9 класс

9.1. Отец и сын несут одинаковые банки консервов. Масса каждой банки выражается целым числом граммов, не меньшим чем 300, но не большим чем 400. Отец несёт 6 *кг* 500 *г*, а сын –2 *кг* 600 *г*. Сколько банок у отца и сколько у сына?

Ответ. 20 банок у отца и 8 банок у сына.

Решение. Масса *m* каждой банки является общим делителем чисел 6500 и 2600. Так как НОД(6500; 2600) = $2^2 \cdot 5^2 \cdot 13$ = 1300, то любой общий делитель чисел 6500 и 2600 является делителем 1300. Начнём перечислять их по парам, проверяя условие 300 ≤ *m* ≤ 400: 1 и 1300 (оба не подходят), 2 и 650 (оба не подходят), 4 и 325 (325 подходит), 5 и 260 (оба не подходят). В остальных парах оба делителя меньше чем 260,значит, они не удовлетворяют условию 300 ≤ *m* ≤ 400. Таким образом, отец несёт 6500 : 325 = 20 банок, а сын несет 2600 : 325 = 8 банок.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение и получен верный ответ, но есть пробелы в обосновании его единственности (например, не показан отбор делителей числа 1300)*

«±» *Верно и обоснованно найдена масса банки, но не получен ответ на вопрос задачи*

«∓» *Приведен только верный ответ*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

9.2. Найдите все такие тройки чисел, что каждое число равно квадрату суммы двух остальных.

Ответ: (0, 0, 0); $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Решение. Запишем условие алгебраически: $a=(b+c)^2$, $b=(a+c)^2$, $c=(a+b)^2$. Пусть среди чисел есть различные, например, $a \neq b$. Вычитая из первого равенства второе, получим $a-b=(b+c)^2-(a+c)^2=(b-a)(b+a+2c)$. Так как $a \neq b$, то из полученного равенства следует, что $a+b+2c=-1$. Но это невозможно, так как числа a, b и c являются квадратами, поэтому их сумма неотрицательна.

Таким образом, $a=b=c$. Тогда каждое уравнение имеет вид $a=(2a)^2$, значит, $a=b=c=0$ или $a=b=c=\frac{1}{4}$.

Критерии проверки.

«+»*Приведено полное обоснованное решение*

«∓» *Доказано, что три числа должны быть равными, но допущена ошибка в ответе (например, найдена только одна тройка)*

«∓» *Верный ответ получен, исходя из предположения, что три числа равны, но это не доказано*

«∓» *Приведен только верный ответ*

«–» *Только угадана одна из троек*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

9.3. Придумайте, как разрезать контур квадрата со стороной 1 на четыре части и сложить из этих частей контур треугольника. Найдите площадь получившегося у вас треугольника. (*Толщины контур не имеет. Сгибать и разгибать части нельзя*)

Ответ: $S=\frac{2}{3}$.

Решение. Отметим на стороне *AD* квадрата *ABCD* точку *M* так, что $AM=\frac{1}{3}$. Разрежем контур квадрата в вершинах *B*, *C* и *D* и точке *M*. Из получившихся частей составим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с катетами $A_1B_1 = 1$, $A_1C_1 = A_1M_1 + M_1C_1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ и гипотенузой $B_1C_1 = B_1F + FC_1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ (см. рис. 9.3). Существование этого треугольника следует из теоремы, обратной теореме Пифагора. Его площадь равна $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

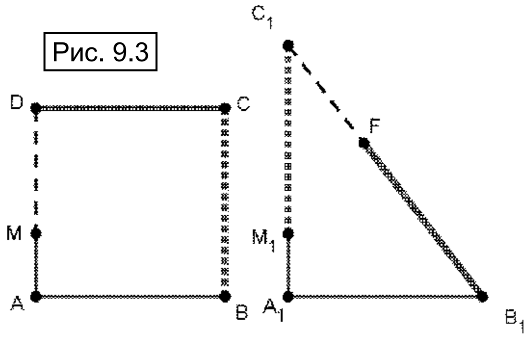


Рис. 9.3

Покажем, как можно было найти этот способ разрезания (участники олимпиады это делать не обязаны). Пусть $AM = x$. *Составим прямоугольный треугольник* $A_1B_1C_1$. *Один из его катетов* $A_1B_1 = 1$, *другой* $A_1C_1 = A_1M_1 + M_1C_1 = x + 1$. *Гипотенуза* $B_1C_1 = B_1F + FC_1 = 1 + (1 - x) = 2 - x$. *Треугольник с такими сторонами является прямоугольным, если* $1^2 + (x+1)^2 = (2-x)^2$, *откуда* $x = \frac{1}{3}$.

