n+(m+n)+(m+2n)+(2m+3n)+(3m+5n) = 8m+12n = 4(2m+3n)$ (г). Это в 4 раза больше, чем досталось пятому птенцу, значит, сорока-ворона сварила $10 \cdot 4 = 40$ (г) каши.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *верный ответ получен путем рассмотрения частных примеров*

$\mp$ *разумно введены две переменные и записаны выражения для количества каши, доставшейся каждому птенцу (возможно, с ошибкой), но решение не доведено до верного ответа*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

8.3. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Известно, что $\angle CAD = \angle DBA = 40^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle CBD = 20^\circ$. Найдите угол CDB.

Ответ: 30°.

Решение. Так как $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 60^\circ$, то треугольник ABC — равносторонний (см. рис. 8.3а). Далее можно рассуждать по-разному.

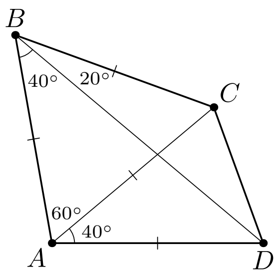


Рис. 8.3а

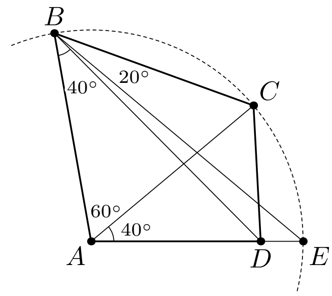


Рис. 8.3б

Первый способ. В треугольнике ABD: $\angle ABD = 40^\circ$, $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 100^\circ$, значит, $\angle BDA = 180^\circ - (40^\circ + 100^\circ) = 40^\circ$, значит, этот треугольник — равнобедренный (см. рис. 8.3а). Таким образом, $AB = BC = CA = AD$, поэтому треугольник CAD – также равнобедренный. Тогда $\angle ADC = \angle ACD = (180^\circ - \angle CAD) : 2 = 70^\circ$, $\angle CDB = \angle CDA - \angle BDA = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

Второй способ. Проведем окружность с центром A и радиусом $AB = AC$ и докажем, что она содержит точку D. Пусть это не так, тогда окружность пересечет луч AD в некоторой точке E, отличной от D (см. рис. 8.3б). По теореме о вписанном угле $\angle CBE = \frac{1}{2}\angle CAE = 20^\circ$, то есть лучи BE и BD совпадут. Следовательно, совпадут точки E и D — противоречие. Так как окружность проходит через точку D, то $\angle CDB = \frac{1}{2}\angle CAB = 30^\circ$.

Возможно также аналогичное решение, в котором сначала доказывается равнобедренность треугольника CAD, а затем используется окружность с центром A и радиусом $AC = AD$. Отметим, что попытка сразу использовать вспомогательную окружность (без доказательства равенства каких-либо двух отрезков) вряд ли приведет к успеху.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные неточности или пробелы*

$\mp$ *проведена вспомогательная окружность с центром A, содержащая точки B, C и D, но не доказано, что она существует, и получен верный ответ*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

8.4. Двенадцать стульев стоят в ряд. Иногда на один из свободных стульев садится человек. При этом ровно один из его соседей (если они были) встает и уходит. Какое наибольшее количество человек могут одновременно оказаться сидящими, если вначале все стулья были пустыми?

Ответ: 11.

Решение. *Оценка.* Заметим, что все стулья одновременно занять невозможно, так как в тот момент, когда сядет человек на последний незанятый стул, один из его соседей встанет. Следовательно, одновременно сидящих может быть не больше, чем 11.

Пример. Покажем, как посадить 11 человек. Пронумеруем стулья числами от 1 до 12. Первый стул занять легко. Второй стул займем в два этапа. На первом этапе человек садится на третий стул, а на втором этапе посадим человека на второй стул, а сидящий на третьем стуле встанет. Дальше действуем аналогично: если заняты стулья с номерами от 1 до k, то сначала посадим человека на стул с номером $k+2$, а затем посадим на стул с номером $k+1$, освобождая при этом стул с номером $k+2$. После того как эта операция будет проделана для всех k от 1 до 10, стулья с номерами от 1 до 11 будут заняты, а двенадцатый стул — свободен.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведен верный ответ и объяснено, как посадить* 11 (*есть верный пример*), *но не объяснено, почему не может быть* 12 *сидящих* (*нет оценки*)

$\mp$ *приведен верный ответ и объяснено, почему не может быть* 12 *сидящих, но пример рассадки для* 11 *не приведен или приведен неверно*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

8.5. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена произвольная точка M. Докажите, что можно выбрать на стороне AB точку C_1, на стороне BC — точку A_1, а на стороне AC — точку B_1 таким образом, чтобы длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$ были равны отрезкам MA, MB и MC.

Решение. Отметим на стороне AB точку C_1, на стороне BC точку A_1, а на стороне AC точку B_1 таким образом, что $MC_1 \parallel BC$, $MA_1 \parallel AC$, $MB_1 \parallel AB$ (см. рис. 8.5). Тогда отрезки MA_1, MB_1 и MC_1 разобьют данный треугольник на три трапеции. Из параллельности следует, что каждый угол при большем основании этих трапеций равен 60°, поэтому эти трапеции равнобокие. Следовательно, в каждой трапеции диагонали равны: $B_1C_1 = MA$, $A_1C_1 = MB$, $A_1B_1 = MC$, что и требовалось.

