LXXX Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Департамент образования города Москвы
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Московское математическое общество
Факультет математики НИУ ВШЭ
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты `mmo@mccme.ru`

☞ Материалы данной книги размещены на странице

`www.mccme.ru/mmo`

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

Председатель оргкомитета LXXX ММО
профессор механико-математического факультета МГУ,
д.ф.-м.н. *Е. И. Бунина*

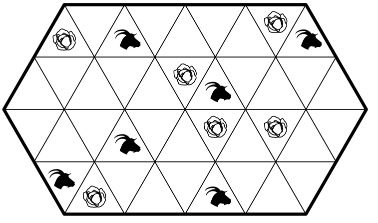
Сборник подготовили:

А. В. Антропов, *Е. В. Бакаев*, *А. Г. Банникова*, *Ф. Л. Бахарев*, *А. В. Бегунц*, *А. Д. Блинков*, *В. А. Брагин*, *М. Ю. Васильев*, *А. С. Волостнов*, *Б. А. Высоканов*, *А. В. Галатенко*, *В. В. Галатенко*, *Н. А. Гладков*, *Т. И. Голенищева-Кутузова*, *Д. В. Горяшин*, *А. С. Гусев*, *Г. Г. Гусев*, *А. В. Доледенок*, *С. А. Дориченко*, *О. В. Дунин-Барковская*, *П. И. Дунин-Барковский*, *М. А. Евдокимов*, *М. Е. Завалин*, *А. А. Заславский*, *Л. Н. Исхаков*, *Т. В. Казицына*, *В. А. Клепцын*, *А. А. Кора*, *В. А. Короленков*, *О. Н. Косухин*, *А. Г. Кузнецов*, *А. Ю. Кушнир*, *И. В. Лосев*, *С. В. Маркелов*, *Ю. С. Маркелов*, *А. Д. Матушкин*, *Н. Ю. Медведь*, *А. Б. Меньщиков*, *Г. А. Мерзон*, *М. С. Миронов*, *И. В. Митрофанов*, *Е. Г. Молчанов*, *Б. А. Обухов*, *Г. А. Погудин*, *А. А. Пономарев*, *А. М. Райгородский*, *И. В. Раскина*, *И. В. Родионов*, *Р. С. Садыков*, *Я. А. Слабодич*, *Ю. В. Тихонов*, *Б. Р. Френкин*, *А. В. Хачатурян*, *М. А. Хачатурян*, *Н. В. Чернега*, *Л. Э. Шабанов*, *А. В. Шаповалов*, *И. А. Шейпак*, *Д. Э. Шноль*, *Ю. Н. Яровиков*, *И. В. Ященко*

Проведение олимпиады и издание книги осуществлены при поддержке фирмы «НИКС», компании «Яндекс» и фонда «Математические этюды».

6 класс

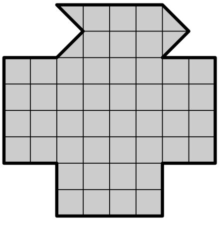
1. Фермер огородил снаружи участок земли и разделил его на треугольники со стороной 50 м. В некоторых треугольниках он высадил капусту, а в некоторые пустил пастись коз. Помогите фермеру построить по линиям сетки дополнительные заборы как можно меньшей общей длины, чтобы защитить всю капусту от коз.[1] (*М. А. Хачатурян*)



2. На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? (Нельзя переворачивать цифры вверх ногами, т. е. делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.) (*А. В. Шаповалов*)

3. Среди всех граней восьми одинаковых по размеру кубиков треть синие, а остальные — красные. Из этих кубиков сложили большой куб. Теперь среди видимых граней кубиков ровно треть — красные. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб, полностью красный снаружи. (*А. В. Шаповалов*)

4. Разрежьте фигуру на двенадцать одинаковых частей. (*Е. В. Бакаев*)



[1]Полный балл давался за пример забора длиной менее 700 м.

5. Группа туристов делит печенье. Если они разделят поровну две одинаковые пачки, останется одно лишнее печенье. А если разделят поровну три такие же пачки, останется 13 лишних печений. Сколько туристов в группе?
(*И. В. Раскина*)

6. Кощей Бессмертный взял в плен 43 человека и увез их на остров. Отправился Иван-Царевич на двухместной лодке выручать их. А Кощей ему и говорит:

— Надоело мне этих дармоедов кормить, пусть плывут отсюда на твоей лодке подобру-поздорову. Имей в виду: с острова на берег доплыть можно только вдвоем, а обратно и один справится. Перед переправой я скажу каждому не менее чем про 40 других пленников, что это оборотни. Кому про кого скажу, сам выберешь. Если пленник про кого-то слышал, что тот оборотень, он с ним в лодку не сядет, а на берегу находиться сможет. Я заколдую их так, чтобы на суше они молчали, зато в лодке рассказывали друг другу про всех известных им оборотней. Пока хоть один пленник остается на острове, тебе с ними плавать нельзя. Лишь когда все 43 окажутся на том берегу, одному из них можно будет за тобой приплыть. А коли не сумеешь устроить им переправу — останешься у меня навсегда.

Есть ли у Ивана способ пройти испытание и вернуться с пленниками домой? (*А. В. Шаповалов*)

7 класс

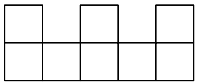
1. См. задачу 1 для 6 класса.

2. У аптекаря есть три гирьки, с помощью которых он одному покупателю отвесил 100 г йода, другому — 101 г меда, а третьему — 102 г перекиси водорода. Гирьки он ставил всегда на одну чашу весов, а товар — на другую. Могло ли быть так, что каждая гирька легче 90 г? (*А. В. Шаповалов*)

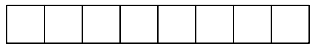
3. См. задачу 3 для 6 класса.

4. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK = AC$. Найдите угол BKC. (*Е. В. Бакаев*)

5. Можно ли так расставить цифры 1, 2, ..., 8 в клетках а) буквы Ш; б) полоски (см. рис.), чтобы при любом разрезании фигуры на две части сумма всех цифр в одной из частей делилась на сумму всех цифр в другой? (Резать можно только по границам клеток. В каждой клетке должна стоять одна цифра, каждую цифру можно использовать только один раз.) (*А. В. Шаповалов*)



а)



б)

6. Среди 49 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе. (*А. В. Шаповалов*)

8 класс

1. Замените в выражении $AB^C = DE^F$ буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным, использовав каждую цифру от 1 до 6 ровно один раз. (Пояснение: AB^C — двузначное число из цифр A и B, возведенное в степень C. Достаточно привести один способ замены.) (*Е. В. Бакаев*)

2. На плоскости даны треугольник ABC и 10 прямых, среди которых нет параллельных друг другу. Оказалось, что каждая из прямых равноудалена от каких-то двух вершин треугольника ABC. Докажите, что хотя бы три из этих прямых пересекаются в одной точке. (*С. В. Маркелов*)

3. По кругу написано 100 ненулевых чисел. Между каждыми двумя соседними числами написали их произведение, а прежние числа стерли. Количество положительных чисел не изменилось. Какое минимальное количество положительных чисел могло быть написано изначально? (*Б. Р. Френкин*)

4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны и $AD = BE = CF$. Докажите, что в него можно вписать окружность (то есть внутри шестиугольника существует окружность, касающаяся всех его сторон). (*Б.А.Обухов*)

5. Преподаватель выставил оценки по шкале от 0 до 100. В учебной части могут менять верхнюю границу шкалы на любое другое натуральное число, пересчитывая оценки пропорционально и округляя до целых. Нецелое число при округлении меняется до ближайшего целого; если дробная часть равна 0,5, направление округления учебная часть может выбирать любое, отдельно для каждой оценки. (Например, оценка 37 по шкале 100 после пересчета в шкалу 40 перейдет в $37 \cdot (40/100) = 14{,}8$ и будет округлена до 15.) Студенты Петя и Вася получили оценки a и b, отличные от 0 и 100.

Докажите, что учебная часть может сделать несколько пересчетов так, чтобы у Пети стала оценка b, а у Васи — оценка a (пересчитываются одновременно обе оценки).

(*Б. А. Высоканов, Н. Ю. Медведь, В. А. Брагин*)

6. Кузнечик умеет прыгать по клетчатой полоске шириной в 1 клетку на 8, 9 или 10 клеток в любую сторону. (*Прыжок на k клеток* означает, что между начальным и конечным положениями прыжка находятся $k-1$ клеток.) Будем называть натуральное число n *пропрыгиваемым*, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти полоску длины n, побывав на каждой клетке ровно один раз. Докажите, что существует непропрыгиваемое n, большее 50.

(*Е. В. Бакаев*)

9 класс

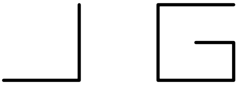
1. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры в десятичной записи которого различны и которое уменьшается в 5 раз, если зачеркнуть первую цифру.

(*М. А. Евдокимов*)

2. В шахматном турнире каждый участник встретился с каждым один раз. В каждом туре каждый участник проводил по одной встрече. Не меньше чем в половине всех встреч оба участника были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре была хотя бы одна встреча между земляками. (*Б. Р. Френкин*)

3. Существует ли клетчатый многоугольник, который можно поделить на две равные части разрезом такой формы (см. рисунок)? Разрез должен лежать внутри многоугольника (на границу могут выходить только концы разреза).

(*Ю. С. Маркелов, ученик 7 класса*)



а) б)

4. Найдите все такие пары натуральных чисел a и k, что для всякого натурального n, взаимно простого с a, число $a^{k^n+1}-1$ делится на n. (*А. Б. Меньщиков*)

5. Петя раскрасил каждую клетку квадрата 1000×1000 в один из 10 цветов. Также он придумал такой 10-клеточный многоугольник Ф, что при любом способе вырезать из этого квадрата по границам клеток многоугольник, равный Ф, в нем все 10 клеток оказываются разного цвета. Обязательно ли Ф — прямоугольник? (*Е. В. Бакаев*)

6. В треугольнике ABC с углом A, равным 45°, проведена медиана AM. Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1, а прямая c симметрична прямой AM относительно высоты CC_1. Прямые b и c пересеклись в точке X. Докажите, что $AX=BC$. (*Е. В. Бакаев*)

10 класс

1. Квадратный трехчлен x^2+bx+c имеет два действительных корня. Каждый из трех его коэффициентов (включая коэффициент при x^2) увеличили на 1. Могло ли оказаться, что оба корня трехчлена также увеличились на 1?

(*М. А. Евдокимов*)

2. Все натуральные числа, бóльшие единицы, раскрасили в два цвета — синий и красный — так, что сумма любых двух синих (в том числе одинаковых) — синяя, а произведение любых двух красных (в том числе одинаковых) — красное. Известно, что при раскрашивании были использованы оба цвета и что число 1024 покрасили в синий цвет. Какого цвета при этом могло оказаться число 2017?