Можно доказать, что приведённый способ решения единственный с точностью до равенства треугольников. От участников олимпиады этого не требовалось. Также можно показать, что четыре – это минимальное количество частей, на которые можно разрезать контур квадрата, чтобы сложить треугольник.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Верно показано как разрезать и как сложить, в том числе указаны размеры частей, но площадь треугольника не найдена или найдена неверно*

«∓» *Верно показана схема разрезания, но размеры частей не указаны или найдены неверно*

«–» *Задача не решена или решена неверно*

9.4. Двум мудрецам, А и Б, назначено испытание. Наутро их приведут в комнату, где на столе по кругу будут лежать шесть одинаковых с виду таблеток, из которых четыре безвредны, а две отравлены. Затем мудрецу А сообщат, какие таблетки отравлены, но передать информацию Б он уже не сможет. Мудрецы должны по очереди (начинает А) съедать по таблетке, пока не останется только две ядовитых. Как мудрецам заранее договориться, чтобы успешно пройти испытание?

Решение. Первый способ. Возможны три случая расположения отравленных таблеток: они могут лежать рядом, через одну или напротив друг друга. Мудрец А может для удобства занумеровать утром таблетки по часовой стрелке так, чтобы отравленные таблетки имели номера либо 1 и 2, либо 1 и 3, либо 1 и 4 (см. рис. 9.4 а – в).

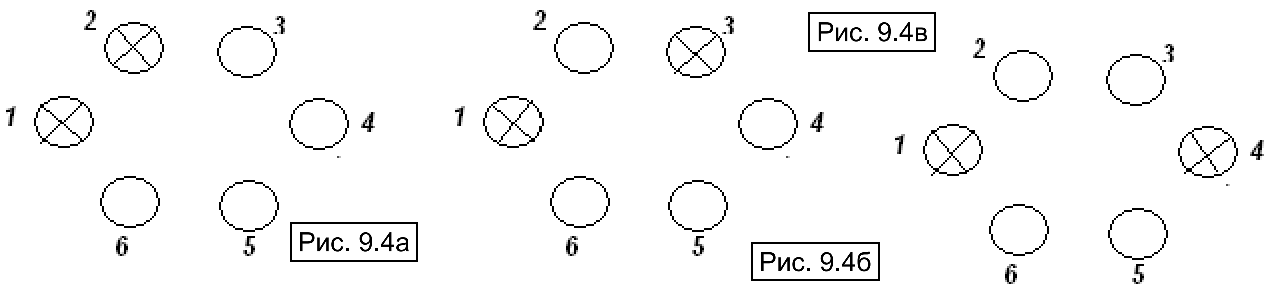


Рис. 9.4а Рис. 9.4б Рис. 9.4в

Накануне А может дать мудрецу Б, например, такие указания: «После того, как я съем первую таблетку, ешь соседнюю по часовой стрелке. А дальше смотри, что ем я. Если ем таблетку, лежащую напротив уже съеденной кем-то из нас, то ешь соседнюю против часовой стрелки. А если я ем соседнюю с двумя уже съеденными, то ешь через одну по часовой стрелки от моей.»

Порядок съедания таблеток, согласно этой инструкции: если отравлены таблетки 1 и 2 (см. рис. 9.4а), то А – 3, Б – 4, А – 6, Б – 5; если отравлены 1 и 3 (см. рис. 9.4б), то А – 4, Б – 5, А – 6, Б – 2; если отравлены 1 и 4 (см. рис. 9.4в), то А – 2, Б – 3, А – 6, Б – 5.

Второй способ. Мудрец А может дать инструкцию для напарника в «числовом формате»: «Как минимум две хороших таблетки будут лежать рядом, поэтому, когда я узнаю, какие таблетки ядовитые, я их пронумерую по часовой стрелке так, что 1-я будет ядовитой, а 2-я и 3-я нет. Я сначала съем 2-ю, ты ешь 3-ю. Далее действуем по такой схеме (см. таблицу), и не ошибись!»:

Яд	Я ем	Ты ешь
4	5	6
5	6	4
6	4	5

Алгоритм может быть другим, но в нем должна присутствовать нумерация таблеток (в каком-то виде) и должны быть рассмотрены все возможные случаи.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение: даны четкие указания мудрецу Б и сказано, какие именно таблетки должен есть мудрец А.*

«±» *Алгоритм описан нечётко, но проверяющему понятно, что имелось в виду (в том числе, понятно какие таблетки есть А), и алгоритм действительно работает во всех трёх случаях*

«∓» *Даны верные указания мудрецу Б, но из приведенного текста неясно, какие именно таблетки будет съедать А и в каком порядке*

«–» *Алгоритм описан настолько нечетко, что неясно, работает ли он во всех случаях*

«–» *Алгоритм отсутствует или не работает хотя бы в одном случае*

«–» *Решение использует отличную от выбора съедаемых таблеток передачу информации от А к Б (например «я подойду к столу с той стороны, где лежит отравленная таблетка, и …»)*

9.5. На саммит съехались 2018 политиков. Каждые двое собирались провести переговоры без свидетелей. В какой-то момент оказалось, что среди любых четверых найдётся такой, который уже поговорил с тремя остальными. Какое наибольшее количество переговоров осталось провести?