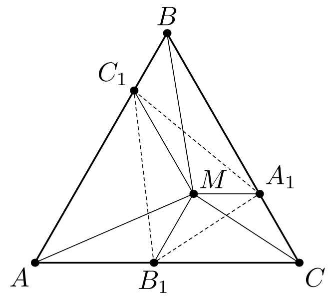


Рис. 8.5

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное построение, но не доказано* (*или доказано с пробелами*), *что стороны полученного треугольника — искомые*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

Наличие в решении любых рассуждений о количестве способов отметить искомые точки на результат проверки не влияет.

6. В каждой клетке таблицы размером 13×13 записано одно из натуральных чисел от 1 до 25. Клетку назовем «хорошей», если среди двадцати пяти чисел, записанных в ней и во всех клетках одной с ней горизонтали и одной с ней вертикали, нет одинаковых. Могут ли все клетки одной из главных диагоналей оказаться «хорошими»?

Ответ: нет, не могут.

Решение. Для каждой клетки одной из главных диагоналей будем рассматривать совокупность из двадцати пяти клеток: ее саму и все клетки, стоящие с ней в одной горизонтали или вертикали. Такую совокупность назовем «крестом».

Рассмотрим все «кресты», образованные клетками выделенной главной диагонали. Заметим, что любая клетка этой диагонали входит только в один «крест» (свой собственный), а любая другая клетка таблицы входит ровно в два таких «креста».

Далее можно рассуждать по-разному:

Первый способ. Рассмотрим натуральное число от 1 до 25, отсутствующее на выделенной главной диагонали (такое наверняка найдется, так как на диагонали всего лишь 13 клеток). Пусть все клетки главной диагонали — «хорошие», тогда это число входит в каждый из тринадцати «крестов» ровно один раз. Но любое число, стоящее вне главной диагонали, должно входить в два «креста», поэтому все кресты должны разбиваться на пары, а для тринадцати «крестов» это невозможно. Противоречие.

Второй способ. Для того, чтобы число 1 встретилось в каждом из 13 «крестов», оно должно быть записано в таблицу не менее семи раз. Это же можно сказать о каждом из двадцати пяти данных чисел. Значит, для того, чтобы все клетки рассматриваемой главной диагонали были «хорошими», потребуется заполнить не менее, чем $7 \cdot 25 = 175$ клеток. Но в таблице всего $13 \cdot 13 = 169$ клеток. Противоречие.

Таким образом, все клетки главной диагонали не могут оказаться «хорошими».

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные неточности или пробелы*

$-$ *приведен верный ответ с неверным обоснованием* (*в том числе, с помощью рассмотрения любого количества частных случаев или путем невразумительной ссылки на нечетность числа* 13)

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

9 класс

9.1. Известно, что $a^2+b=b^2+c=c^2+a$. Какие значения может принимать выражение

$$a(a^2-b^2)+b(b^2-c^2)+c(c^2-a^2)?$$

Ответ: 0.

Решение. Из условия следует, что $a^2-b^2=c-b$, $b^2-c^2=a-c$ и $c^2-a^2=b-a$. Следовательно, $a(a^2-b^2)+b(b^2-c^2)+c(c^2-a^2)=a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)=0$.

Критерии проверки:

+ *приведено полное обоснованное решение*

∓ *верный ответ получен путем рассмотрения частных примеров*

− *приведен только ответ*

− *задача не решена или решена неверно*

9.2. Могут ли произведения всех ненулевых цифр двух последовательных натуральных чисел отличаться ровно в 54 раза?

Ответ: да.

Решение. Таким свойством обладают, например, числа 299 и 300. Действительно, $2\cdot 9\cdot 9:3=54$.

Эти два числа — наименьшие из возможных. Другие примеры получатся, если выбрать любые два последовательных числа, оканчивающиеся на 299 *и* 300.

Критерии проверки:

+ *приведен верный пример*

− *приведен только ответ «да» или «нет»*

− *задача не решена или решена неверно*

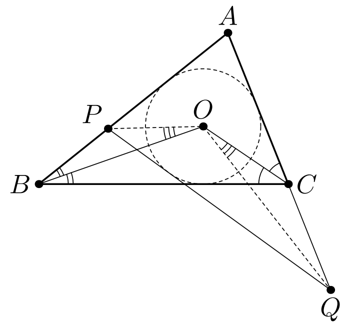


Рис. 9.3

9.3. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. На стороне AB выбрана точка P, а на продолжении стороны AC за точку C — точка Q так, что отрезок PQ касается окружности. Докажите, что $\angle BOP=\angle COQ$.

Решение. *Первый способ.* Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе. Применяя для треугольника BOP теорему о внешнем угле (см. рис. 9.3), получим: $\angle BOP=\angle APO-\angle ABO=\frac{1}{2}\angle APQ-\frac{1}{2}\angle ABC$. Аналогично, для треугольника COQ : $\angle COQ=\angle ACO-\angle AQO=\frac{1}{2}\angle ACB-\frac{1}{2}\angle AQP$. Осталось убедиться, что $\angle APQ-\angle ABC=$ $=\angle ACB-\angle AQP$. Это равенство равносильно тому, что $\angle APQ+\angle AQP=\angle ABC+\angle ACB$, которое, очевидно, выполняется, так как каждая его часть равна $180^\circ-\angle BAC$.

