LXXXV
Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Москва
Издательство МЦНМО
2022

Департамент образования и науки города Москвы
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Московское математическое общество
Факультет математики НИУ ВШЭ
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты mmo@mccme.ru

☞ Материалы данной книги размещены на странице

www.mccme.ru/mmo

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

Председатель оргкомитета LXXXV ММО
к.ф.-м.н. *А. И. Ефимов*.

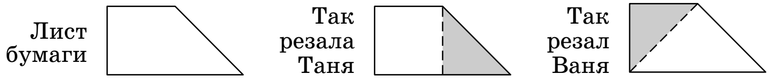
Сборник подготовили:

И. Ф. Акулич, Д. В. Афризонов, Е. В. Бакаев, А. В. Бегунц, А. Д. Блинков, П. А. Бородин, Д. Ю. Бродский, А. С. Волостнов, М. А. Волчкевич, А. И. Галочкин, Т. А. Гарманова, Т. И. Голенищева-Кутузова, Д. В. Горяшин, А. В. Грибалко, А. С. Гусев, М. Ю. Дмитриева, А. В. Доледенок, С. А. Дориченко, М. А. Евдокимов, А. А. Заславский, О. А. Заславский, Т. В. Казицына, В. А. Клепцын, К. А. Кноп, М. Б. Колодей, Д. В. Копьев, Т. А. Корчемкина, А. К. Кулыгин, А. Ю. Кушнир, Н. Ю. Медведь, Г. А. Мерзон, Д. Г. Мухин, А. Ф. Назмутдинов, В. В. Новиков, А. Е. Панкратьев, А. А. Пономарев, А. Н. Попов, Л. А. Попов, В. Ю. Радионов, А. М. Райгородский, М. А. Раскин, И. В. Раскина, В. И. Ретинский, М. В. Серенко, Н. П. Стрелкова, Ю. В. Тихонов, А. К. Толпыго, А. В. Устинов, Б. Р. Френкин, И. И. Фролов, А. В. Хачатурян, М. А. Хачатурян, А. В. Шаповалов, И. А. Шейпак, И. А. Эльман, А. Ю. Юран, Ю. Н. Яровиков, И. В. Ященко

6 класс

1. Тане и Ване дали одинаковые многоугольники из бумаги. Таня отрезала от своего листа кусок, и остался квадрат. Ваня отрезал точно такой же (и по форме, и по размеру) кусок по-другому, и у него остался треугольник. Нарисуйте пример, как это могло быть. (*Т. В. Казицына*)

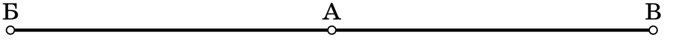
Ответ. Один из возможных примеров приведён на рисунках.



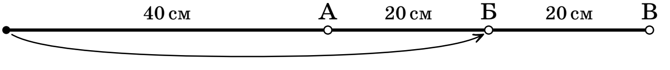
2. Три лягушки на болоте прыгнули по очереди. Каждая приземлялась точно в середину отрезка между двумя другими. Длина прыжка второй лягушки 60 см. Найдите длину прыжка третьей лягушки. (*А. В. Шаповалов*)

Ответ: 30 см.

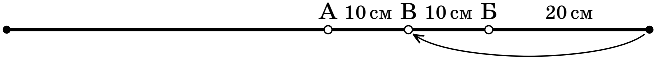
Решение. Независимо от того, как сидели лягушки вначале, после первого прыжка они будут на одной прямой, причём первая (А) посередине.



Теперь прыгает вторая лягушка (Б). Она пролетает расстояние до А и ещё половину этого расстояния, что по условию составляет 60 см. Значит, между нею и А (равно как и между А и В) было 40 см.



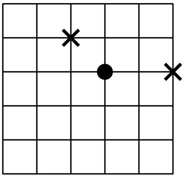
Итак, теперь между А и В 40 см, ровно посередине между ними находится Б, а очередь прыгать за В. Она пролетит 20 см и ещё половину этого расстояния, то есть всего 30 см.