(*М. А. Евдокимов*)

3. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AOC вторично пересекает стороны AB и BC в точках E и F. Оказалось, что прямая EF делит площадь треугольника ABC пополам. Найдите угол B. (*М. А. Евдокимов*)

4. У Васи есть камень (однородный, без внутренних полостей), имеющий форму выпуклого многогранника, у которого есть только треугольные и шестиугольные грани. Вася утверждает, что он разбил этот камень на две части так, что можно сложить из них куб (без внутренних полостей). Могут ли слова Васи быть правдой? (*М. А. Евдокимов*)

5. При каких натуральных n для всякого натурального $k \geqslant n$ найдется число с суммой цифр k, кратное n?

(*А. Г. Кузнецов, И. В. Лосев*)

6. В Чикаго орудует 36 преступных банд, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причем любые два гангстера состоят в разных наборах банд. Известно, что ни один гангстер не состоит в двух бандах, враждующих между собой. Кроме того, оказалось, что каждая банда, в которой не состоит некоторый гангстер, враждует с какой-то бандой, в которой данный гангстер состоит. Какое наибольшее количество гангстеров может быть в Чикаго? (*Фольклор*)

11 класс (1-й день)

1. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 80, в котором можно так переставить две его различные цифры, что получившееся число также будет кратно 80.

(*А. В. Бегунц*)

2. На вписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC в точке S, нашлась такая точка Q, что середины отрезков AQ и QC также лежат на вписанной окружности. Докажите, что QS — биссектриса угла AQC.

(*М. Ю. Васильев*)

3. Пусть x_0 — положительный корень уравнения $x^{2017} - x - 1 = 0$, а y_0 — положительный корень уравнения $y^{4034} - y = 3x_0$.

а) Сравните x_0 и y_0.

б) Найдите десятый знак после запятой числа $|x_0 - y_0|$.

(*И. А. Шейпак*)

4. Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

(*О. Н. Косухин*)

5. На гранях единичного куба отметили 8 точек, которые служат вершинами меньшего куба. Найдите все значения, которые может принимать длина ребра этого куба.

(*М. А. Евдокимов*)

6. См. задачу 6 для 10 класса.

11 класс (2-й день)

1. Даны две непостоянные прогрессии (a_n) и (b_n), одна из которых арифметическая, а другая — геометрическая. Известно, что $a_1 = b_1$, $a_2 : b_2 = 2$ и $a_4 : b_4 = 8$. Чему может быть равно отношение $a_3 : b_3$? (*Д. В. Горяшин*)

2. Незнайка знаком только с десятичными логарифмами и считает, что логарифм суммы двух чисел равен произведению их логарифмов, а логарифм разности двух чисел равен частному их логарифмов. Может ли Незнайка подобрать хотя бы одну пару чисел, для которой действительно верны одновременно оба этих равенства? (*А. В. Бегунц*)

3. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых один — преступник, еще один — свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 80 человек, и если среди приглашенных есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Может ли детектив заведомо раскрыть дело за 12 дней? (*О. Н. Косухин*)

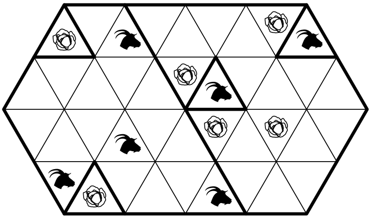
4. Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $BD = CD$, $\angle BDC = 120^\circ$. Вне треугольника ABC взята такая точка E, что $AE = CE$, $\angle AEC = 60^\circ$ и точки B и E находятся в разных полуплоскостях относительно AC. Докажите, что $\angle AFD = 90^\circ$, где F — середина отрезка BE. (*О. Н. Косухин*)

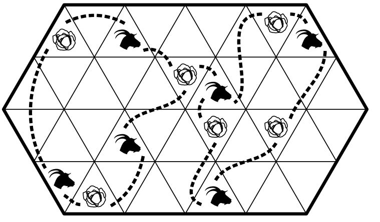
5. Таблица размером 2017×2017 заполнена ненулевыми цифрами. Среди 4034 чисел, десятичные записи которых совпадают со строками и столбцами этой таблицы, читаемыми слева направо и сверху вниз соответственно, все, кроме одного, делятся на простое число p, а оставшееся число на p не делится. Найдите все возможные значения p.

(*А. В. Галатенко*)

6 класс

1. *Ответ.* На рисунке слева показано, как построить заборы общей длиной 650 м.





Комментарий. Можно доказать, что забор меньшей длины построить нельзя. На рисунке справа показаны 13 пунктирных линий. Каждая из них может быть путем, по которому одна из коз доберется до капусты. Значит, мы должны каждую линию перекрыть забором. Но можно заметить, что никакие две линии нельзя перечеркнуть одной стороной треугольника. Значит, на перечеркивание всех 13 линий потребуется как минимум 13 заборов по 50 м.

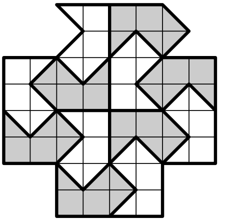
2. *Ответ.* Нет, не может.

Решение. Все двузначные числа, оканчивающиеся на 0, 2, 4, 6 или 8, четны, а оканчивающиеся на 5 кратны пяти. Поэтому такие числа не будут простыми, и писать эти цифры на карточках не имеет смысла. Остаются цифры 1, 3, 7 и 9. Если цифры 3 и 9 записаны на разных карточках, то из них можно сложить составное число 39. Если же они записаны на одной карточке, то на второй записаны 1 и 7, и тогда можно сложить составное число $91 = 7 \cdot 13$.

3. *Решение.* У восьми кубиков $8 \cdot 6 = 48$ граней. Из них $48 : 3 = 16$ синих. На гранях большого куба $2 \times 2 \times 2$ мы видим $6 \cdot 4 = 24$ грани маленьких кубиков, из них $24 : 3 = 8$ красные, а остальные $24 - 8 = 16$ синие. Итак, все 16 синих граней маленьких кубиков расположены на поверхности большого, т. е. все невидимые грани красные. Теперь можно каждый кубик повернуть так, чтобы три его скрытые красные грани оказались снаружи.

Можно обойтись и без подсчета числа граней. По условию синие грани составляют 1/3 от их общего числа. На поверхности большого куба мы видим ровно половину граней каждого кубика (три из шести), т. е. мы видим половину всех граней. Синих из них $2/3$, т. е. $2/3 \cdot 1/2 = 1/3$ от их общего числа. Значит, все синие грани снаружи, и мы можем повернуть каждый кубик, спрятав эти грани вовнутрь.

4. *Ответ.* См. рисунок.



5. *Ответ.* 23.

Решение. Раздадим три раза по две пачки, останется $3 \cdot 1 = 3$ печенья. Но те же шесть пачек можно раздать иначе — три и еще три, и тогда останется $2 \cdot 13 = 26$ печений. Значит, $26 - 3 = 23$ печенья можно поделить между туристами поровну. Поскольку число 23 простое, это возможно, только если туристов 23.

Второе решение. Разделим сначала две пачки печенья. Осталось одно лишнее. Разделим третью пачку. В ней $13 - 1 = 12$ лишних печений. Но тогда в двух пачках должно было быть $12 \cdot 2 = 24$ лишних печенья. Почему же на самом деле одно? Потому что $24 - 1 = 23$ печенья туристы смогли разделить поровну. Поскольку число 23 простое, это возможно, только если туристов 23.

Комментарий. Количество печений в пачке из условия задачи узнать нельзя. Их могло быть 12, 35, 58 и т. д.

6. *Ответ.* Да, есть.

Решение. Иван может разбить пленников на двадцать пар и одну тройку и велеть Кощею сказать каждому, что все, кроме входящих с ним в одну пару (тройку), — оборотни. Тогда условие будет выполнено, а переправиться пленники смогут вот как. Назовем пленников из тройки A, B и C. Сначала переправляются A и B, потом A возвращается обратно. Затем переправляется некоторая пара, а возвращается B. В результате одна пара пленников переправлена на берег, а все остальные вместе с лодкой находятся на острове. Аналогично переправляются все остальные пары. Затем переправляются A и B, A возвращается и перевозит C. После этого C может отправиться за Иваном. Заметим, что при такой переправе никто в лодке никакой новой информации об оборотнях не узнал.

Комментарий. Аналогичный способ переправы работает при любом разбиении пленников на пары и тройки.

7 класс

1. См. решение задачи 1 для 6 класса.

2. *Ответ.* Да, могло.

Решение. Подойдут гирьки с весами 49,5 г, 50,5 г и 51,5 г. Первая и вторая гирьки вместе весят 100 г, первая и третья — 101 г, а вторая и третья — 102 г.

Комментарий. Найти пример и доказать, что он единствен, можно следующим образом. Для начала заметим, что ни в одном из взвешиваний не участвовала ровно одна гирька: иначе ее вес был бы больше 90 г.

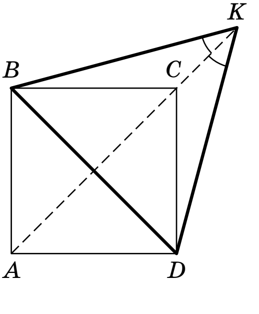
Если в каком-то взвешивании участвовали все три гирьки, то это могло быть только третье взвешивание, т. е. сумма весов всех гирек равна 102 г. Тогда, чтобы аптекарь мог получить 100 г и 101 г, одна из гирек должна весить 1 г, а другая — 2 г. Но тогда оставшаяся гирька весит 99 г, что нам не подходит.

Значит, в каждом взвешивании участвовали ровно по две гирьки, притом каждый раз — разные. Если сложить веса всех гирек во всех трех взвешиваниях, то, с одной стороны, мы получим удвоенный вес всех трех гирек, а с другой стороны, $100 + 101 + 102 = 303$ г. Значит, сумма весов всех трех гирек равна 151,5 г. Поэтому вес самой легкой гирьки равен $151{,}5 - 102 = 49{,}5$ г, вес следующей — $151{,}5 - 101 = 50{,}5$ г, а вес самой тяжелой — $151{,}5 - 100 = 51{,}5$ г.

3. См. решение задачи 3 для 6 класса.

4. *Ответ.* 30°.

Решение. Проведем отрезки DK и BD (см. рисунок). Поскольку картинка симметрична относительно прямой AC, имеем $DK = BK$. По условию $BK = AC$. А так как диагонали в квадрате равны, $AC = BD$. Таким образом, в треугольнике BKD все стороны равны, т. е. он равносторонний, и $\angle BKD = 60^\circ$. Опять же в силу симметрии относительно прямой AC имеем $\angle BKC = \angle DKC$, а в сумме эти углы составляют угол в 60°, т. е. каждый из них равен 30°.



Комментарий. Равенства $DK = BK$ и $\angle BKC = \angle DKC$ можно доказать и не используя понятие симметрии.

Действительно, в треугольниках BCK и DCK сторона CK общая, $BC = CD$ как стороны квадрата, $\angle BCK = \angle DCK$, поскольку каждый из них смежен углу в $45°$. Значит, треугольники BCK и DCK равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $DK = BK$ и $\angle BKC = \angle DKC$ как соответствующие элементы равных треугольников.