Второй способ. Заметим, что для треугольника PAQ данная окружность также является вписанной (см. рис. 9.3). Значит, O — точка пересечения биссектрис как в треугольнике BAC, так и в треугольнике PAQ. Следовательно, $\angle BOC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC=\angle POQ$. Тогда $\angle BOP=\angle POQ-\angle BOQ=$ $=\angle BOC-\angle BOQ=\angle COQ$, что и требовалось.

Критерии проверки:

+ *приведено полное обоснованное решение*

± *приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные неточности или пробелы*

− *задача не решена или решена неверно*

Доказательство формулы для вычисления тупого угла между двумя биссектрисами треугольника (см. второй способ) от учащихся не требуется.

9.4. Из Златоуста в Миасс выехали одновременно «ГАЗ», «МАЗ» и «КамАЗ». «КамАЗ», доехав до Миасса, сразу повернул назад и встретил «МАЗ» в 18 км, а «ГАЗ» — в 25 км от Миасса. «МАЗ», доехав до Миасса, также сразу повернул назад и встретил «ГАЗ» в 8 км от Миасса. Каково расстояние от Златоуста до Миасса?

Ответ: 60 км.

Решение. Пусть расстояние между городами равно x км, а скорости грузовиков: «ГАЗа» — g км/ч, «МАЗа» — m км/ч, «КамАЗа» — k км/ч. Для каждой пары машин приравняем их время движения до встречи. Получим $\frac{x+18}{k}=\frac{x-18}{m}$, $\frac{x+25}{k}=\frac{x-25}{g}$ и $\frac{x+8}{m}=\frac{x-8}{g}$. Запишем эти уравнения иначе: $\frac{x+18}{x-18}=\frac{k}{m}$, $\frac{x-25}{x+25}=\frac{g}{k}$ и $\frac{x+8}{x-8}=\frac{m}{g}$. Перемножив их почленно, получим: $\frac{x+18}{x-18}\cdot\frac{x-25}{x+25}\cdot\frac{x+8}{x-8}=1$.

Преобразуем полученное уравнение, учитывая, что знаменатель каждой дроби отличен от нуля: $x^3+x^2+(18\cdot 8-18\cdot 25-8\cdot 25)x-18\cdot 8\cdot 25=x^3-x^2+(18\cdot 8-18\cdot 25-8\cdot 25)x+18\cdot 8\cdot 25 \Leftrightarrow 2x^2=2\cdot 18\cdot 8\cdot 25$. Так как $x>0$, то $x=60$.

Критерии проверки:

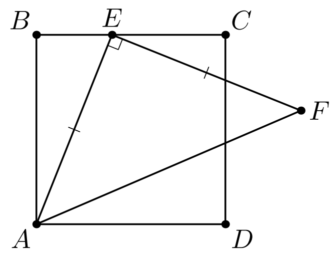
$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *верно получено уравнение с одной переменной (искомой), но при его решении допущена ошибка*

$\mp$ *верно записаны три пропорции, но дальнейших продвижений нет*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*



9.5. Квадрат $ABCD$ и равнобедренный прямоугольный треугольник AEF ($\angle AEF=90^\circ$) расположены так, что точка E лежит на отрезке BC (см. рисунок). Найдите угол DCF.

Ответ: 45°.

Решение. *Первый способ.* Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую BC (см. рис. 9.5а). Так как $\angle FEP=90^\circ-\angle BEA=\angle EAB$, то прямоугольные треугольники FEP и EAB равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $PF=BE$. Кроме того, $BE=BC-CE= =AB-CE=EP-CE=PC$. Таким образом, $PF=PC$, то есть треугольник CPF прямоугольный и равнобедренный. Значит, $\angle FCP=45^\circ$, тогда и $\angle DCF=45^\circ$.

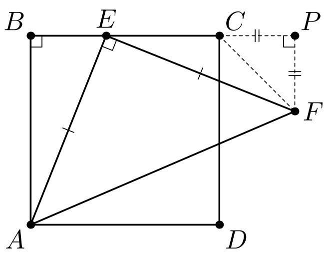


Рис. 9.5а

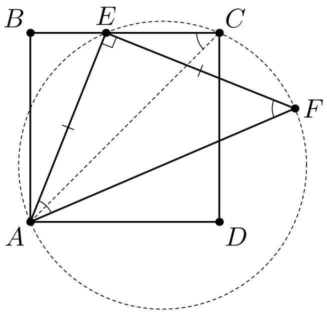


Рис. 9.5б

Второй способ. Проведем диагональ AC. Так как $\angle ECA=\angle EFA=45^\circ$, то четырёхугольник $EFCA$ — вписанный (см. рис. 9.5б). Тогда $\angle ACF=\angle AEF=90^\circ$. Следовательно, $\angle DCF=\angle ACF- -\angle ACD=90^\circ-45^\circ=45^\circ$.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные неточности или пробелы*

$-$ *приведен только ответ или ответ, полученный на частном примере*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

9.6. В ожидании покупателей продавец арбузов поочерёдно взвесил 20 арбузов (массой 1 кг, 2 кг, 3 кг, ..., 20 кг), уравновешивая арбуз на одной чашке весов одной или двумя гирями на другой чашке (возможно, одинаковыми). При этом продавец записывал на бумажке, гири какой массы он использовал. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться в его записях, если масса каждой гири — целое число килограммов?

Ответ: 6 чисел.