3. Цифры от 0 до 9 зашифрованы буквами A, B, C, D, E, F, G, H, I, J в каком-то порядке. За один вопрос можно узнать зашифрованную запись суммы нескольких различных букв. Например, если спросить «A + B = ?», то в случае, когда A = 9, B = 1, C = 0, ответом будет «A + B = BC». Как можно за пять таких вопросов определить, какие буквы каким цифрам соответствуют? (*А. А. Заславский*)

Решение. Сумма всех десяти цифр равна 45. Поэтому, назвав все десять букв, мы узнаем, какими буквами зашифрованы цифры 4 и 5. Исключив эти буквы и спросив про сумму остальных восьми, мы узнаем, как зашифрованы цифры 3 и 6. В каждом следующем вопросе так же будем спрашивать про сумму еще не расшифрованных букв. В результате после третьего вопроса узнаем, какими буквами зашифрованы 2 и 7, после четвёртого — 1 и 8 и, наконец, после пятого узнаем, какой из оставшихся букв зашифрована цифра 9, а какой 0.

4. Лабиринт для мышей (см. рисунок) представляет собой квадрат 5×5 метров, мыши могут бегать только по дорожкам. На двух перекрёстках положили по одинаковому куску сыра (обозначены крестиками). На другом перекрёстке сидит мышка (обозначена кружочком). Она чует, где сыр, но до обоих кусочков ей нужно пробежать одинаковое расстояние. Поэтому она не знает, какой кусочек выбрать, и задумчиво сидит на месте.

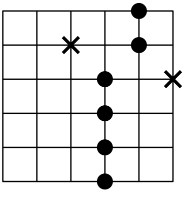


а) Отметьте ещё пять перекрёстков, где могла бы задумчиво сидеть мышка (откуда до обоих кусочков сыра ей нужно пробежать одинаковое расстояние).

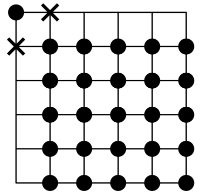
б) Придумайте, на каких двух перекрёстках можно положить по куску сыра так, чтобы подходящих для задумчивой мышки перекрёстков оказалось как можно больше.

(*Т. В. Казицына*)

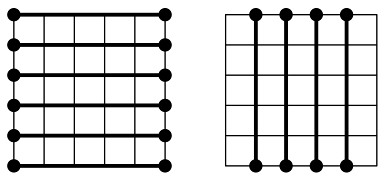
Ответ: а)



б) Максимальное число мест для задумчивых мышек равно 26:



Комментарии. 1. В любом примере для пункта б) в одном из концов каждого из следующих 10 отрезков не должно быть мышки (если заняты оба конца, то куски сыра должны располагаться на прямой, перпендикулярной этому отрезку, а значит, подходящих мест будет ровно 6).



Отсюда можно вывести и то, что больше 26 задумчивых мышек быть не может: если в одном из концов нет мышки, то у нас есть минимум 10 не отмеченных перекрёстков.

2. Сюжет задачи отсылает к известному мысленному эксперименту, наиболее ярко описанному немецким математиком и философом рубежа XVII–XVIII веков Готфридом Вильгельмом Лейбницем: «Голодный осёл, оказавшийся на одинаковом расстоянии от двух совершенно одинаковых охапок сена, умрёт с голоду, так и не выбрав, какую съесть». Этот эксперимент придуман не Лейбницем, он встречается и у других философов, рассуждавших о свободе выбора — у нидерландского философа XVII века Бенедикта Спинозы и даже у древнегреческого учёного Аристотеля в его трактате «О небе», где он иронически приведён в споре с софистами, в качестве примера абсурдного умозаключения. А самого осла обычно называют буридановым в честь французского философа XIV века Жана Буридана. Выражение «буриданов осёл» вошло в язык как обозначение нерешительного, сомневающегося, колеблющегося человека.

5. Среди 20 школьников состоялся турнир по теннису. Каждый участник проводил каждый день по одной встрече; в итоге за 19 дней каждый сыграл ровно по одному разу со всеми остальными. Теннисный корт в школе один, поэтому матчи шли по очереди. Сразу после своего первого выигрыша в турнире участник получал фирменную майку. Ничьих в теннисе не бывает. Петя стал одиннадцатым участником, получившим майку, а Вася — пятнадцатым. Петя получил свою майку в одиннадцатый день турнира. А в какой день получил майку Вася? (*Б. Р. Френкин*)

Ответ: тоже в одиннадцатый.

Решение. В первый день прошло 10 встреч, и, стало быть, было выдано 10 маек. Одиннадцатая майка была выдана лишь в одиннадцатый день турнира, то есть у Пети и ещё девяти участников в первые десять дней турнира не было ни одной победы. Это возможно только в том случае, когда эти участники (назовем их невезучими) в эти дни не играли друг с другом, то есть каждый из них сыграл с десятью остальными участниками (теми, кому в первый день досталась майка) и всем им проиграл. Но тогда в оставшиеся дни невезучие будут играть между собой. В частности, в одиннадцатый день они разобьются на пять пар, и победители этих пар получат майки с номерами с 11 по 15.