5. *Ответ*. а) Да, можно: см. рисунок.

б) Нет, нельзя.

2		1		4
7	3	5	6	8

Решение. а) Пусть сумма чисел в одной из частей равна x, в другой y и y делится на x. Тогда и $x + y$ делится на x, а это сумма всех чисел, она равна $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$. Значит, меньшая из сумм частей является делителем числа 36. Верно и обратное: если 36 делится на x, то и оставшаяся сумма $36 - x$ делится на x.

Для фигуры, заполненной как на рисунке, при разрезании на две части получаются такие меньшие суммы: 2, $2 + 7 = 9$, $2 + 7 + 3 = 12$, 1, $6 + 8 + 4 = 18$, $8 + 4 = 12$, 4. Как видим, все они являются делителями числа 36.

Есть и другие расстановки, удовлетворяющие условию задачи.

б) Выпишем все делители числа 36, меньшие этого числа, и их дополнения до 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 27, 30, 32, 33, 34, 35.

Предположим, что расставить числа в полоске требуемым образом удалось. Выпишем сумму чисел в первой клетке, первых двух клетках, первых трех клетках и т. д. У нас получится возрастающая последовательность из восьми чисел, первое из которых не больше 8, а последнее равно 36. При этом соседние члены этой последовательности различаются не больше чем на 8.

Если в этой последовательности есть число 18, то предыдущее число должно быть не менее $18 - 8 = 10$. Единственное число между 10 и 18 в последовательности — это 12. Следовать за 18 может число не более $18 + 8 = 26$, подходит только 24. Но тогда в двух разных клетках должно стоять число $6 = 18 - 12 = 24 - 18$.

Следовательно, числа 18 в этой последовательности нет. Но тогда посмотрим на тот момент, когда после числа, меньшего 18, идет число, большее 18. Разность этих чисел должна быть равна как минимум $24 - 12 = 12$. Но они должны отличаться на число, не большее 8. Противоречие.

6. *Решение.* Представим, что сначала все 49 школьников стоят в коридоре, и будем постепенно запускать их в класс. При этом будем делать это так, чтобы в классе в любой момент времени дети были разбиты на требуемые группы.

Пусть в коридоре стоит школьник Федор. Если он знаком с каким-то другим школьником, стоящим в коридоре, то просто запустим их двоих в класс.

Иначе все знакомые Федора уже в классе. Так как в классе менее 50 школьников, они разбиты менее чем на 25 групп. Значит, среди знакомых Федора какие-то двое находятся в одной группе. Если это группа из 2 школьников, то впустим Федора в класс, добавив его к этой группе. Если же это группа из 3 школьников, то попросим одного из знакомых Федора образовать с ним группу, а оставшихся школьников оставим вдвоем.

Так, постепенно впуская школьников в класс, мы добьемся того, что все школьники будут разделены на требуемые группы.

8 класс

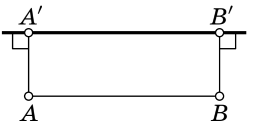
1. *Ответ.* $16^5 = 32^4$.

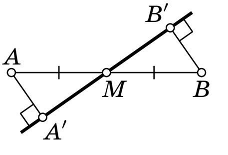
Решение. Это равенство верно, так как $(2^4)^5 = 2^{20} = (2^5)^4$.

Комментарий. Нетрудно доказать, что других решений нет (не считая перестановки правой и левой частей равенства).

2. *Решение.* Сначала исследуем, в каких случаях прямая равноудалена от двух точек.

Лемма. Пусть прямая ℓ равноудалена от A и B, тогда либо она параллельна AB, либо проходит через середину отрезка AB.



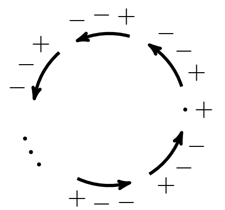


Доказательство. Точки A и B либо находятся по одну сторону от ℓ, либо по разные. Обозначим через A' и B' проекции A и B на ℓ соответственно. Если A и B лежат по одну сторону от ℓ, то $AA'B'B$ — прямоугольник, и $AB \parallel \ell$. Если A и B лежат по разные стороны от ℓ, то отрезок AB и прямая ℓ пересекаются в некоторой точке M. Тогда треугольники $AA'M$ и $BB'M$ равны как прямоугольные с равными катетами AA' и BB' и равными углами при вершине M. Поэтому $AM = MB$. Случаи, в которых ℓ проходит через A и B или $A' = B'$, разбираются аналогично. Лемма доказана.

Теперь решим задачу. Предположим противное: пусть никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Рассмотрим произвольную сторону треугольника и прямые, равноудаленные от ее концов: не более одной прямой паралельно стороне, и не более двух прямых проходят через середину стороны. Всего для трех сторон получаем не более девяти прямых. Противоречие.

3. *Ответ.* 34.

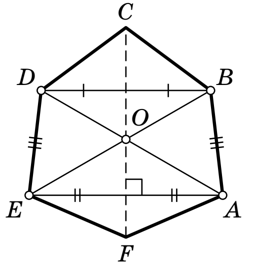
Решение. Приведем пример для 34 положительных чисел. Возьмем все числа равными 1 по модулю, а знаки расставим следующим образом:



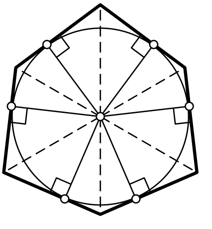
(сначала $+$, потом 33 группы $+--$, считая против часовой стрелки). Тут всего одна пара соседних положительных чисел и 33 пары соседних отрицательных — они и дадут 34 положительных произведения; остальные произведения будут отрицательными.

Докажем, что положительных чисел было не менее 34. Предположим, что их не более 33. Отрицательные числа в произведении могут образовываться, только если один из сомножителей положительный, причем каждое положительное число может участвовать не более чем в двух таких произведениях. Следовательно, отрицательных чисел не более 66. Но тогда всего чисел не более 99, противоречие.

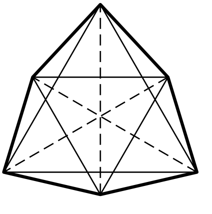
4. *Решение*. Обозначим через O точку пересечения диагоналей AD и BE (см. рисунок сверху). Из равенства треугольников ABD и EDB (они равны по трем сторонам) получаем, что расстояния от точек A и E до прямой BD равны, т. е. $AE \parallel BD$ и $ABDE$ является равнобокой трапецией.



Проведем серединный перпендикуляр ℓ к отрезку AE. Поскольку $ABDE$ — равнобокая трапеция, прямая ℓ является серединным перпендикуляром и к отрезку BD, а также проходит через точку O. Из равнобедренности треугольников BCD и AFE следует, что прямая ℓ проходит через точки C и F, т. е. диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке, причем диагональ CF является биссектрисой углов C и F. Аналогично доказывается, что диагонали AD, BE являются биссектрисами углов A и D, B и E соответственно. Поскольку биссектрисы всех углов шестиугольника пересеклись в одной точке, то расстояния от точки O до сторон равны, т. е. существует вписанная в шестиугольник окружность (см. рисунок в центре).



Комментарий. Шестиугольник из условия задачи не обязательно правильный. Рассмотрим два правильных треугольника с общим центром и попарно параллельными сторонами, расположенными как на рисунке снизу.



Последовательно соединим их вершины. Полученный шестиугольник будет удовлетворять условию задачи. Несложно показать, что таким образом можно получить все подходящие под условие шестиугольники.

5. *Решение*. Оценку «a баллов из n возможных» будем обозначать кратко a/n или $\frac{a}{n}$. Оценки $0/n$ и n/n будем называть *крайними*.

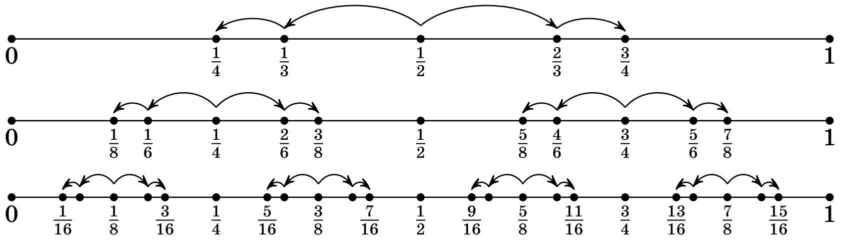
Лемма 1. Если последовательно менять шкалы в порядке $100 \to 99 \to 98 \to 97 \to \ldots \to 3 \to 2$, то любая некрайняя оценка $a/100$ превратится в $1/2$.

Доказательство. Достаточно заметить, что при этих заменах шкал некрайние оценки остаются некрайними, так как при всех $k > 1$ оценка $1/k$ ближе к любой некрайней оценке вида $a/(k+1)$, чем $0/k$; значит, на очередном шаге после округления оценка $0/k$ не могла получиться (аналогично с k/k). Таким образом, в конце останется некоторая некрайняя оценка в двухбалльной шкале, т. е. $1/2$. Лемма доказана.

Лемма 2. Дано натуральное число k. Если менять шкалы в порядке

$$2 \to 3 \to 4 \to 6 \to 8 \to \ldots \to 2 \cdot 2^s \to 3 \cdot 2^s \to 2 \cdot 2^{s+1} \to \ldots \to 2^k,$$

то можно получить из исходной оценки $1/2$ любую оценку вида $(2r+1)/2^k$, где $0 \leqslant r < 2^{k-1}$.



Первые шесть шагов алгоритма из леммы 2 в решении задачи 5. Каждая следующая пара шагов содержит две «копии» предыдущей пары, сжатые в два раза.

Доказательство. Будем вести индукцию по k.

База: $k = 1$. Никаких операций не произошло, начальное состояние $1/2$.

Переход: предположим, что утверждение леммы верно для параметра $k-1$; докажем его для параметра k. Наша цель — получить оценку $(2r+1)/2^k$. Рассмотрим случай, когда r нечетно. По предположению индукции за первые $2(k-2)$ замен шкал можно получить оценку $r/2^{k-1}$. Выясним, что произойдет при переходе в следующую шкалу $(2^{k-1} \to 3 \cdot 2^{k-2})$:

$$3 \cdot 2^{k-2} = 3/2 \cdot 2^{k-1}; \quad r \to \frac{3r}{2}.$$

Это полуцелое число округлим до $(3r+1)/2$. При переводе в финальную шкалу $(3\cdot 2^{k-2} \to 2^k)$ оценка $(3r+1)/2$ перейдет в
$$\frac{4}{3}\cdot\frac{3r+1}{2} = 2r+\frac{2}{3},$$
что округляется до $2r+1$. Случай четного r разбирается аналогично, при этом возникает следующая последовательность оценок:
$$(r+1)/2^{k-1} \to \frac{3r+2}{2}\Big/ 3\cdot 2^{k-2} \to (2r+1)/2^k.$$
Лемма доказана.