Решение. Проверим, что одной или двумя гирями массы 1 кг, 3 кг, 5 кг, 7 кг, 9 кг и 10 кг можно взвесить любой из данных арбузов. Действительно, $2=1+1$; $4=3+1$; $6=5+1$; $8=7+1$; $11=10+1$; $12=9+3$; $13=10+3$; $14=9+5$; $15=10+5$; $16=9+7$; $17=10+7$; $18=9+9$; $19=10+9$; $20=10+10$. Таким образом, 6 различных чисел могло быть записано.

Покажем, что пяти типов гирь недостаточно для требуемых взвешиваний. Если гирь пять, то какие-то двадцать арбузов, вообще говоря, взвесить можно. А именно: пять арбузов уравновесить одиночными гирями, пять — двойными и остальные $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ арбузов — парами различных гирь. Но при этом каждая комбинация гирь должна быть использована ровно один раз.

Заметим, что половина арбузов имеет нечетную массу. Пусть из пяти гирь k имеют нечетную массу, а $(5-k)$ — четную. Тогда количество способов взвесить арбуз нечетной массы в точности равно $k+k(5-k)=6k-k^2$. Однако ни при каком $k=0$; 1; 2; 3; 4; 5 это выражение не равно 10 (*это можно проверить либо подстановкой, либо решив квадратное уравнение* $6k-k^2=10$).

Следовательно, продавец не мог записать меньше чем 6 чисел.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

$\pm$ *доказано, что меньше шести чисел не могло быть записано, верно указан набор из шести гирь, но не показано, как именно взвешивать арбузы*

$\mp$ *доказано только, что пяти гирь не хватит*

$\mp$ *не доказано, что пяти гирь не хватит, но приведен верный набор из шести гирь (независимо от того, показано ли, как именно взвешивать арбузы)*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

10 класс

10.1. В клетках квадрата 3×3 записаны буквы (см. рисунок). Можно ли их расставить так, чтобы любые две буквы, исходно отстоявшие на ход коня, после перестановки оказались в клетках, отстоящих на ход короля? (*Например, из клетки с буквой a конь может пойти в клетки с буквами f и h, а король — в клетки с буквами b, d и e.*)

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Ответ: да, можно. Например, см. рис. 10.1.

Комментарий. Покажем, из каких соображений можно построить пример. Заметим, что каждая клетка, исключая центральную, соединена ходом коня ровно с двумя клетками. Начав обходить поле ходом коня с клетки a, обнаружим, что такой обход — единственный (с точностью до направления): a–h–c–d–i–b–g–f–a. Для того, чтобы получить пример, запишем получившуюся цепочку букв последовательно в каемку квадрата (начав с любой ее клетки), а центральную букву оставим без изменений.

a	h	c
f	e	d
g	b	i

Рис. 10.1

Критерии проверки

$+$ *приведен любой из возможных примеров*

$\pm$ *приведены несколько примеров, среди которых есть как верные, так и неверные*

$-$ *приведен только ответ «да»*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

10.2. Каково наибольшее количество последовательных натуральных чисел, у каждого из которых ровно четыре натуральных делителя (включая 1 и само число)?

Ответ: три числа.

Решение. Предположим, что найдутся четыре подряд идущих числа, удовлетворяющих условию. Заметим, что среди четырех подряд идущих чисел одно делится на 4. Тогда в разложении этого числа на простые множители есть не менее двух двоек. Если есть еще простой делитель p, отличный от двойки, то делителей у числа не менее шести: 1, 2, 4, p, $2p$, $4p$. Если в разложении есть только двойки, то для того, чтобы делителей было ровно четыре (1, 2, 4, 8), двоек должно быть ровно три. Итак, существует единственное делящееся на 4 число, у которого ровно четыре делителя — число 8. Его соседи (7 и 9) условию не удовлетворяют, поэтому искомых чисел не более трех.

Пример трех подряд идущих чисел, у каждого из которых ровно четыре натуральных делителя: 33, 34, 35. Есть и другие примеры.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено в целом верное, но недостаточно обоснованное решение (не содержащее неверных утверждений). Например, приведен верный ответ и верный пример, указано, что среди четырех подряд идущих чисел одно делится на 4, но случай $n = 8$ не упоминается*

$\mp$ *приведен верный ответ и верный пример, но в рассуждениях допущена ошибка. Например, указано, что любое число, кратное четырем, имеет больше четырех делителей*

$\mp$ *приведены только верный ответ и верный пример*

$-$ *приведен только ответ «три числа»*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

10.3. В остроугольном треугольнике MKN проведена биссектриса KL. Точка X на стороне MK такова, что $KX = KN$. Докажите, что прямые KO и XL перпендикулярны (O — центр описанной окружности треугольника MKN).

Решение. Пусть F — точка пересечения прямых KO и XL (см. рис. 10.3). Докажем, что $\angle KFX = 90^\circ$. Можно рассуждать различными способами.

Первый способ. Обозначим $\angle KNL = \alpha$. Тогда центральный угол $\angle MOK = 2\alpha$, а $\angle XKO = \angle MKO = 90^\circ - \alpha$ (*). Из условия задачи следует, что треугольники XKL и NKL равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle KXL = \angle KNL = \alpha$ (**). Тогда в треугольнике XKF: $\angle KFX = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ$, что и требовалось.