6. Шеренга солдат-новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, остальные — направо. Оказалось, что в затылок соседу смотрит в шесть раз больше солдат, чем в лицо. Затем по команде «кругом» все развернулись в противоположную сторону. Теперь в затылок соседу стали смотреть в семь раз больше солдат, чем в лицо. Сколько солдат в шеренге?

(*А. В. Шаповалов*)

Ответ: 98.

Решение. Будем считать, что сержант построил шеренгу солдат между двумя столбами. После первой команды каждый новобранец смотрит либо в затылок соседу, либо в лицо, кроме двух солдат с краю, которые могут смотреть на столбы.

Если солдат смотрит в затылок соседу, то после разворота этот сосед будет смотреть в затылок ему. Поэтому число смотрящих в затылок не поменяется.

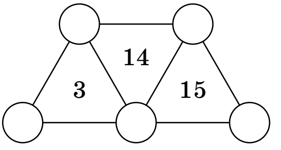
Крайний солдат, смотревший на столб, после разворота не будет этого делать; напротив, если он не смотрел на столб, то после разворота будет. Таким образом, количество смотрящих на столб либо не изменится (был 1 и останется 1), либо увеличится на 2 (было 0, станет 2), либо уменьшится на 2 (было 2, станет 0).

Так как общее число солдат постоянно, число смотрящих в лицо также либо не изменится, либо увеличится или уменьшится на 2.

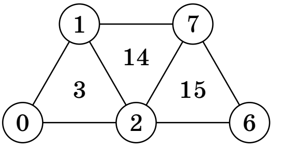
По условию, число солдат, смотрящих в лицо, сначала составляло шестую часть числа смотрящих в затылок, а потом седьмую часть. Значит, их количество уменьшилось (и, стало быть, уменьшилось на 2). С другой стороны, оно изменилось на $1/6 - 1/7 = 1/42$ от неизменного числа смотревших в затылок. То есть смотревших в затылок было $2 \cdot 42 = 84$ человека, а смотревших в лицо друг другу до разворота было $84 : 6 = 14$. Смотрящих на столбы при этом не было. Таким образом, общее число новобранцев $84 + 14 = 98$.

7 класс

1. Ваня расставил в кружках различные цифры, а внутри каждого треугольника записал либо сумму, либо произведение цифр в его вершинах. Потом он стёр цифры в кружочках. Впишите в кружочки различные цифры так, чтобы условие выполнялось. (*В. А. Клепцын*)



Ответ:



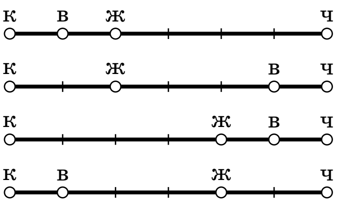
Комментарий. Найти этот ответ и заодно доказать его единственность можно так. Число 3 не может быть получено как произведение трёх различных чисел, значит, оно получено как сумма $0 + 1 + 2$. Тогда число 14 уже не может быть получено как сумма: две «общие» с числом 3 цифры в сумме дадут максимум 3, и ещё одной цифры, чтобы набрать 14, не хватит. Значит, 14 получено как произведение: $1 \cdot 2 \cdot 7$.

Тогда число 15 получено с использованием 7 и 1 или 7 и 2 — в частности, получено как сумма. Вариант 7 и 1 невозможен: третьей цифрой должна быть $15 - 1 - 7 = 7$, а она уже использована. Значит, 15 составлено как $2 + 7 + 6$.

2. Доктор Айболит хочет навестить и корову, и волчицу, и жучка, и червячка. Все четверо живут вдоль одной прямой дороги. Орлы готовы утром доставить Айболита к первому пациенту, а вечером забрать от последнего, но три промежуточных перехода ему придётся сделать пешком. Если Айболит начнёт с коровы, то длина его кратчайшего маршрута составит 6 км, если с волчицы — 7 км, а если с жучка — 8 км.

Нарисуйте, как могли располагаться домики коровы, волчицы, жучка и червячка (достаточно одного примера расположения). (*И. В. Ященко, И. В. Раскина*)

Ответ. На рисунке показаны 4 возможных варианта (на отрезке разметка по 1 км; мы рисуем схему так, что корова левее червячка):



Комментарий. Куда бы ни доставили орлы Айболита, ему нужно посетить два крайних домика. Значит, любой его маршрут не меньше, чем расстояние между ними, а маршрут с началом в одном из крайних домиков как раз равен расстоянию между крайними домиками.

