LXXXI Московская математическая олимпиада

11 марта 2018 года • 8 класс

Задача 1. Существуют ли такие три попарно различных натуральных числа a, b и c, что числа $a+b+c$ и $a \cdot b \cdot c$ являются квадратами некоторых натуральных чисел?

Задача 2. В строку выписано 39 чисел, не равных нулю. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каким может быть знак произведения всех чисел? (Укажите все варианты и докажите, что других нет.)

Задача 3. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K. Точка M — середина BC, точка P — середина KM. Докажите, что если $\angle APB = \angle CPD = 90°$, то $AK = DK$.

Задача 4. Андрей Степанович каждый день выпивает столько капель валерьянки, сколько в этом месяце уже было солнечных дней (включая текущий день). Иван Петрович каждый пасмурный день выпивает количество капель валерьянки, равное номеру дня в месяце, а в солнечные дни не пьет. Докажите, что если в апреле ровно половина дней будет пасмурные, а другая половина — солнечные, то Андрей Степанович и Иван Петрович выпьют за месяц поровну валерьянки.

Задача 5. В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a \mathbin{?} b$ обозначает одно из следующих: $a-b$, $b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!», «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a-18b$.

Задача 6. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1 и FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ — равносторонний. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также равносторонний.

XVI устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 15 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXI Московской математической олимпиады
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

LXXXI Московская математическая олимпиада

11 марта 2018 года • 9 класс

Задача 1. В строку выписано 81 ненулевое число. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каким может быть знак произведения всех чисел?

Задача 2. Даны четыре палочки. Оказалось, что из любых трёх из них можно сложить треугольник, при этом площади всех четырёх треугольников равны. Обязательно ли все палочки одинаковой длины?

Задача 3. Докажите, что для любых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_k$ таких, что $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}>1$, у уравнения $\left[\frac{n}{a_1}\right]+\left[\frac{n}{a_2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{a_k}\right]=n$ не больше чем $a_1a_2\ldots a_k$ решений в натуральных числах. ($[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Задача 4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами. На стороне AD выбирается произвольная точка P, отличная от A и D. Описанные окружности треугольников ABP и CDP вторично пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки P.

Задача 5. Назовем расстановку n единиц и m нулей по кругу *хорошей*, если в ней можно поменять местами соседние нуль и единицу так, что получится расстановка, отличающаяся от исходной поворотом. При каких натуральных n, m существует *хорошая* расстановка?

Задача 6. На олимпиаду пришло 2018 участников, некоторые участники знакомы между собой. Будем говорить, что несколько попарно знакомых участников образуют «кружок», если любой другой участник олимпиады не знаком с кем-то из них. Докажите, что можно рассадить всех участников олимпиады по 90 аудиториям так, что ни в какой аудитории не сидят все представители какого-либо «кружка».

XVI устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 15 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXI Московской математической олимпиады
на сайте `www.mccme.ru/mmo/`

LXXXI Московская математическая олимпиада

11 марта 2018 года • 10 класс

Задача 1. Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого имеется последовательность цифр «2018»?

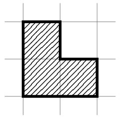
Задача 2. В клетчатом квадрате со стороной 2018 часть клеток покрашены в белый цвет, остальные — в чёрный. Известно, что из этого квадрата можно вырезать квадрат 10×10, все клетки которого белые, и квадрат 10×10, все клетки которого чёрные. При каком наименьшем d можно гарантировать, что из него можно вырезать квадрат 10×10, в котором количество чёрных и белых клеток отличается не больше чем на d?

Задача 3. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, AH — его высота. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO. Докажите, что прямая HP проходит через середину отрезка AB.

Задача 4. Назовём расстановку n единиц и m нулей по кругу *хорошей*, если в ней можно поменять местами соседние нуль и единицу так, что получится расстановка, отличающаяся от исходной поворотом. При каких натуральных m и n существует хорошая расстановка?

Задача 5. Карлсон ест треугольный торт. Он режет торт по биссектрисе одного из углов, выбирает любую из двух получившихся частей и съедает её, а со второй повторяет ту же операцию. Если Карлсон съест больше половины торта, он станет не в меру упитанным мужчиной в самом расцвете сил. Докажите, что рано или поздно это произойдёт.

Задача 6. Докажите, что количество способов разрезать квадрат 999×999 на уголки из трёх клеток (см. рис.) делится на 2^7.



XVI устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 15 апреля.
Подробности — на странице olympiads.mccme.ru/ustn/

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXI Московской математической олимпиады
на сайте www.mccme.ru/mmo/

LXXXI Московская математическая олимпиада

11 марта 2018 года • 11 класс, первый день

Задача 1. Графики квадратного трёхчлена и его производной разбивают координатную плоскость на четыре части. Сколько корней имеет этот квадратный трёхчлен?

Задача 2. Имеются одна треугольная и одна четырёхугольная пирамиды, все рёбра которых равны 1. Покажите, как разрезать их на несколько частей и склеить из этих частей куб (без пустот и щелей, все части должны использоваться).

Задача 3. Существуют ли такое натуральное n и такой многочлен $P(x)$ степени n, имеющий n различных действительных корней, что при всех действительных x выполнено равенство
а) $P(x)P(x+1) = P(x^2)$;
б) $P(x)P(x+1) = P(x^2+1)$?

Задача 4. Можно ли представить число 11^{2018} в виде суммы кубов двух натуральных чисел?

Задача 5. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1 и FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ правильный. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также правильный.

Задача 6. В доме из 2^n комнат сделали евроремонт. При этом выключатели света оказались перепутанными, так что при включении выключателя в одной комнате загорается лампочка, вообще говоря, в какой-то другой комнате. Чтобы узнать, какой выключатель к какой комнате подсоединён, прораб посылает несколько людей в какие-то комнаты, чтобы те, одновременно включив там выключатели, вернулись и сообщили ему, горела лампочка в их комнате или нет.
а) Докажите, что за $2n$ таких посылок прораб может установить соответствие между выключателями и комнатами.
б) А может ли он обойтись $2n-1$ такими посылками?

XVI устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 15 апреля.
Подробности — на странице olympiads.mccme.ru/ustn/

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXI Московской математической олимпиады
на сайте www.mccme.ru/mmo/