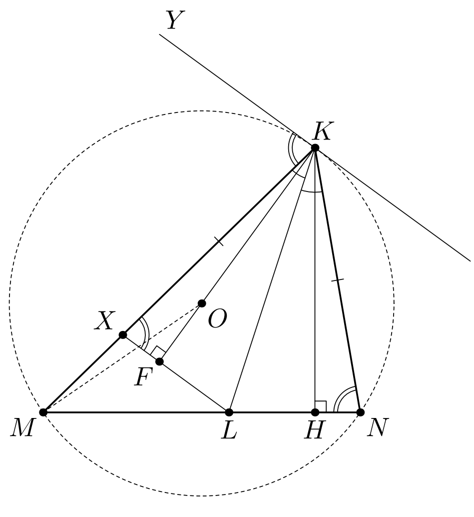


Рис. 10.3

Второй способ. Проведем высоту KH треугольника MKN. Тогда из $(*)$ следует, что $\angle MKO = \angle NKH$. При симметрии относительно прямой KL точка N переходит в точку X, прямая LN переходит в прямую LX, прямая KH переходит в прямую KO.

Поскольку $KH \perp LN$, то и образы этих прямых при симметрии также перпендикулярны, следовательно, $KO \perp XL$.

Третий способ. Пусть KY — касательная к описанной окружности треугольника MKN. Докажем, что $KY \parallel XL$, из чего и будет следовать утверждение задачи. Используя угол между касательной и хордой и утверждение $(**)$, получим, что $\angle YKX = \angle KNL = \angle KXL$, что и требовалось.

Комментарий. Ученик имеет право без доказательства использовать следующий факт: прямые KO и KH симметричны относительно биссектрисы угла K треугольника MKN.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

10.4. Даны три квадратных трехчлена: $x^2 + b_1x + c_1$, $x^2 + b_2x + c_2$ и $x^2 + \frac{b_1+b_2}{2}x + \frac{c_1+c_2}{2}$. Известно, что их сумма имеет корни (возможно, два совпадающих). Докажите, что хотя бы у двух из этих трехчленов также есть корни (возможно, два совпадающих).

Решение. Обозначим данные квадратные трехчлены через f_1, f_2 и f_3 соответственно. Тогда $2f_3 = f_1 + f_2$, а $f_1 + f_2 + f_3 = 3f_3 = \frac{3}{2}(f_1 + f_2)$. Поскольку сумма всех трех трехчленов имеет корни, то и $3f_3$ и $\frac{3}{2}(f_1 + f_2)$ также имеют корни. Следовательно, у третьего трехчлена и у суммы первых двух есть корни.

Осталось доказать, что хотя бы один из первых двух трехчленов имеет корни. Это можно сделать различными способами.

Первый способ. Предположим, что это не так и корней ни у одного из них нет. Поскольку оба трехчлена — приведенные, то они принимают только положительные значения, следовательно, их сумма также принимает только положительные значения, то есть не может иметь корней. Полученное противоречие завершает решение задачи.

Второй способ. Пусть f_3 имеет корни, а f_1 и f_2 не имеют корней. Записав дискриминанты этих трехчленов, получим:

$$\frac{(b_1+b_2)^2}{4} - 2(c_1+c_2) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (b_1+b_2)^2 \geqslant 8(c+c_2), \tag{1}$$
$$b_1^2 - 4c_1 < 0, \tag{2}$$
$$b_2^2 - 4c_2 < 0. \tag{3}$$

Заметим, что $2(b_1^2 + b_2^2) \geqslant b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2$ (см. (1)), то есть, $b_1^2 + b_2^2 \geqslant \frac{(b_1+b_2)^2}{2} \geqslant 4(c_1 + c_2)$. С другой стороны, сложив неравенства (2) и (3), получим, что $b_1^2 + b_2^2 < 4(c_1 + c_2)$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *в записи неравенства* (1) *вместо знака* $\geqslant$ *используется знак* $>$

$\mp$ *доказано только, что* f_3 *имеет корни*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

10.5. В турнире участвовали 50 шахматистов. В некоторый момент турнира была сыграна 61 партия, причем каждый участник сыграл либо две партии, либо три (и никто не играл друг с другом дважды). Могло ли оказаться так, что никакие два шахматиста, сыгравшие по три партии, не играли между собой?

Ответ: нет, не могло.

Решение. Пусть к рассматриваемому моменту турнира x шахматистов сыграло по три партии, а $50 - x$ — по две. Поскольку в каждой партии участвуют два шахматиста, то суммарное количество сыгранных к этому моменту партий равно $\frac{3x + 2(50-x)}{2}$. Из уравнения $\frac{3x + 2(50-x)}{2} = 61$ находим $x = 22$.

Предположим теперь, что никакие два шахматиста, сыгравшие по три партии, не играли между собой. Тогда все игры, которые они провели, были сыграны с шахматистами, сыгравшими по две партии. Таких игр $3 \cdot 22 = 66 > 61$, что противоречит условию задачи.