То есть это расстояние является наименьшим и должно быть одинаковым для двух животных. Следовательно, оно равно 6 км, и корова и червячок живут в крайних домиках, а волчица и жучок — где-то между ними. Остаётся заметить, что поскольку маршрут Айболита с началом в домике волчицы занимает 7 км, волчица живёт в 1 км от любого из крайних домиков, а жучок, аналогично, в 2 км.

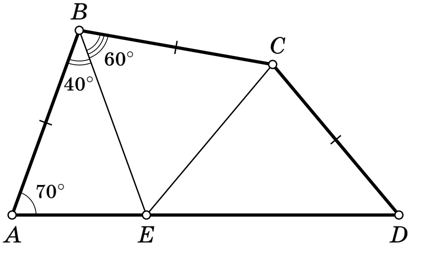
3. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4).

4. См. задачу 4 для 6 класса (с. 4).

5. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$, $\angle A = 70^\circ$ и $\angle B = 100^\circ$. Чему могут быть равны углы C и D? (*М. А. Волчкевич*)

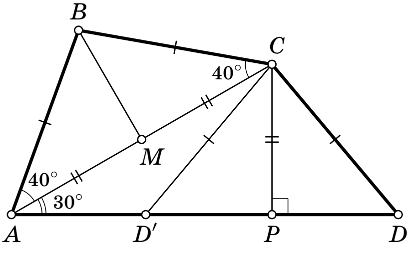
Ответ: 60° и 130° или 140° и 50°.

Решение. Первый способ. Проведём отрезок BE так, что точка E лежит на AD, а угол ABE равен 40°. Тогда $\angle AEB = 180^\circ - 70^\circ - 40^\circ = 70^\circ$, следовательно, треугольник ABE



равнобедренный, $AB=BE$. Рассмотрим треугольник BCE: $\angle CBE=100^\circ-40^\circ=60^\circ$ и $BE=AB=BC$, значит, треугольник BCE равносторонний, и $CE=BC=AB$. А это означает, что четырёхугольник $ABCE$ подходит под условие, и один из возможных ответов — угол C такого четырёхугольника равен 60°, и оставшийся угол равен $\angle AEB+\angle BEC=$ $=70^\circ+60^\circ=130^\circ$.

Заметим, что для любой точки D' на отрезке AE справедливо $CD'>CE=BC$ (так как CD' — наибольшая сторона в тупоугольном треугольнике CED'). Пусть точка D лежит на луче AE за точкой E, $CD=BC=CE$. Тогда $\angle CED=$ $=180^\circ-\angle AEB-\angle BEC=180^\circ-70^\circ-60^\circ=50^\circ$, и, поскольку $CE=CD$, $\angle CDE=\angle CED=50^\circ$, а значит, $\angle ECD=180^\circ-$ $-2\cdot 50^\circ=80^\circ$ и $\angle BCD=60^\circ+80^\circ=140^\circ$.



Второй способ. В равнобедренном треугольнике ABC угол ABC равен 100°, значит, $\angle BAC=\angle ACB=40^\circ$, и тогда $\angle CAD=70^\circ-40^\circ=30^\circ$. Отметим середину M отрезка AC и основание P перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AD. Тогда в прямоугольном треугольнике ACP против угла в 30° лежит катет CP, значит, $CP=\frac{1}{2}AC=CM$. Следовательно, прямоугольные треугольники BCM и DCP равны по катету и гипотенузе, значит, $\angle CDP=\angle MBC=$ $=50^\circ$, т.е. в зависимости от того, лежит точка P внутри отрезка AD или снаружи, либо угол ADC, либо смежный с ним равен 50°. Соответственно, в первом случае $\angle ADC=$ $=50^\circ$ и $\angle BCD=140^\circ$, а во втором случае $\angle AD'C=130^\circ$ и $\angle BCD'=60^\circ$.

6. См. задачу 6 для 6 класса (с. 6).

8 класс

1. Незнайка не знает о существовании операций умножения и возведения в степень. Однако он хорошо освоил сложение, вычитание, деление и извлечение квадратного корня, а также умеет пользоваться скобками. Упражняясь, Незнайка выбрал три числа 20, 2 и 2 и составил выражение:

$$\sqrt{(2+20):2}.$$

А может ли он, используя точно те же три числа 20, 2 и 2, составить выражение, значение которого больше 30?