Лемма 3. Всякая некрайняя оценка вида $a/100$ может быть получена из некоторой нечетной оценки по шкале от 0 до 256 в результате замены шкал $256 \to 100$.

Доказательство. От противного: пусть некоторая оценка $a/100$ не получается таким действием. Тогда в интервале $\left(\frac{a}{100}-\frac{1}{200}, \frac{a}{100}+\frac{1}{200}\right)$ нет дробей вида $\frac{2r+1}{256}$. Но длина этого интервала равна $\frac{1}{100}$, а расстояние между соседними дробями такого вида равно $\frac{1}{128}$, что меньше. Противоречие, лемма доказана.

Теперь решим задачу. В начале будем действовать по алгоритму из леммы 1 и приведем обе оценки к состоянию $1/2$. Затем, действуя согласно лемме 2, можно получить из двух экземпляров $1/2$ любую пару нечетных оценок по шкале от 0 до 256. Лемма 3 гарантирует нам, что при возврате в исходную шкалу от 0 до 100 можно получить любую пару оценок.

Комментарий. По сути, доказано, что с помощью замен шкал можно из любых исходных данных получить любые результаты любого числа участников.

6. *Решение.* Рассмотрим $n=62$. Раскрасим числа от 1 до 62 в белый и черный цвета следующим образом: числа 1, 2, ..., 8 — в черный цвет; 9, 10, 11, ..., 18 — в белый; 19, 20, ..., 26 — снова в черный, и так далее, чередуя черные блоки из восьми и белые блоки из десяти последовательных чисел. Черных чисел получится 32, а белых — 30.

Предположим, что $n=62$ пропрыгиваемо. Тогда кузнечику придется хотя бы 31 раз приземлиться на черную клетку. Но на черную клетку можно попасть только с белой.

Белых клеток всего 30, поэтому с разных клеток перепрыгивать на черные не получится. Противоречие.

Комментарий. Нетрудно привести алгоритм, который пропрыгивает все числа вида $17k+19m+\varepsilon$, где $\varepsilon=0, 1, -1$. В частности, числа 51, 52, ..., 58 пропрыгиваемы; кроме этого, начиная с 118, все натуральные числа представляются в таком виде, и, следовательно, пропрыгиваемы. Разумеется, отсюда не следует, что остальные числа непропрыгиваемы.

9 класс

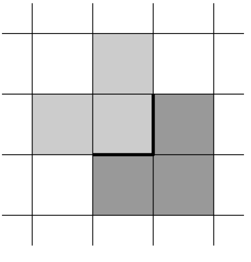
1. *Ответ*. 3750.

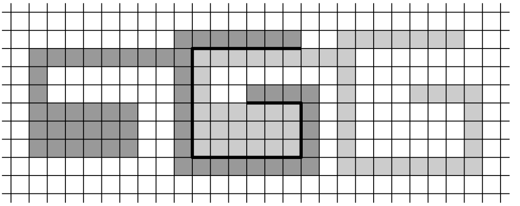
Решение. По условию $\overline{aA}=5A$ (где A — число, составленное из всех цифр, кроме первой, a — первая цифра). Пусть n — количество цифр в числе $\overline{aA}$. Отсюда, $4A = a\cdot 10^{n-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow A=25a\cdot 10^{n-3}$. Если $n>4$, то у числа A, а значит, и у искомого числа, есть две совпадающие цифры (два нуля на конце). Если же $n=4$, то $A=250a$. Ясно, что чем больше a, тем больше исходное число. При $a\geqslant 4$ число $250a$ состоит из 4 цифр, а не из трех. При $a=3$ мы получаем $A=750$, а исходное число равно 3750. Значит, наибольшее искомое число равно 3750.

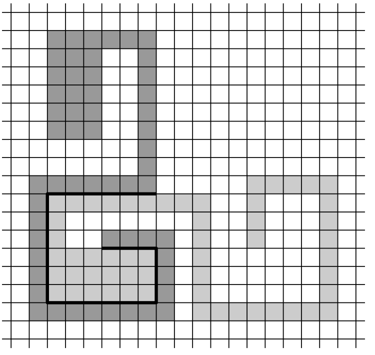
2. *Решение*. Предположим, что в каком-то туре не было игры между земляками. Тогда участники разбиваются на пары людей из разных городов. Рассмотрим произвольного участника. В каждой паре есть не более одного его земляка, также второй участник из его пары не является его земляком. Но тогда всего земляков у него меньше половины из всех участников. Значит, каждый участник сыграл больше игр с неземляками, чем с земляками, и в сумме игр между земляками было меньше половины. Противоречие.

3. *Ответ*. Приведем возможные примеры таких фигур.

а)



б) 



Комментарий. Подобным образом можно построить фигуру для любого несамопересекающегося разреза.

4. *Ответ.* $a=1$, k — любое.

Решение. Если $a=1$, то $a^{k^n+1}-1=0$, а значит, делится на n. Пусть теперь $a\geqslant 2$. Возьмем $n=a^k-1$, тогда $a^k\equiv 1 \pmod{n}$, и следовательно,

$$0\equiv a^{k^n+1}-1\equiv (a^k)^{k^{n-1}}\cdot a-1\equiv 1^{k^{n-1}}\cdot a-1\equiv a-1 \pmod{a^k-1}.$$

Такое может быть только при $k=1$, но в этом случае $a^{k^n+1}-1=a^2-1$ должно делиться на все n, что невозможно. Таким образом, пары, в которых $a\geqslant 2$, нам не подходят.

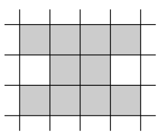
5. *Ответ.* Нет, не обязательно.

Решение. Такая фигура, отличная от прямоугольника, существует. На рисунке представлены все 4 варианта расположения Ф с точностью до параллельного переноса.

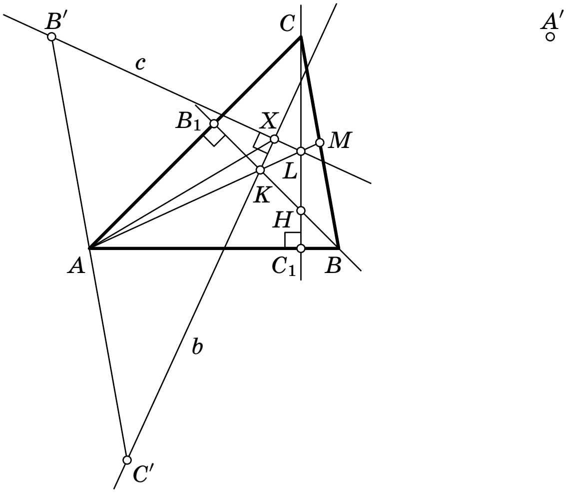
Пронумеруем цвета числами от 1 до 10, а строки и столбцы числами от 1 до 1000. Раскрасим клетку с координатами (i, j) в цвет с номером $(i-1+5(j-1)) \bmod 10+1$. Заметим, что правое верхнее и левое нижнее расположения содержат по одной доминошке в пяти подряд идущих строках. Значит, там есть все пары $(1, 6)$, $(2, 7)$, $(3, 8)$, $(4, 9)$, (5, 10). В случаях правого нижнего и левого верхнего расположений рассуждение то же, нужно лишь заметить, что верхняя и нижняя клетки имеют разные цвета, дающие одинаковый остаток при делении на 5. А значит, и в этом случае цвета клеток фигурки различны.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		999	1000
1	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	⋯	1	6
2	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7	⋯	2	7
3	3	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3	8	⋯	3	8
4	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	⋯	4	9
5	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	⋯	5	10
6	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	⋯	6	1
7	7	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7	2	⋯	7	2
8	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3	⋯	8	3
9	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	⋯	9	4
10	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	⋯	10	5
11	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	⋯	1	6
12	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7	⋯	2	7
13	3	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3	8	⋯	3	8
14	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	⋯	4	9
15	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	⋯	5	10
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
999	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	⋯	9	4
1000	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	⋯	10	5

Комментарий. Данный пример не единственный, можно также придумать пример раскраски для такой фигуры:



6. *Решение*. Обозначим точки, симметричные вершинам треугольника относительно середин противоположных сторон, через A', B', C' соответственно. Очевидно, что точки A, B, C являются серединами сторон треугольника $A'B'C'$. Высота BB_1 перпендикулярна прямой AC, а значит, и прямой $A'C'$. Получаем, что точки A' и C' симметричны относительно BB_1. Несложно понять, что точка A' лежит на медиане AM. Тогда точка C' лежит на прямой b в силу симметрии. Аналогично можно показать, что B' лежит на прямой c.



Докажем, что $b \perp c$. Обозначим через K и L точки пересечения прямой AM с прямыми BB_1 и CC_1 соответственно, а точку пересечения высот через H. Тогда верны следующие равенства:

$$\angle(AM, BB_1) = \angle(BB_1, b), \quad \angle(AM, CC_1) = \angle(CC_1, c),$$

$$\angle(b, c) = \angle(b, AM) + \angle(AM, c) =$$
$$= 2\angle(BB_1, AM) + 2\angle(AM, CC_1) = 2\angle(BB_1, CC_1) =$$
$$= 2\angle(B_1H, HC_1) = 2\angle(B_1A, AC_1) = 2\angle(BA, AC) = 90^\circ.$$

Рассмотрим треугольник $B'XC'$. $B'C' = 2BC$, причем A — середина $B'C'$, $\angle B'XC' = 90^\circ$. Тогда $AX = AB' = AC' = BC$.

10 класс

1. *Ответ*. Нет, не могло.

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$. Тогда по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -b, \tag{1}$$

$$x_1 x_2 = c. \tag{2}$$

Предположим, что утверждение задачи верно, тогда

$$x_1 + 1 + x_2 + 1 = -\frac{b+1}{2}, \tag{3}$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = \frac{c+1}{2}. \tag{4}$$

Подставим (1) в (3) и найдем $b=5$.

Подставим (1) и (2) в (4) и найдем $c=9$.

Стало быть, искомый квадратный трехчлен, если он существует, имеет вид x^2+5x+9. Однако же дискриминант такого трехчлена отрицателен. Значит, описанная в задаче ситуация невозможна.

2. *Ответ*. Красного.

Решение. Заметим, что если число b^n синего цвета, то число b тоже синего цвета (доказывается от противного). Так как $1024=2^{10}$, из этого следует, что число 2 синее.

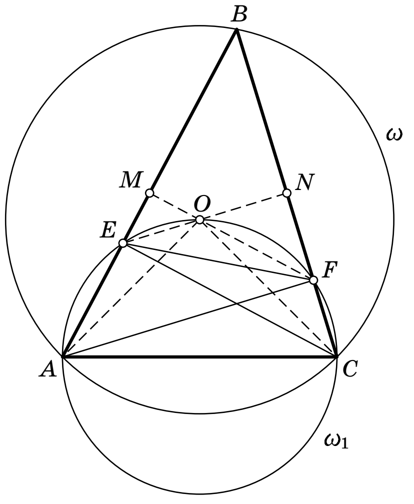
Также заметим, что если число a синего цвета, то любое число $n \cdot a$ ($n \in \mathbb{N}$) тоже синего цвета (следует из условия задачи при помощи принципа математической индукции). Значит, поскольку 2 синее, то все четные числа также синие.