Критерии проверки

+ *приведено полное обоснованное решение*

∓ верно найдено только количество участников, сыгравших три партии

− *приведен только верный ответ*

− *задача не решена или решена неверно*

10.6. Через точку P проведены три отрезка, параллельные сторонам треугольника ABC (см. рисунок). Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

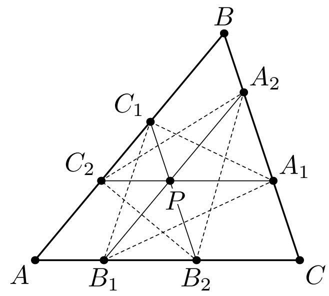


Рис. 10.5а

Решение. Заметим, что $S_{A_2B_2C_2} = S_{A_2C_2P} + S_{B_2C_2P} + S_{A_2B_2P}$, а $S_{A_1B_1C_1} = S_{A_1C_1P} + S_{B_1C_1P} + S_{A_1B_1P}$. Докажем, что $S_{A_2C_2P} = S_{A_1C_1P}$ (для других пар площадей равенство доказывается аналогично). Это можно доказать различными способами.

Первый способ. Поскольку C_2PA_2B — трапеция, то $S_{C_2A_2P} = S_{BA_2P}$. Так как BC_1PA_2 — параллелограмм, то $S_{BA_2P} = S_{BC_1P}$. И, наконец, из того, что BC_1PA_1 — трапеция, получим, что $S_{BC_1P} = S_{A_1C_1P}$. Следовательно, $S_{A_2C_2P} = S_{A_1C_1P}$, что и требовалось.

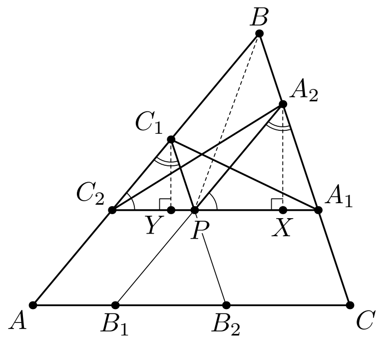


Рис. 10.5б

Второй способ. Пусть X и Y — основания перпендикуляров, опущенных из точек A_2 и C_1 на отрезок A_1C_2. Тогда $S_{C_2A_2P} = \frac{1}{2}C_2P \cdot A_2X$ и $S_{C_1A_1P} = \frac{1}{2}PA_1 \cdot C_1Y$. Треугольники C_2C_1P и PA_2A_1 подобны (соответствующие стороны параллельны), поэтому $C_1Y : A_2X = C_2P : PA_1$, следовательно, $S_{A_2C_2P} = S_{A_1C_1P}$.

Существуют и «вычислительные» решения. Приведем одно из них.

Третий способ. Докажем, что $S_{B_2AC_2} + S_{C_2BA_2} + S_{A_2CB_2} = S_{B_1AC_1} + S_{C_1BA_1} + S_{A_1CB_1}$ (см. рис. 10.5а). Не теряя общности, можно считать, что площадь треугольника ABC равна 1. Пусть $AB_2 : B_2C = p : (1-p)$, $CA_2 : A_2B = q : (1-q)$, а $BC_2 : C_2A = r : (1-r)$. Тогда, используя отношение площадей треугольников с общим углом, получим, что $S_{B_2AC_2} = p(1-r)$, $S_{C_2BA_2} = r(1-q)$, $S_{A_2CB_2} = q(1-p)$. То есть, $S_{B_2AC_2} + S_{C_2BA_2} + S_{A_2CB_2} = p + q + r - pr - pq - rq$.

Из теоремы о пропорциональных отрезках следует, что $AB_1 : AC = 1 - q$, $AC_1 : AB = p$ и $BA_1 : BC = r$. Следовательно, $S_{B_1AC_1} + S_{C_1BA_1} + S_{A_1CB_1} = (1-q)p + r(1-p) + q(1-r) = p + q + r - pr - pq - rq$, что и требовалось.

Критерии проверки

+ *приведено полное обоснованное решение*

∓ *присутствует идея рассмотрения равновеликих треугольников* (*см. первый и второй способы*) *или идея подсчета дополнения до треугольника* (*см. третий способ*), *но доказательство не доведено до конца или содержит ошибку*

− *задача решена в конкретном частном случае, например, равностороннего треугольника, или рассмотрено конкретное расположение точки* P (*например, точка пересечения медиан*)

− *задача не решена или решена неверно*

11 класс

11.1. Существует ли такое натуральное число n, большее 1, что значение выражения $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ является натуральным числом?

Ответ: да, существует.

Решение. Например, $n = 2^8 = 256$.

Действительно, $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}} = \sqrt{n\sqrt{n \cdot n^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{n\sqrt{n^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{n \cdot n^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{n^{\frac{7}{4}}} = n^{\frac{7}{8}}$. Тогда, при $n = 2^8$ значение данного выражения равно $\left(2^8\right)^{\frac{7}{8}} = 2^7 = 128$.

Возможны и другие примеры: любые числа, являющиеся восьмой степенью произвольного натурального числа, отличного от 1.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведен верный пример, но не показано вычислением, что он подходит*

$-$ *приведен только ответ* («*да*» *или* «*нет*»)

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.2. Существуют ли такие целые числа p и q, что при любых целых значениях x выражение $x^2 + px + q$ кратно 3?

Ответ: нет, не существуют.

Решение. Предположим, что такие p и q существуют. Тогда:

1) если $x = 0$, то $x^2 + px + q = q$ кратно 3;

2) если $x = 1$, то $x^2 + px + q = 1 + p + q$ кратно 3;

3) при $x = -1$, то $x^2 + px + q = 1 - p + q$ кратно 3.

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Из 1), 2) и 3) следует, что $q + (1 + p + q) + (1 - p + q) = 3q + 2$ кратно 3, что невозможно ни при каких целых значениях q.