(*Н. П. Стрелкова*)

Решение.

$$\frac{20}{2-\sqrt{2}} = \frac{20(2+\sqrt{2})}{2} = 20 + 10\sqrt{2} > 20 + 10.$$

Есть и другие решения.

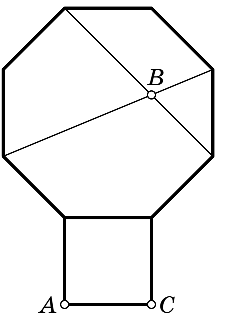
2. Найдите наибольшее натуральное n, обладающее следующим свойством: для любого простого нечетного p, меньшего n, разность $n-p$ также является простым числом.

(*И. Ф. Акулич*)

Ответ: 10.

Решение. Действительно, $10 = 3 + 7 = 5 + 5$. Докажем, что числа, большие 10, не годятся. Пусть n — число, большее 10. Заметим, что числа 3, 5, 7 дают разные остатки при делении на 3. Тогда числа $n-3$, $n-5$, $n-7$ дают разные остатки при делении на 3, значит, одно из них делится на 3. Осталось заметить, что это число больше, чем 3, поэтому оно составное. Противоречие.

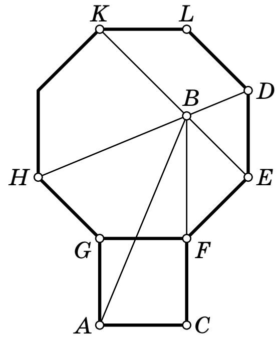
3. На стороне правильного восьмиугольника во внешнюю сторону построен квадрат. В восьмиугольнике проведены две диагонали, пересекающиеся в точке B (см. рисунок). Найдите величину угла ABC. (*К. А. Кноп*)



Примечание. Многоугольник называется правильным, если все его стороны равны и все его углы равны.

Ответ: $22{,}5^\circ$.

Решение. Заметим, во-первых, что угол правильного восьмиугольника равен $6 \cdot 180°/8 = 135°$. Обозначим вершины восьмиугольника так, как на рисунке. Заметим, что $KLDE$ — равнобокая трапеция, поэтому угол BED равен $45°$, а угол FEB равен $135° - 45° = 90°$. Далее, HD — ось симметрии восьмиугольника, поэтому угол HDE равен $135°/2 = 67{,}5°$. Отсюда получается, что в треугольнике BDE углы B и D равны, а значит, $EB = ED = EF = FC$. Треугольники BEF и FCA равны по двум катетам, значит, $BF = FA$. Далее, угол F равнобедренного прямоугольного треугольника BEF равен $45°$, поэтому угол GFB прямой. Отсюда точки C, F, B лежат на одной прямой. Угол AFB равен сумме углов AFG и GFB, то есть $135°$. Теперь заметим, что сумма равных углов FBA и FAB равна $45°$, значит, угол ABC равен $45°/2 = 22{,}5°$.



4. У входа на рынок есть двухчашечные весы без гирек, которыми каждый может воспользоваться по 2 раза в день. У торговца Александра есть 3 неотличимые внешне монеты весом 9, 10 и 11 грамм.

— Как жаль, что я не могу за 2 взвешивания разобраться, какая из моих монет сколько весит!

— Да! — поддакнул его сосед Борис. — У меня совершенно та же ситуация — тоже 3 неотличимые на вид монеты весом 9, 10 и 11 грамм!

Докажите, что если они объединят усилия, то за отведённые им 4 взвешивания определят веса всех шести монет.

(*Н. Ю. Медведь*)

Решение. Обозначим монеты торговцев A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 соответственно и отождествим названия монет с их весами. Первыми двумя взвешивания взвесим A_1 с B_1 и A_2 с B_2.

1) Для начала рассмотрим случай двух равенств: $A_1 = B_1$ и $A_2 = B_2$. В этом случае также $A_3 = B_3$. Тогда взвесим A_1 и A_2 с A_3 и B_3. Возможны только три случая: $9 + 10 < 11 + 11$, $9 + 11 = 10 + 10$ и $10 + 11 > 9 + 9$. Таким образом мы одно-

значно определяем вес монет A_3 и B_3, а также веса $A_1=B_1$ и $A_2=B_2$ с точностью до порядка. Тогда последним взвешиванием достаточно взвесить A_1 и A_2 между собой.