Предположим, что 2017 синего цвета. Тогда все нечетные числа, начиная с 2017, тоже будут синего цвета. Таким образом, все числа, начиная с 2017, синие. По условию, мы используем оба цвета. Это значит, что какое-то нечетное число k ($k<2017$) покрашено в красный цвет. Но тогда и любая степень k тоже красная. Так как $k \geqslant 2$, то существует степень, которая превосходит 2017. Получается, что она одновременно покрашена и в синий, и в красный цвета, что невозможно. Поэтому 2017 может быть только красного цвета.

Красным оно как раз будет, если мы покрасим все четные числа в синий цвет, а нечетные — в красный. Легко убедиться, что данная раскраска удовлетворяет условию задачи.

3. *Ответ*. $\angle B=45^\circ$.

Первое решение. Обозначим через ω окружность, описанную около треугольника ABC, через ω_1 — окружность, описанную около ACO. Пусть $\angle ABC=\beta$. Тогда $\angle AOC=2\beta$, как центральный для угла ABC относительно окружности ω. $\angle AEC=\angle AOC=2\beta$, как опирающиеся на дугу AC окружности ω_1. Так как угол AEC внешний для треугольника CEB, $\angle ECB=2\beta-\beta=\beta$, значит, треугольник CEB — равнобедренный. Аналогично, $\angle AFC=2\beta$, угол AFC внешний для



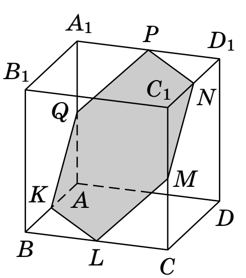
треугольника AFB, значит, $\angle BAF = \beta$, треугольник ABF тоже равнобедренный.

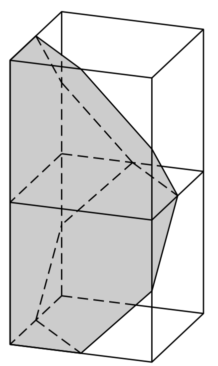
По формуле длины основания равнобедренного треугольника $AB = 2 \cdot BF \cdot \cos\beta$ и $BC = 2 \cdot BE \cdot \cos\beta$. Перемножив эти равенства, получим: $AB \cdot BC = 4 \cdot BE \cdot BF \cdot \cos^2\beta$. Кроме того, из отношения площадей треугольников ABC и AEF, данного в условии, получаем: $\dfrac{S_{BAC}}{S_{BEF}} = \dfrac{AB \cdot BC}{BE \cdot BF} = 2$. Отсюда следует, что $1 = 2 \cdot \cos^2\beta$. Так как $2\beta < 180^\circ$, имеем $\cos\beta > 0$, значит, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = 45^\circ$.

Второе решение. Обозначим через ω окружность, описанную около треугольника ABC, через ω_1 — окружность, описанную около ACO. Заметим, что $\angle ABC = \dfrac{1}{2}\angle AOC$, так как угол AOC — центральный для угла ABC относительно окружности ω. Также заметим, что $\angle BEO = \angle OCA$, так как угол BEO дополняет угол AEO до 180°, а угол AEO опирается на дополнительную дугу для дуги окружности ω_1, на которую опирается угол ACO. Заметим, что $\dfrac{1}{2}\angle AOC + \angle ACO = 90^\circ$, так как треугольник AOC равнобедренный ($AO = CO$ как радиусы окружности ω). Значит, $\angle ABC + \angle BEO = 90^\circ$, т. е. прямая EO — высота в треугольнике BEC (перпендикулярная стороне BC). Аналогично, FO — высота в треугольнике AFB. Так как O — центр описанной окружности треугольника ABC, то высоты EO и FO делят стороны AB и CB соответственно пополам. Пусть M и N — середины AB и BC, тогда треугольник BMN подобен BFE, причем коэффициент подобия равен $\sqrt{2}$ (так как отрезок EF делит площадь ABC пополам, т. е. площадь треугольника BFE равно половине площади треугольника ABC; а площадь треугольника BMN равна четверти площади треугольника ABC, так как M и N — середины сторон AB и CB соответственно). Поэтому, если рассмотреть окружность, построенную на EF как на диаметре (радиуса r), то $MN = \sqrt{2} \cdot r$ и угол ABC равен полуразности соответствующих дуг этой окружности, т. е. $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot (180° - 90°) = 45°$.

4. *Ответ*. Да, могут.

Решение. Будем решать обратную задачу: посмотрим, как можно разрезать куб на две части, чтобы из них можно было сложить многогранник только с треугольными и шестиугольными гранями. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обозначим середины его сторон AB, BC, CC_1, C_1D_1, A_1D_1, AA_1 через K, L, M, N, P и Q соответственно. Известный факт: эти шесть точек лежат в одной плоскости и образуют правильный шестиугольник (так называемое «главное сечение куба»). Разрежем куб по этой плоскости (см. рис. слева) и склеим две полученные части (они равны между собой, так как центрально-симметричны) по пятиугольникам $ADCLK$ и $C_1B_1A_1PN$. Полученный многогранник (см. рис. справа) имеет четыре треугольных и четыре шестиугольных грани, то есть может быть тем многогранником, про который говорил Вася.





5. *Ответ.* При всех натуральных n, не кратных трем.

Решение. Заметим, что n, кратное трем, нам не подойдет, поскольку при $k=n+1$ мы получим, что число с суммой цифр, не кратной 3, будет делиться на 3. Покажем, что все остальные числа нам подойдут.

Рассмотрим случай, когда n не кратно двум, трем и пяти. Так как n взаимно просто с 9, то найдется $m \leqslant n$ такое, что $9m \equiv -k \pmod{n}$. Тогда $10 \cdot m + 1 \cdot (k-m) \vdots n$.

Существует такое d, что $10^d \equiv 1 \pmod{n}$. Действительно, среди остатков чисел $10, 10^2, 10^3, \ldots, 10^n$ по модулю n должны быть два одинаковых (поскольку всего $n-1$ ненулевой остаток). Пусть это остатки степеней 10^a и 10^b $(a<b)$, тогда $10^{a-b} \equiv 1 \pmod{n}$, так как 10 и n взаимно просты. (По теореме Эйлера $10^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, т. е. в качестве d может быть выбрано число $\varphi(n)$ всех чисел от 1 до n, взамно простых с n.)

Значит,

$$N = ((10^{d+1} + 10^{2d+1} + \ldots + 10^{md+1}) + \\ + (10^d + \ldots + 10^{(k-m)d})) \vdots n,$$

при этом несложно заметить, что сумма цифр числа N равна k.

Осталось рассмотреть случай, когда $n = n_0 \cdot 2^i \cdot 5^j$, где n_0 не кратно двум, трем и пяти. В этом случае мы уже умеем строить число N_0 с суммой цифр k, кратное n_0. Тогда $N = N_0 \cdot 10^{i+j}$ по-прежнему будет иметь сумму цифр k, но теперь уже будет кратно n.

6. *Ответ.* $3^{12} = 531\,441$.

Решение. Будем решать задачу в общем случае, когда число банд равно N при $N \geqslant 2$. Докажем, что максимальное число гангстеров равно 3^n, если $N=3n$; $4 \cdot 3^{n-1}$, если $N=3n+1$; $2 \cdot 3^n$, если $N=3n+2$. Для удобства обозначим эти величины через $g(N)$, причем будем также считать $g(0)=g(1)=1$. Сразу заметим, что $g(m)g(k-m) \leqslant g(k)$ для любых k, m (для которых эти выражения имеют смысл) — это свойство пригодится в дальнейшем.

Пример строится следующим образом: разобьем все банды на группы по три и, возможно, одну группу из двух или четырех банд и объявим враждующими банды, попавшие в одну группу. Тогда максимальное количество гангстеров — это количество способов выбрать по одной банде из каждой группы, т. е. $3^{N/3}$, $4\cdot 3^{(N-4)/3}$ или $2\cdot 3^{(N-2)/3}$ соответственно.

Докажем, что больше чем $g(N)$ гангстеров быть не может. Обозначим через $f(N)$ максимально возможное число гангстеров при $N\geqslant 2$, для $N=0$, 1 положим $f(0)=f(1)=1$. Нам нужно доказать, что $f(N)\leqslant g(N)$. Будем доказывать это по индукции. База $N=2$ очевидна.

Предположим, что для всех значений $N<k$, уже доказано, что $f(N)\leqslant g(N)$. Докажем для $N=k$. Рассмотрим граф вражды банд. Если он несвязен, то его вершины можно разбить на два подмножества размера m и $k-m$, не соединенных между собой ребрами. Если рассматривать только банды из первого подмножества, то некоторые из рассматриваемых $f(k)$ гангстеров могут состоять в одинаковых наборах банд, при этом по предположению индукции может получиться не более $f(m)$ различных наборов. Аналогично, для второго подмножества может получиться не более $f(k-m)$ различных наборов. При этом если для двух гангстеров совпадает и набор банд из первого подмножества, в которых они состоят, и набор банд из второго подмножества, в которых они состоят, то для них совпадают все банды, а это запрещено условием. Значит, всего гангстеров не более $f(m)f(k-m)$. Тогда имеем:

$$f(k)\leqslant f(m)f(k-m)\leqslant g(m)g(k-m)\leqslant g(k).$$

Теперь рассмотрим случай связного графа. Пусть в нашем графе есть вершина V степени не меньше чем 3. Оставим только гангстеров, состоящих в банде V, и распустим банду V и все враждующие с ней банды. Заметим, что условие задачи осталось выполненным, поскольку ни один из гангстеров, состоявших в V, не состоял в бандах, враждующих с V, а значит, по-прежнему любые два гангстера состоят в разном наборе банд. Поскольку было распущено не менее четырех банд, это означает, что число гангстеров, состоявших в банде V, было не больше, чем $f(k-4)$. С другой стороны, количество гангстеров, не состоящих в банде V, будет не больше чем $f(k-1)$, поскольку можно убрать банду V и оставить гангстеров, не состоявших в ней, и условие задачи по-прежнему будет выполняться. Таким образом,

$$f(k) \leqslant f(k-1)+f(k-4) \leqslant g(k-1)+g(k-4) \leqslant g(k).$$

Остался случай, когда граф вражды банд — связный граф, в котором все вершины имеют степень не больше 2. Тогда этот граф — цепочка из k вершин или цикл на k вершинах. Если $k \leqslant 4$, то очевидно, что $f(k) \leqslant g(k)$. Иначе возьмем три последовательных вершины, не являющиеся крайними в цепочке. Очевидно, что минимум в одну из этих банд входит каждый гангстер, при этом в каждую из этих трех банд входит не более чем $f(k-3)$ гангстера, так как если гангстер входит в банду, то он не входит в две враждующие с ней, а относительно остальных $k-3$ банд и гангстеров, входящих в выбранную банду, условие задачи продолжит выполняться. Имеем:

$$f(k) \leqslant 3f(k-3) \leqslant 3g(k-3) \leqslant g(k).$$

Таким образом, $f(k) \leqslant g(k)$ и оценка доказана. Тогда, если банд 36, то максимальное количество гангстеров равно $3^{12}=531441$.