Второй способ. Из 2) и 3) следует, что $(1 + p + q) + (1 - p + q) = 2q + 2$ кратно 3, что невозможно, так как q кратно 3.

Можно также рассматривать не конкретные значения x, а возможные остатки от деления x на 3, проведя, например, такое рассуждение: если x делится на 3, то значение трехчлена кратно трем только в том случае, когда q делится на 3. Если же x не делится на 3, то, учитывая, что q должно делиться на 3, на 3 должно делиться и $(x+p)$. Но число p — фиксировано, а число x может при делении на 3 давать различные остатки (1 или 2), поэтому найдется значение x, для которого $(x + p)$ на 3 не делится.

Отметим также, что из второго способа решения видно, что в условии задачи можно заменить 3 на любое натуральное число, большее трех.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *присутствует идея рассмотрения остатков от деления x на 3, но решение не доведено до конца или в нем допущены вычислительные ошибки*

$-$ *приведен только ответ* («*да*» *или* «*нет*») *или ответ, полученный рассмотрением конкретных значений p и q*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.3. В квадрате $ABCD$ точки E и F — середины сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE и BF пересекаются в точке G. Что больше: площадь треугольника AGF или площадь четырехугольника $GECF$?

Ответ: $S_{AFG} > S_{CEGF}$.

Решение. Обозначим площадь треугольника AGF через S_1, а площадь четырехугольника $GECF$ через S_2 (см. рис. 11.3 а, б). Пусть площадь квадрата равна S, тогда $S_1 + S_2 + S_{ABE} + S_{ADF} = S$.

Учитывая, что $S_{ABE} = S_{ADF} = \dfrac{1}{4}S$, получим: $S_1 + S_2 = \dfrac{1}{2}S$. Далее можно рассуждать по-разному.

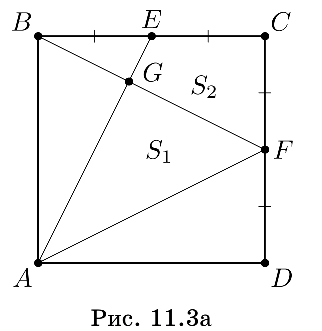


Рис. 11.3а

Первый способ. Составим и преобразуем разность: $S_1 - S_2 = \left(\frac{1}{2}S - S_2\right) - S_2 = 2\left(\frac{1}{4}S - S_2\right) = 2(S_{BCF} - S_2) > 0$ (см. рис. 11.3а). Следовательно, $S_1 > S_2$, то есть $S_{AFG} > S_{CEGF}$.

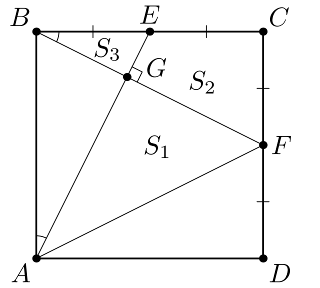


Рис. 11.3б

Второй способ. Пусть сторона квадрата равна $2a$, то есть, $S = 4a^2$. Тогда $S_1 + S_2 = 2a^2$. Найдем $S_3 = S_{BEG}$ (см. рис. 11.3б). Заметим, что прямоугольные треугольники ABE и BCF равны (по двум катетам). Пусть $\angle ABE = \angle BCF = \alpha$. тогда $\angle ABG = 90^\circ - \alpha$, значит, $AE \perp BF$.

Из треугольника ABE: $AE = a\sqrt{5}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $BG = AB\sin\alpha = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. Тогда $S_3 = \frac{1}{2}BE \cdot BG \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{a^2}{5}$.

Следовательно, $S_2 = S_{BCF} - S_3 = a^2 - \frac{a}{5} = \frac{4a^2}{5}$. Тогда $S_1 = 2a^2 - S_2 = \frac{6a^2}{5}$. Таким образом, $S_1 > S_2$, то есть $S_{AFG} > S_{CEGF}$.

Возможны также рассуждения, которые позволяют выразить S_1 и S_2 через сторону квадрата, использующие подобие, теорему Менелая, и пр.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные неточности или пробелы*

$\mp$ *использовано, но не доказано, что AE и BF перпендикулярны*

$\mp$ *ход решения верный, но допущены вычислительные ошибки (в том числе, в формуле для вычисления площади треугольника)*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.4. Решите неравенство: $\sin\frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x}\cos\frac{x}{x^2+1} > 0$.

Ответ: $(0; +\infty)$.

Решение. 1) Заметим, что $x \neq 0$ и $t = \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x+\frac{1}{x}}$. Так как $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geqslant 2$, то $|t| \leqslant \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, аргумент t на единичной окружности лежит в I или в IV координатной четверти.

2) Если $x > 0$, то $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$, то есть t лежит в I четверти, поэтому $\sin t > 0$ и $\cos t > 0$. Кроме того, $\frac{1}{t} > 0$, значит, $\sin t + \frac{1}{t}\cos t > 0$.

Таким образом, при всех $x > 0$ исходное неравенство верно.

3) Если $x < 0$, то $-\frac{1}{2} \leqslant t < 0$, то есть t лежит в IV четверти, поэтому $\sin t < 0$ и $\cos t > 0$. Кроме того, $\frac{1}{t} < 0$, значит, $\sin t + \frac{1}{t}\cos t < 0$.