В остальных случаях взвесим также A_3 и B_3 между собой. Без ограничения общности (с точностью до переименования монет) возможны еще два случая.

2) $A_1<B_1$, $A_2<B_2$, $A_3>B_3$. В этом случае монеты A_1 и A_2 не могут весить 11 граммов, значит, они весят 9 и 10 граммов, а монета A_3 — 11 граммов. Аналогично монеты B_1 и B_2 весят 10 и 11 граммов, а монета B_3 — 9 граммов. При этом первые два неравенства — это $9<10$ и $10<11$ с точностью до порядка. Поэтому последним взвешиванием взвесим A_1 и A_2 между собой и определим веса всех монет.

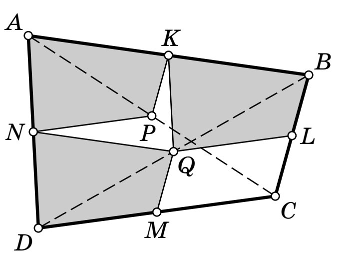
3) $A_1<B_1$, $A_2>B_2$, $A_3=B_3$. Заметим, что в этом случае $A_1=B_2$ и $A_2=B_1$. Тогда по аналогии с первым случаем взвесим A_1 и A_2 с A_3 и B_3, в результате определим вес монет A_3 и B_3 а также веса $A_1=B_2$ и $A_2=B_1$ с точностью до порядка. Но в этом случае нам уже известно, что $A_1=B_2<A_2=B_1$, поэтому и эти веса определяются однозначно.

Другие случаи невозможны, так как суммы весов монет A и монет B равны.

5. Верно ли, что из любого выпуклого четырехугольника можно вырезать три уменьшенные вдвое копии этого четырехугольника? (*А. Ю. Юран*)

Ответ: да, верно.

Решение. Докажем, что можно выбрать такой угол четырёхугольника, что сумма его с каждым из соседних углов не превосходит развёрнутого угла. Действительно, сумма каких-то двух соседних углов не превосходит 180°. Пусть это углы A и D. Тогда, если $\angle A+\angle B\leqslant 180^\circ$, то мы получили нужное, а если $\angle A+\angle B>180^\circ$, то $\angle C+\angle D<180^\circ$,



и нам подходят углы A, D, C. В итоге можно так назвать вершины четырёхугольника A, B, C, D, что $\angle A+\angle B\leqslant 180^\circ$, $\angle A+\angle D\leqslant 180^\circ$. Пусть K, L, M, N — середины отрезков AB, BC, CD, DA соответственно, P, Q — середины диагоналей AC и BD соответственно. Четырёхугольники $AKPN$, $KBLQ$, $NQMD$ — искомые копии. Докажем, что они не перекрываются. Действительно, $\angle AKP+\angle QKB=\angle A+\angle B\leqslant 180^\circ$, $\angle DNQ+\angle ANP\leqslant 180^\circ$.

6. По доске $n\times n$ прошла ладья, побывав в каждой клетке один раз, причем каждый её ход был ровно на одну клетку. Клетки занумерованы от 1 до n^2 в порядке прохождения ладьи. Пусть M — максимальная разность между номерами соседних (по стороне) клеток. Каково наименьшее возможное значение M? (*Б. Р. Френкин*)

Ответ: $2n-1$.

Решение. Пример: обходим доску «змейкой», начиная из нижнего левого угла: вправо до конца, на 1 вверх, влево до конца, на 1 вверх, ...

Оценка. Предположим противное: $M<2n-1$. Рассмотрим числа верхней строки. Поскольку разность между любыми соседними числами в этой строке не больше $2n-2$, то ладья дошла от меньшего из них к большему, не заходя в нижнюю строку (ведь чтобы достичь её, надо сделать минимум $n-1$ ход, и чтобы вернуться — тоже минимум $n-1$ ход, плюс ещё один ход делается собственно в нижней строке). Тогда все числа в верхней строке ладья обошла, не заходя в нижнюю строку. Аналогично, все числа в нижней строке ладья обошла, не заходя в верхнюю строку. Это значит, что все числа верхней строки больше (или все меньше), чем числа в нижней строке. Аналогично, все числа в левом столбце больше (или все меньше) чисел правого столбца. Не теряя общности, можем считать, что числа в левом столбце больше чисел правого, а числа нижней строки больше чисел верхней. Рассмотрим два числа — в левом верхнем углу (число A) и в правом нижнем (число B). С одной стороны, $A>B$ (по столбцам), с другой стороны, $A<B$ (по строкам). Противоречие.