Комментарий. Задача в общем виде была решена в работе Дж. У. Муна и Л. Мозера в 1965 году (*Moon J. W., Moser L.* On cliques in graphs // Israel J. Math. — 1965. — V. 3. — P. 23–28.).

11 класс, первый день

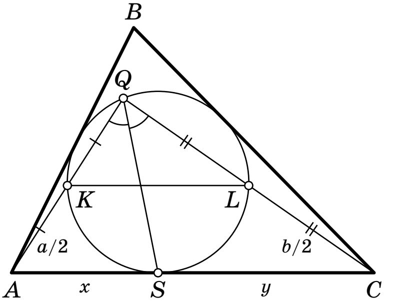
1. *Ответ.* 1520.

Решение. Заметим сразу, что и до, и после перестановки цифр число делится на 10 и поэтому должно оканчиваться на 0. Покажем, что нет трехзначных чисел, обладающих описанным в условии задачи свойством. Действительно, если $\overline{ab0}=100a+10b=80k$ и $\overline{ba0}=100b+10a=80l$, $a<b$, то цифры a и b четны, причем $\overline{ba0}-\overline{ab0}=90(b-a)=80(l-k)$, поэтому $b-a$ делится на 8. Это возможно только при $b=8$, $a=0$, но 0 не может быть первой цифрой числа.

Попробуем найти требуемое число среди четырехзначных чисел, начинающихся с 1, т. е. чисел вида $\overline{1ab0}=1000+$ $+100a+10b$. Если поменять местами цифры 1 и b, то оно не будет делиться на 80. Если переставить цифры a и b, $a<b$, то аналогично рассуждению для трехзначных чисел

получаем единственный вариант $b=8$, $a=0$, но число 1080 не кратно 80. Значит, может подойти только число, в котором переставлены цифры 1 и a, где $a>1$. Если числа $\overline{1ab0}$ и $\overline{a1b0}$ кратны 80, то их разность $\overline{a1b0}-\overline{1ab0}=900(a-1)$ также кратна 80, т. е. $900(a-1)=80m$, $45(a-1)=4m$. Значит, $a-1$ делится на 4, что возможно только при $a=5$ или $a=9$. Но уже при $a=5$ и $b=2$ получаем число $1520=19\cdot 80$, удовлетворяющее условию задачи, так как $5120=64\cdot 80$.

2. *Первое решение.* Пусть K и L — середины отрезков AQ и QC соответственно, которые по условию лежат на вписанной окружности (см. рисунок). Отрезок KL — средняя линия в треугольнике AQC, поэтому $KL \parallel AC$. Параллельные прямые KL и AC высекают на вписанной окружности равные дуги KS и SL. Значит, опирающиеся на них углы KQS и SQL равны.



Второе решение. Пусть $AQ=a$, $QC=b$, $AS=x$, $SC=y$. По теореме о касательной и секущей имеем $a\cdot\frac{a}{2}=x^2$, $b\cdot\frac{b}{2}=y^2$. Отсюда следует, что $x:a=y:b$, т. е. точка S делит сторону AC треугольника AQC на части, пропорциональные прилежащим сторонам. В таком же отношении эту сторону делит и основание биссектрисы угла Q в этом треугольнике. Поскольку точка, делящая отрезок в заданном отношении, определена однозначно, отрезок QS совпадает с биссектрисой.

Комментарий. Отметим следующий любопытный факт: описанная около треугольника AQC окружность касается вписанной в треугольник ABC окружности в точке Q. Действительно, если O — точка на вписанной окружности, диаметрально противоположная Q, то $\angle QKO=\angle QLO=90^\circ$ как опирающиеся на диаметр, поэтому O является точкой пересечения серединных перпендикуляров KO и LO треугольника AQC, т. е. центром его описанной окружности, причем общая точка Q этих окружностей лежит на линии их центров. (Этот факт можно обосновать и иначе: гомотетия с центром в точке Q и коэффициентом 2 переводит вписанную окружность треугольника ABC в описанную окружность треугольника AQC, поэтому эти окружности касаются в точке Q.) Утверждение задачи следует теперь из *леммы Архимеда*: если окружность вписана в сегмент окружности, стягиваемый хордой AC, и касается дуги в точке Q, а хорды — в точке S, то прямая QS является биссектрисой угла AQC.

3. *Ответ.* а) $x_0 > y_0$; б) 0.

Решение. Для краткости обозначим степень 2017 через n.

а) Заметим, что $y_0 > 1$, так как $y_0^{2n} - y_0 = 3x_0 > 0$. Аналогично, поскольку x_0 удовлетворяет уравнению $x_0^n - x_0 = 1 > > 0$, то и $x_0 > 1$. Следовательно, $1 + x_0 + x_0^2 > 3x_0$, так как это неравенство равносильно неравенству $(1 - x_0)^2 > 0$, которое выполнено при $x_0 \neq 1$. Тогда $x_0^{2n} - x_0 = 1 + x_0 + x_0^2 > 3x_0 = = y_0^{2n} - y_0$. Поскольку функция $f(t) = t^{2n} - t$ строго возрастает при $t > 1$ (так как при этих t имеем $f'(t) = 2nt^{2n-1} - 1 > 0$), получаем $x_0 > y_0$.

б) Проверим, что $x_0 < 1 + \frac{1}{n}$. Действительно,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 - \frac{1}{n} = 1 + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \vartheta_n - \frac{1}{n} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2n} + \vartheta_n > 1$$

при $n \geqslant 3$ (через $\vartheta_n > 0$ обозначены остальные слагаемые биномиального разложения), а значит, в силу возрастания при $t > 1$ функции $g(t) = t^n - t$ справедливо неравенство $x_0 < 1 + \frac{1}{n}$.

Далее, вычтем из равенства $x_0^{2n} - x_0 = 1 + x_0 + x_0^2$ равенство $y_0^{2n} - y_0 = 3x_0$. Получим

$$x_0^{2n} - y_0^{2n} - (x_0 - y_0) = (1 - x_0)^2 < \frac{1}{n^2}.$$

Поскольку

$$x_0^{2n} - y_0^{2n} = (x_0 - y_0)(x_0^{2n-1} + x_0^{2n-2}y_0 + \ldots + x_0y_0^{2n-2} + y_0^{2n-1}) > \\ > 2n(x_0 - y_0),$$

справедливы неравенства

$$(2n-1)(x_0 - y_0) \leqslant x_0^{2n} - y_0^{2n} - (x_0 - y_0) < \frac{1}{n^2}.$$

Таким образом,

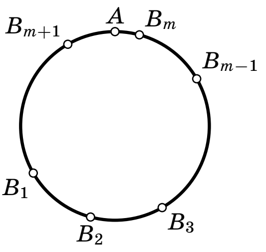
$$0 < x_0 - y_0 < \frac{1}{(2n-1)n^2} = \frac{1}{2017^2 \cdot 4033} < \frac{1}{16 \cdot 10^9} < \frac{1}{10^{10}},$$

а значит, первые 10 знаков после запятой разности $x_0 - y_0$ равны нулю.

4. *Ответ.* 75.

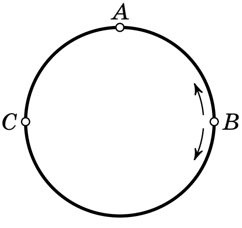
Решение. Всюду далее будем без ограничения общности считать, что все велосипедисты едут по треку против часовой стрелки, причем первый из них — самый быстрый, а третий — самый медленный, а также рассматривать движение всех велосипедистов относительно второго из них (т. е. в системе отсчета, в которой второй велосипедист остается неподвижен).

Обозначим через A точку, в которой постоянно находится второй велосипедист. Тогда первый и третий велосипедисты движутся относительно этой точки против и по часовой стрелке соответственно. Они периодически встречаются друг с другом через равные промежутки времени, поскольку едут с постоянными скоростями навстречу друг другу. Обозначим через B_1, B_2, B_3, ... последовательные точки их встреч с начала наблюдения за этими спортсменами (см. рисунок).



Любые две соседние точки B_n и B_{n+1} (n — произвольное натуральное число) различны, так как первый велосипедист не сможет сделать полный круг против часовой стрелки, не встретившись при этом с третьим. Обозначим через β_n меньшую из двух дуг трека с концами B_n, B_{n+1}. Ее длина не превосходит 150 метров. Поскольку встречи происходят периодически со сдвигом в одном направлении, все дуги β_n равны между собой и объединение нескольких из них покрывает весь трек. Значит, найдется такая дуга β_m, содержащая точку A, что длина одной из дуг B_mA или AB_{m+1} не превосходит 75 метров. Таким образом, в какой-то момент встречи первого и третьего велосипедистов они будут находиться от второго велосипедиста не дальше 75 метров. Поэтому фотограф заведомо сможет сделать удачный снимок, если d не больше 75 метров.

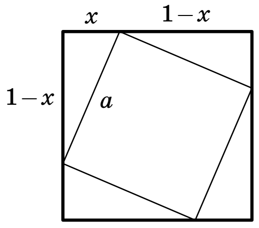
Приведем пример движения велосипедистов, при котором ни в какой момент времени они не могут оказаться на каком-либо участке трека длиной меньше 75 метров. Пусть скорости велосипедистов образуют арифметическую прогрессию, а в момент какой-то из встреч первого и третьего из них второй был впереди на 75 метров. Тогда относительно точки A, где постоянно находится второй велосипедист, первый и третий движутся с равными по величине, но различными по направлению скоростями. Следовательно, они будут встречаться поочередно в точках B и C, отстоящих от точки A на 75 метров, а их положения в каждый момент времени будут симметричны относительно прямой BC (см. рисунок). Значит, в каждый момент времени расстояние от одного из них до точки A будет не меньше 75 метров.



5. *Ответ.* $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$.

Решение. Пусть длина ребра меньшего куба равна $a < 1$. Раскрасим его вершины в черный и белый цвета так, чтобы вершины, соединенные ребром, были окрашены в разные цвета. Тогда расстояние между любыми двумя точками одного цвета равно $a\sqrt{2}$. Назовем две черные и две белые вершины, принадлежащие одной грани меньшего куба, соответствующими. Рассмотрим 4 белые вершины. Куб имеет 3 пары противоположных граней, следовательно, по принципу Дирихле какие-то две белые вершины принадлежат одной паре противоположных граней большего (единичного) куба. Возможны два случая.

Случай 1. Две белые вершины оказались в одной грани единичного куба. Тогда две соответствующие им черные вершины принадлежат той же грани единичного куба (иначе одна из черных вершин лежала бы вне большего куба). Более того, эти 4 точки обязаны лежать на ребрах большего куба, так как иначе вершины противоположной грани меньшего куба лежали бы строго внутри единичного куба, что противоречит условию задачи. Получаем квадрат со стороной a, вписанный в единичный квадрат (см. рисунок).