Ответ: три.

Решение. Пусть А и Б не поговорили. Рассмотрим любую другую пару, В и Г. Если и они не поговорили, то в четвёрке А, Б, В, Г не найдётся поговорившего с тремя остальными, что противоречит условию. Следовательно, в любую пару не поговоривших обязательно входит А или Б.

Пусть А не поговорил кроме Б еще с кем-то, которого назовем В. Рассмотрим четверки вида А, Б, В, Г, где в роли Г – каждый из остальных политиков. Так как А не поговорил с Б и не поговорил с В, то в каждой такой четвёрке Г обязательно поговорил со всеми остальными. Таким образом, с А и Б наверняка поговорили все, кроме В. Значит, не проведёнными могли остаться только переговоры между Б и В, что условию не противоречит. Итого, осталось провести, как максимум, три встречи: А – Б, А – В и Б – В.

Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±»*Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

«∓» *Приведены верный ответ и пример тройки не переговоривших между собой, но доказательство максимальности отсутствует, либо основано на невозможности улучшить приведенный пример*

«∓» *Решение отсутствует, но есть продвижение (например, доказано, что каждый мог не поговорить не более чем с двумя участниками)*

«–» *Приведен только ответ*

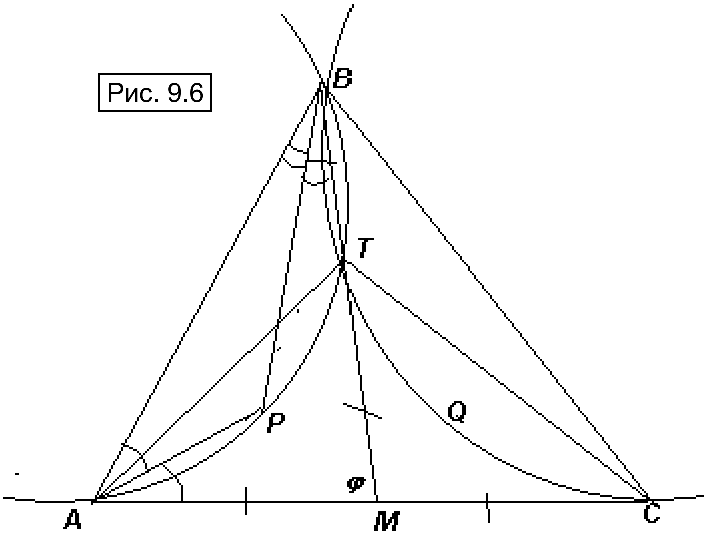
«–» *Задача не решена или решена неверно*

9.6. В остроугольном треугольнике ABC проведена медиана BM. Точки P и Q – центры вписанных окружностей треугольников ABM и CBM соответственно. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ABP и CBQ лежит на отрезке BM.

Решение. Отметим на BM точку T так, что $MA = MT = MC$. Так как $\angle ABC < \angle ATC = 90^{\circ}$, то эта точка лежит на отрезке BM (см. рис. 9.6). Докажем, что описанные окружности треугольников ABP и CBQ вторично пересекаются в точке T.

Действительно, пусть $\angle BMA = \varphi$. Тогда $\angle BPA = 90^{O} + \frac{\varphi}{2}$, так как он образован биссектрисами треугольника ABM. С другой стороны, из равнобедренного треугольника AMT получим: $\angle A = \angle T = \frac{180^{O} - \varphi}{2} = 90^{O} - \frac{\varphi}{2}$, тогда $\angle BTA = 90^{O} + \frac{\varphi}{2}$. Равенство углов BPA и BTA означает, что описанная окружность треугольника ABP проходит через T. Аналогично доказывается, что через T проходит описанная окружность треугольника CBQ. Таким образом, эти окружности пересекаются на медиане BM, что и требовалось доказать.

Рис. 9.6



Критерии проверки.

«+» *Приведено полное обоснованное решение*

«±» *Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, например, не показано, что точка пресечения окружностей лежит на медиане, а не на ее продолжении*

«–» *Задача не решена или решена неверно*