Таким образом, при всех $x < 0$ исходное неравенство неверно.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

$\mp$ *доказано, что неравенство выполняется при $x > 0$, но не доказано, что при $x < 0$ оно не выполняется*

$\mp$ *доказано, что неравенство не выполняется при $x < 0$, но не доказано, что при $x > 0$ оно выполняется*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.5. Каждая боковая грань пирамиды является прямоугольным треугольником, в котором прямой угол примыкает к основанию пирамиды. В пирамиде проведена высота. Может ли она лежать внутри пирамиды?

Ответ: нет, не может.

Решение. Пусть основанием пирамиды $SA_1 \ldots A_n$ является многоугольник $A_1 \ldots A_n$ (см. рис. 11.5а, б). Возможны два случая.

1) Соседние углы в двух соседних боковых гранях — прямые.

Пусть, например, $\angle SA_2A_1 = \angle SA_2A_3 = 90^\circ$ (см. рис. 11.5а). Тогда, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $SA_2 \perp A_1A_2A_3$, то есть, SA_2 — высота пирамиды, и она принадлежит боковой поверхности пирамиды.

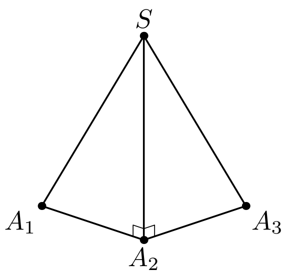


Рис. 11.5а

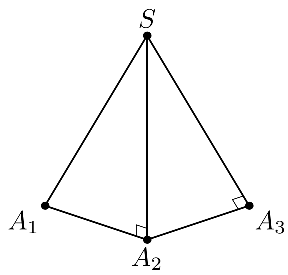


Рис. 11.5б

2) В любых двух соседних боковых гранях прямые углы не имеют общей вершины.

Пусть в прямоугольных треугольниках SA_nA_1, SA_1A_2, ..., $SA_{n-1}A_n$ вершинами прямых углов являются точки A_1, A_2, ..., A_n соответственно (см. рис. 11.5б). Воспользуемся тем, что в любом прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета. Тогда, из треугольника SA_1A_2: $SA_1 > SA_2$, из треугольника SA_2A_3: $SA_2 > SA_3$, и так далее.

Записав аналогичные неравенства для каждой боковой грани, получим: $SA_1 > SA_2 > \ldots > SA_n > SA_1$, то есть, $SA_1 > SA_1$ — противоречие. Следовательно, такое расположение прямых углов в боковых гранях невозможно.

Таким образом, внутри данной пирамиды высота лежать не может.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

$\pm$ *полностью и обоснованно разобран только случай* 2)

$\mp$ *приведен верный ответ, но обоснованно разобран только случай* 1)

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.6. Каждая клетка таблицы размером 7×8 (7 строк и 8 столбцов) покрашена в один из трех цветов: красный, желтый или зеленый. При этом в каждой строке красных клеток не меньше, чем желтых и не меньше, чем зеленых, а в каждом столбце желтых клеток не меньше, чем красных и не меньше, чем зеленых. Сколько зеленых клеток может быть в такой таблице?

Ответ: 8.

Решение. 1) В каждой строке таблицы красных клеток не меньше, чем желтых, следовательно, и во всей таблице красных клеток не меньше, чем желтых.

В каждом столбце таблицы желтых клеток не меньше, чем красных, следовательно, и во всей таблице желтых клеток не меньше, чем красных.

Таким образом, в таблице одинаковое количество красных и желтых клеток.

З	З	Ж	К	Ж	К	Ж	К
К	Ж	З	З	К	Ж	К	Ж
Ж	К	К	Ж	З	З	Ж	К
К	Ж	Ж	К	Ж	К	З	З
Ж	К	К	Ж	К	Ж	К	Ж
К	Ж	К	Ж	К	Ж	К	Ж
Ж	К	Ж	К	Ж	К	Ж	К

2) Предположим, что в каком-нибудь столбце желтых клеток больше, чем красных. Так как в каждом из остальных столбцов желтых клеток не меньше, чем красных, то тогда во всей таблице желтых клеток будет больше, чем красных, но это не так (см. 1). Значит, в каждом из восьми столбцов красных и желтых клеток поровну.

3) Так как в каждом столбце желтых клеток не меньше, чем зеленых, то исключаются случаи, когда в каждом столбце: а) 1 желтая, 1 красная, 5 зеленых клеток и б) 2 желтые, 2 красные, 3 зеленых клетки.

Остается только случай, когда в каждом столбце 3 красных, 3 желтых и 1 зеленая клетка. Тогда всего в таблице — 8 зеленых клеток.

Этот случай возможен. Например, см. таблицу.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

$\pm$ *доказано, что зеленых клеток может быть только* 8, *но пример не приведен*

$\mp$ *приведены только верный ответ и пример*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

Комментарий. Отметим, что если считать условие задачи корректным и при оценке получена единственная возможность, то приведение примера не требуется. С точки зрения формальной логики это действительно так.

С другой стороны, вопрос задачи звучит так: Сколько ...МОГЛО быть .... И на такой вопрос мог быть ответ: нисколько, так как ситуация невозможна. Или же оценка могла дать, например, две возможности и тогда надо было бы либо приводить другую оценку, либо все-таки приводить примеры. Отметим также, что встречаются задачи типа: «Найдите числа, удовлетворяющие определенным условиям ...» с ответом: таких чисел нет.