Пусть вершины меньшего квадрата разбивают стороны большего на отрезки длин x и $1-x$. Тогда

$$a^2 = x^2 + (1-x)^2 \geqslant \frac{1}{2}(x+1-x)^2 = \frac{1}{2},$$

поэтому $a \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. Когда x пробегает полуинтервал $\left(0; \frac{1}{2}\right]$, искомая длина a принимает все значения из полуинтервала $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$. При этом все вершины получающегося малого куба будут лежать на гранях единичного куба.

Случай 2. Две белые вершины оказались на разных противоположных гранях единичного куба. Тогда расстояние между ними, равное $a\sqrt{2}$, не меньше 1. Поэтому и в этом случае $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant a < 1$.

6. См. решение задачи 6 для 10 класса.

11 класс, второй день

1. *Ответ.* -5 или $-3{,}2$.

Решение. Пусть $a_1 = b_1 = a \neq 0$, разность арифметической прогрессии равна d, а знаменатель геометрической равен q. Поскольку прогрессии непостоянны, $d \neq 0$ и $q \neq 1$. Возможны два случая.

1) Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия, а (b_n) — геометрическая. Тогда по условию получаем $a + d = 2aq$, $a + 3d = 8aq^3$, или $d = a(2q-1)$, $3d = a(8q^3 - 1) = d(4q^2 + 2q + 1)$, $2q^2 + q - 1 = 0$, откуда $q = 1/2$ или $q = -1$. Если $q = 1/2$, то $d = a(2q-1) = 0$, что по условию невозможно. Если $q = -1$, то $d = -3a$ и $a_3 : b_3 = \frac{a+2d}{aq^2} = -5$.

2) Пусть теперь (a_n) — геометрическая, а (b_n) — арифметическая прогрессия. Тогда $2(a+d) = aq$, $8(a+3d) = aq^3$, поэтому $2d = a(q-2)$, $24d = a(q^3-8) = 2d(q^2+2q+4)$, $q^2 + 2q - 8 = 0$, откуда $q = 2$ или $q = -4$. В первом случае снова $d = 0$, что противоречит условию, а во втором $q = -4$, $d = -3a$ и $a_3 : b_3 = \frac{aq^2}{a+2d} = -\frac{16}{5}$.

2. *Ответ.* Нет.

Решение. Предположим, что такие числа x и y существуют. Тогда они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \lg(x+y) = \lg x \cdot \lg y, \\ \lg(x-y) = \dfrac{\lg x}{\lg y}. \end{cases}$$

Логарифм в левой части второго уравнения определен при $x > y$. Если $0 < y < x \leqslant 1$, то левая часть второго уравнения отрицательна, а правая часть неотрицательна — получаем противоречие. Если $0 < y < 1$ и $x \geqslant 1$, то левая часть первого уравнения положительна, а правая часть неположительна, снова противоречие.

Пусть $x > y > 1$. В этом случае все логарифмы положительны. Сложим уравнения системы и применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\lg(x^2 - y^2) = \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg x \cdot \lg y + \frac{\lg x}{\lg y} \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{(\lg x)^2} = 2 \lg x = \lg x^2.$$

Отсюда $x^2 - y^2 \geqslant x^2$, что при положительном y невозможно.

Значит, Незнайка не сможет подобрать числа x и y, удовлетворяющие одновременно обоим уравнениям системы.

3. *Ответ.* Да, может.

Решение. Первый способ. Докажем, что Ниро Вульф заведомо сможет найти преступника за 12 дней. Людей, замешанных в деле, будем называть подозреваемыми. Сопоставим каждому из 80 подозреваемых свой упорядоченный набор (a, b, c, d) из четырех не обязательно различных цифр a, b, c и d, каждая из которых может принимать значения 0, 1 или 2. Это возможно, поскольку всего таких различных наборов $3^4 = 81$. Пусть в день расследования под номером k ($k = 1, 2, \ldots, 12$) Ниро Вульф пригласит к себе тех и только тех подозреваемых, набор цифр которых удовлетворяет k-му из равенств: $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, $b = 0$, $b = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $c = 1$, $c = 2$, $d = 0$, $d = 1$, $d = 2$. Тогда в один из этих дней он пригласит к себе свидетеля, но при этом не пригласит преступника, так как их наборы отличаются хотя бы в одной цифре. Значит, преступление будет раскрыто за 12 дней.

Второй способ. Разобьем подозреваемых на 16 групп по 5 человек. При этом каждой из групп сопоставим свой упорядоченный набор (a, b, c, d) из четырех не обязательно различных цифр a, b, c и d, каждая из которых может принимать значения 0 или 1 (это возможно, поскольку всего таких различных наборов $2^4 = 16$), а ее членов занумеруем числами от 1 до 5.

Пусть в день расследования под номером k ($k = 1, \ldots, 8$) Ниро Вульф пригласит к себе тех и только тех подозреваемых, набор цифр которых удовлетворяет k-му из равенств: $a = 0$, $a = 1$, $b = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $c = 1$, $d = 0$, $d = 1$.

Если преступник и свидетель попали в разные группы, то преступление будет раскрыто в один из этих дней, так как наборы цифр группы свидетеля и группы преступника отличаются хотя бы в одной цифре.

Предположим, что свидетель находится в одной группе с преступником. Обозначим через m и n номера свидетеля и преступника в этой группе соответственно. Пусть на 9-й день Ниро Вульф пригласит из каждой группы подозреваемых с номерами 1 и 2, на 10-й день — подозреваемых с номерами 3 и 4, на 11-й день — подозреваемых с номерами 1, 3 и 5, на 12-й день — подозреваемых с номерами 2, 4 и 5. Тогда найдется один из этих дней, в который из каждой группы были приглашены подозреваемые с номером m, но при этом не были приглашены подозреваемые с номером n. Значит, в этот день преступление будет раскрыто.

Третий способ. Покажем, что Ниро Вульф сможет найти преступника даже за 9 дней. Для этого сопоставим каждому подозреваемому свой код — упорядоченный набор из девяти цифр, четыре из которых единицы, а пять нули (это можно сделать, так как всего таких кодов $C_9^4 = 126 > 80$).

Пусть Ниро Вульф в k-й день ($k = 1, 2, \ldots, 9$) пригласит к себе тех и только тех подозреваемых, k-я цифра кода которых равна 1. Поскольку все коды содержат ровно по 4 единицы, найдется такое число m от 1 до 9, что на m-м месте у свидетеля стоит единица, а у преступника — ноль. Значит, в m-й день свидетель будет приглашен к Ниро Вульфу без преступника, и преступление будет раскрыто.

Комментарий. Пользуясь методом, использованным в третьем способе решения, можно показать, что за 12 дней детектив сможет раскрыть дело, если в нем замешаны не более $C_{12}^6 = 924$ подозреваемых.

Более того, эта оценка точная, что вытекает из следующего факта. Пусть A — множество всех подмножеств некоторого n-элементного множества. Рассмотрим такое подмножество B множества A, что никакие два элемента из B не вложены друг в друга (такое подмножество B называется *антицепью*). Доказанная в 1928 году теорема Шпернера [1] утверждает, что максимальное число элементов, которое может содержать B, равно $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Здесь $\lfloor n/2 \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $n/2$.

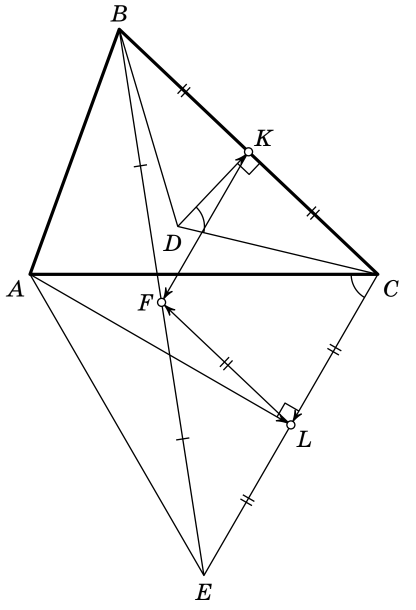
Из этой теоремы следует, что максимальное число подозреваемых, среди которых заведомо можно выявить преступника за n дней, равно $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Действительно, сопоставим каждому из подозреваемых код из нулей и единиц длины n, в котором на k-м месте стоит 1, если в k-й день он был приглашен к Ниро Вульфу, и 0 в противном случае. Такой код однозначно определяет подмножество дней, в которые подозреваемый побывал у детектива. Чтобы дело было раскрыто, в какой-то день свидетель должен побывать у Ниро Вульфа без преступника. Это произойдет, если существует такое число k ($k = 1, 2, \ldots, n$), что на k-м месте в коде свидетеля стоит 1, а в коде преступника стоит 0. Максимальное число кодов, при котором это можно гарантировать, в соответствии с теоремой Шпернера как раз равно $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$ (при этом в каждом коде будет ровно $\lfloor n/2 \rfloor$ единиц).

Из полученного результата можно сделать и такой вывод: минимальное число дней, за которое можно заведомо выявить преступника среди 80 подозреваемых, равно девяти, так как за 8 дней преступника можно найти лишь среди не более $C_8^4 = 70$ человек.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Sperner's_theorem.

4. *Решение.* Без ограничения общности будем считать, что вершины A, B, C треугольника ABC расположены в указанном порядке по часовой стрелке (см. рисунок на с. 38). Обозначим через K и L середины отрезков BC и CE соответственно. Тогда $\angle DKC = \angle CLA = 90^\circ$ и $\angle CDK = \angle ACL = 60^\circ$. Следовательно,

$$\frac{CK}{DK} = \frac{AL}{CL} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$



Значит, если вектор $\overrightarrow{DK}$ повернуть на 90° против часовой стрелки, а затем умножить на $\sqrt{3}$, то получится вектор, равный вектору $\overrightarrow{CK}$. Аналогично, если вектор $\overrightarrow{CL}$ повернуть на 90° против часовой стрелки, а затем умножить на $\sqrt{3}$, то получится вектор, равный вектору $\overrightarrow{AL}$. По теореме о средней линии для треугольника BCE имеем $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{LF}$ и $\overrightarrow{KF}=\overrightarrow{CL}$. Поэтому при повороте на 90° против часовой стрелки и последующем умножении на $\sqrt{3}$ вектор $\overrightarrow{DK}$ перейдет в равный вектору $\overrightarrow{LF}$, вектор $\overrightarrow{KF}$ — в равный вектору $\overrightarrow{AL}$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{KF}$ при таком преобразовании перейдет в равный вектору $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{LF}$. Значит, векторы $\overrightarrow{DF}$ и $\overrightarrow{AF}$ перпендикулярны, т. е. $\angle AFD=90^\circ$. Что и требовалось доказать.

5. *Ответ*. 2 и 5.