9 класс

1. У каждого из девяти натуральных чисел n, $2n$, $3n$, ..., $9n$ выписали первую слева цифру. Может ли при некотором натуральном n среди девяти выписанных цифр быть не более четырёх различных? (*А. К. Толпыго*)

Ответ: да, может.

Решение. Например, подходит $n=25$. Для этого значения n получим числа

$$25,\ 50,\ 75,\ 100,\ 125,\ 150,\ 175,\ 200,\ 225.$$

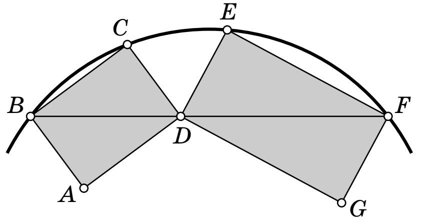
Каждое из них начинается на одну из четырёх цифр 1, 2, 5, 7.

Комментарий. Можно доказать, что меньше четырёх различных цифр получиться не могло. Ровно четыре различные цифры получается для натуральных чисел из интервалов вида

$$[25\underbrace{0\ldots0}_{k-1},\ 2\underbrace{9\ldots9}_{k}] \quad \text{и} \quad [3\underbrace{3\ldots3}_{k-1}4,\ 3\underbrace{9\ldots9}_{k}],$$

где k — произвольное натуральное число.

2. Прямоугольники $ABCD$ и $DEFG$ расположены так, что точка D лежит на отрезке BF, а точки B, C, E, F лежат на одной окружности (см. рисунок). Докажите, что $\angle ACE = \angle CEG$. (*Е. В. Бакаев*)

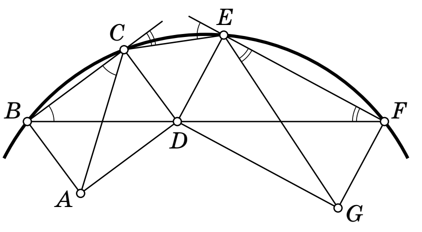


Решение. Так как точки B, C, E, F лежат на одной окружности, то

$$\angle ACE = \angle BCE - \angle ACB = (180^\circ - \angle BFE) - \angle ACB = \\ = 180^\circ - \angle DFE - \angle ACB. \quad (1)$$

Аналогично

$$\angle CEG = \angle CEF - \angle FEG = (180^\circ - \angle CBF) - \angle FEG = \\ = 180^\circ - \angle CBD - \angle FEG. \quad (2)$$



Поскольку $ABCD$ и $DEFG$ — прямоугольники, то $\angle ACB = \angle CBD$ и $\angle DFE = \angle FEG$. Тогда выражения в левых частях равенств (1) и (2) равны, поэтому $\angle ACE = \angle CEG$.

3. Коллекция Саши состоит из монет и наклеек, причём монет меньше, чем наклеек, но хотя бы одна есть. Саша выбрал некоторое положительное число $t > 1$ (не обязательно целое). Если он увеличит количество монет в t раз, а количество наклеек оставит тем же, то в его коллекции будет 100 предметов. Если же вместо этого он увеличит количество наклеек в t раз, а количество монет оставит тем же, то у него будет 101 предмет. Сколько наклеек могло быть у Саши? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет. (*А. И. Галочкин*)

Ответ: 34 или 66 наклеек.

Решение. Обозначим через m количество монет, а через n — количество наклеек. Тогда условие можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} mt + n = 100, \\ m + nt = 101. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$1 = 101 - 100 = (m + nt) - (mt + n) = (n - m)(t - 1).$$

Следовательно, $t = 1 + \frac{1}{n - m}$. Теперь сложим два изначальных уравнения:

$$201 = 101 + 100 = (mt + n) + (m + nt) = (m + n)(t + 1).$$

Следовательно, $t = \frac{201}{m + n} - 1$. Введём обозначения $a = n - m$, $b = n + m$. Отметим, что $a > 0$, поскольку $n > m$. Приравняем два выражения для t:

$$1 + \frac{1}{n - m} = \frac{201}{m + n} - 1 \iff 1 + \frac{1}{a} = \frac{201}{b} - 1 \iff \frac{2a + 1}{a} = \frac{201}{b}.$$

Заметим, что числа $2a+1$ и a взаимно просты, поэтому дробь $\frac{2a+1}{a}$ несократима. Значит, 201 делится на $2a+1$. У числа $201=3\cdot 67$ всего четыре делителя: 1, 3, 67 и 201. Так как $2a+1>1$, нужно разобрать три случая.