Решение. Занумеруем строки (снизу вверх) и столбцы (справа налево) числами от 0 до 2016, а через $a_{i,j}$ обозначим цифру, стоящую на пересечении i-й строки и j-го столбца. При такой нумерации строк и столбцов цифры рассматриваемых чисел, стоящие в младших разрядах, имеют меньший номер строки (столбца).

Если через v_i обозначить число, записываемое цифрами i-й строки, а через w_j — число, записываемое цифрами j-го столбца, то $v_i = \sum\limits_{j=0}^{2016} 10^j a_{i,j}$, $w_j = \sum\limits_{i=0}^{2016} 10^i a_{i,j}$.

Покажем сначала, что описанная в условии задачи ситуация возможна для $p=2$ и $p=5$. Пусть, например, $a_{i,j}=1$ при всех $i, j \geqslant 1$ (эти цифры можно выбрать и любыми другими), $a_{0,2016}=1$, а остальные цифры равны p. Тогда все числа, читаемые по строкам и столбцам, кроме w_{2016}, заканчиваются на p и, как следствие, делятся на p, а w_{2016} заканчивается на 1 и поэтому на p не делится.

Теперь докажем, что для всех других p описанная ситуация невозможна. Предполагая противное, рассмотрим величину

$$S = \sum_{i,j=0}^{2016} 10^{i+j} a_{i,j}.$$

С одной стороны, она равна

$$S = \sum_{i=0}^{2016} 10^i \sum_{j=0}^{2016} 10^j a_{i,j} = \sum_{i=0}^{2016} 10^i v_i.$$

С другой стороны, абсолютно аналогично получаем

$$S = \sum_{j=0}^{2016} 10^j w_j.$$

Если все числа v_i, w_j ($i, j = 0, 1, 2, \ldots, 2016$), кроме одного, делятся на p, а оставшееся на p не делится, то в одной из двух последних сумм все слагаемые делятся на p (значит, S делится на p), а в другой сумме все слагаемые, кроме одного, делятся на p, а оставшееся, в силу взаимной простоты p и степеней десятки, на p не делится (значит, S не делится на p). Противоречие.

6 класс (4951 работа)

	1	2	3	4	5	6
8						23
7					39	0
6				639	69	2
5			214	0	170	1
4	1426	255	11	0	5	1
3	0	61	88	0	11	64
2	0	262	402	9	1461	17
1	2109	843	107	83	287	17
0	1450	3564	4163	4254	2943	4860

7 класс (3106 работ)

	1	2	3	4	5	6
8					12	15
7					3	0
6			324	308	8	3
5			6	7	31	3
4	1203	440	268	22	30	3
3	1	40	85	4	211	2
2	0	72	469	598	46	312
1	1274	300	25	222	140	4
0	628	2254	1929	1945	2625	2764

8 класс (1845 работ)

	1	2	3	4	5	6
$+$	1055	209	157	57	3	0
$\pm$	19	183	48	7	4	0
$\mp$	0	62	221	27	4	0
$-$	380	755	1152	1301	665	559
0	391	636	267	453	1169	1286

9 класс (*1200 работ*)

	1	2	3а	3б	4	5	6
$+$	239	106	757	119	5	42	2
$\pm$	61	28	0	1	0	18	0
$\mp$	95	90	0	0	3	6	8
$-$	675	724	363	1000	485	659	402
0	130	252	80	80	707	475	788

10 класс (*1096 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	388	251	143	43	12	2
$\pm$	58	28	3	23	2	1
$\mp$	20	40	9	18	3	3
$-$	476	637	384	377	519	428
0	154	140	557	635	560	662

11 класс, первый день (*636 работ*)

	1	2	3а	3б	4	5	6
$+$	335	321	68	11	29	9	0
$\pm$	79	19	20	0	10	14	0
$\mp$	54	8	84	9	41	70	7
$-$	168	288	464	616	556	543	629

11 класс, второй день (*255 работ*)

	1	2	3	4	5
$+$	115	42	50	41	8
$\pm$	66	4	4	10	1
$\mp$	36	17	10	14	15
$-$	38	192	191	190	231

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики. На факультете действуют научные школы, возглавляемые учеными самого высокого класса. Учебные планы факультета охватывают все современные направления математики и механики. Диплом механико-математического факультета признан во всем мире. Выпускники факультета трудятся во всех крупных научно-исследовательских центрах, учебных и иных учреждениях, не обязательно непосредственно связанных с математикой и механикой. На мехмате учат не столько рецептам решения конкретных задач, сколько умению думать самостоятельно, а также извлекать знания из разных источников. Именно это позволяет выпускникам факультета быстро включаться и быть эффективными практически в любой иной сфере деятельности — от компьютерной или финансовой до управления производством и политики.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ НИУ ВШЭ

создан в 2007 г. при участии Независимого Московского Университета. Уже в 2013 г. Международный экспертный совет, включающий филдсовских лауреатов П. Делиня, А. Окунькова, С. Смирнова и других выдающихся математиков, высоко оценил успехи факультета: «Спустя 5 лет после его создания, НИУ ВШЭ стал лидером российского высшего математического образования. Наиболее впечатляет бакалавриат факультета — по нашему мнению, один из лучших в мире. Он привлекает самый сильный в России контингент студентов-математиков, предлагая им трудную, но интересную и тщательно проработанную программу.»

На старших курсах студент выбирает индивидуальный учебный план, позволяющий глубоко изучить заинтересовавшую область чистой математики или ее приложений. Благодаря этому выпускники, нацеленные на академическую карьеру, поступают в лучшие аспирантуры мира, а остальные неизменно востребованы в IT, финансах и любых других наукоемких приложениях.

В 2017 г. совместно с Центром Педагогического Мастерства факультет открывает новую программу бакалавриата для подготовки высококвалифицированных преподавателей физматшкол.

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Уникальная научно-образовательная Школа, созданная в 2016 году в Московском физико-техническом институте. В ее состав входят факультет инноваций и высоких технологий (ФИВТ), факультет управления и прикладной математики (ФУПМ), ряд современных лабораторий.

ФИВТ — признанный лидер в области образования и науки на стыке математики, программирования и computer science. На ФИВТ представлены уникальные учебные планы по математике, в которых традиционное фундаментальное математическое образование подкреплено не имеющим аналогов набором курсов по дискретной математике: комбинаторике, теории графов, логике и теории алгоритмов, теории чисел, дискретным функциям, дискретному анализу, дискретной оптимизации.

ФУПМ — сильнейший факультет в области образования и науки на стыке математики, физики, механики и информационных технологий. На ФУПМ за счет правильного сочетания лучшей в стране программы по физике и современных математических курсов закладываются основы для исследований в области математического моделирования, вычислительной математики, механики, оптимизации, статистики и стохастики.

На факультетах Школы ведется большая научная и исследовательская работа, к которой студенты активно привлекаются уже на ранних курсах. По окончании факультета студент имеет широкий спектр перспектив — занятия чистой наукой, прикладные исследования, аналитика и разработка в крупнейших компаниях России и мира, а также в лабораториях Школы и в сильнейших институтах Российской академии наук.

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru
www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ
www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях. Приглашаем совершить познавательные экскурсии по красивым математическим задачам. Их постановка понятна школьнику, но до сих пор некоторые задачи не решены учеными.

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»
www.problems.ru

Все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.) размещены на сайте www.problems.ru

---

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ»
zadachi.mccme.ru

Более 7000 задач по планиметрии и 2500 задач по стереометрии с решениями, чертежами, атрибутами для тематического поиска и прослеживания взаимосвязей.

Первые научно-популярные журналы начали выходить в России более двух веков назад. На их статьях выросло не одно поколение российских ученых, инженеров, просто думающих и читающих людей самых разных родов занятий. Сейчас старые номера этих журналов доступны читателям лишь в ничтожном числе библиотек. Электронные архивы призваны сделать их материалы доступными для широкой аудитории.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (1886—1917)

vofem.ru

Журнал, фактически заложивший традиции жанра в литературе на русском языке. За 31 год его существования вышло 674 выпуска В.О.Ф.Э.М.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы и многое другое. Среди постоянных рубрик журнала были, например: «Статьи, посвященные вопросам преподавания математики и физики», «Опыты и приборы», «Математические мелочи», «Библиографический отдел».

Статьи составлялись настолько популярно, насколько это возможно без ущерба для научной стороны дела.

ЖУРНАЛ «ПРИРОДА» (1912—)

priroda.ras.ru

Ежемесячный научно-популярный журнал Российской академии наук (РАН) «Природа» — одно из старейших в России изданий. Первый номер этого журнала вышел в 1912 году.

Фактически перед вами огромная энциклопедия по естественным наукам, составленная и регулярно пополнявшаяся отечественными учеными на протяжении 100 лет.

ЖУРНАЛ «КВАНТ» (1970—)

kvant.ras.ru

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

ПЯТНАДЦАТАЯ ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 8—11 КЛАССОВ

состоится 16 апреля 2017 года

Олимпиада рассчитана на школьников, успешно выступающих в городских математических олимпиадах, а также на школьников, увлекающихся геометрией.

Олимпиада по геометрии проводится в рамках Всероссийской олимпиады по геометрии памяти Игоря Федоровича Шарыгина. В ней могут принять участие школьники 8—11 классов. Призеры олимпиады будут награждены дипломами оргкомитета и математической литературой. Победители олимпиады — учащиеся 8—10 классов — будут приглашены на финальный тур Всероссийской олимпиады по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, который состоится в июле 2017 года в г. Дубне под Москвой.

Для участия в олимпиаде необходима предварительная регистрация. Подробности на сайте

olympiads.mccme.ru/ustn

ВЫЕЗДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ

Подробную оперативную информацию о выездных математических и околоматематических школах смотрите на странице www.mccme.ru/leto

Семнадцатая летняя школа
«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»,
посвященная памяти Виталия Арнольда

пройдет с 19 по 30 июля 2017 года в Дубне (на базе дома отдыха «Ратмино») для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс).

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов.

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. Если вы хотите участвовать в работе школы, заполните до 10 мая анкету участника.

Председатель научного комитета школы — профессор А. Б. Сосинский.

Предварительное согласие провести занятия на школе дали академик РАН В. А. Васильев, члены-корреспонденты РАН Л. Д. Беклемишев, В. М. Бухштабер, А. Г. Кузнецов, И. А. Панин, В. Ю. Протасов, а также И. В. Аржанцев, А. И. Буфетов, А. П. Веселов, Ю. С. Ильяшенко, В. А. Клепцын, Г. Ю. Панина, Е. Ю. Смирнов, А. Б. Сосинский, В. А. Тиморин, В. М. Тихомиров и другие.

Материалы прошедших школ и информацию о ЛШСМ-2017 смотрите на сайте

`www.mccme.ru/dubna`

Контактный e-mail оргкомитета `dubna@mccme.ru`

ОГЛАВЛЕНИЕ

LXXX Московская математическая олимпиада
Задачи и решения

Подписано в печать 29.03.2017 г.
Формат бумаги 60 × 90/16. Объем 3 печ. л.
Гарнитура Школьная. Тираж 1000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-08-04