1) $2a+1=3$. Тогда $a=1$ и $\frac{201}{b}=\frac{3}{1}$. Значит, $b=67$, откуда

$$m=\frac{1}{2}(b-a)=33, \quad n=\frac{1}{2}(a+b)=34.$$

Также $t=2$. Несложно проверить, что этот случай подходит.

2) $2a+1=67$. Тогда $a=33$ и $\frac{201}{b}=\frac{67}{33}$. Значит, $b=99$, откуда

$$m=\frac{1}{2}(b-a)=33, \quad n=\frac{1}{2}(a+b)=66.$$

Также $t=\frac{34}{33}$. Несложно проверить, что этот случай подходит.

3) $2a+1=201$. Тогда $a=100$ и $\frac{201}{b}=\frac{201}{100}$. Значит, $b=100$, откуда

$$m=\frac{1}{2}(b-a)=0, \quad n=\frac{1}{2}(a+b)=100.$$

Этот случай не подходит, так как должна быть хотя бы одна монета.

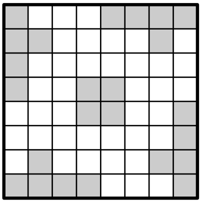
4. Некоторые клетки доски 100×100 покрашены в чёрный цвет. Во всех строках и столбцах, где есть чёрные клетки, их количество нечётно. В каждой строке, где есть чёрные клетки, поставим красную фишку в среднюю по счёту чёрную клетку. В каждом столбце, где есть чёрные клетки, поставим синюю фишку в среднюю по счёту чёрную клетку. Оказалось, что все красные фишки стоят в разных столбцах, а синие фишки — в разных строках. Докажите, что найдётся клетка, в которой стоят и синяя, и красная фишки. (*Б. Р. Френкин*)

Решение. Удалим из доски все строки и столбцы, в которых нет чёрных клеток. Заметим, что после этого условие задачи продолжит выполняться. Теперь все чёрные клетки лежат внутри некоторого прямоугольника $n\times m$, в каждой строке и в каждом столбце которого есть хотя бы одна чёрная клетка.

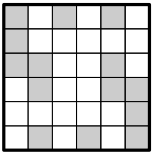
По условию в каждой из n строк стоит ровно одна красная фишка. Тогда всего красных фишек n. Но эти n красных фишек должны находиться в разных столбцах, а значит, $m \geqslant n$. Аналогично, рассматривая синие фишки, приходим к выводу, что $n \geqslant m$. Таким образом, $n = m$. Раз красных фишек и столбцов поровну и красные фишки находятся в разных столбцах, то в каждом столбце есть ровно одна красная фишка. Аналогично в каждой строке есть ровно одна синяя фишка.

Рассмотрим верхнюю строку, в ней есть синяя фишка. Рассмотрим столбец с этой синей фишкой. В этом столбце синяя фишка стоит в самой верхней клетке. Получается, что самая верхняя клетка этого столбца оказалась средней по счёту чёрной клеткой в этом столбце. Такое возможно лишь в случае, когда в столбце только одна чёрная клетка.

Ранее доказано, что в любом столбце должна быть ровно одна красная фишка. Рассматривая найденный столбец с единственной чёрной клеткой, приходим к выводу, что красная фишка должна быть в этой клетке. Но в этой клетке уже есть синяя фишка. Таким образом, искомая клетка найдена.

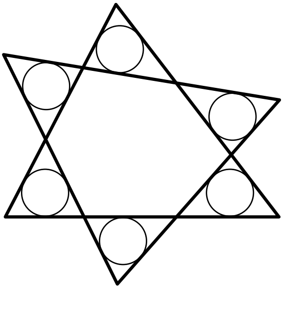


Комментарий. Описанные в задаче конструкции существуют, причём не обязательно в каждой строке и в каждом столбце находится ровно одна чёрная клетка. Возможные примеры изображены на рисунке.



5. Два треугольника пересекаются по шестиугольнику, который отсекает от них 6 маленьких треугольников. Радиусы вписанных окружностей этих шести треугольников равны. Докажите, что радиусы вписанных окружностей двух исходных треугольников также равны.

(*А. Ю. Кушнир*)



Решение. Обозначим радиусы шести равных окружностей через r, а их центры — через A, B, C, D, E, F в порядке обхода против часовой стрелки. Рассмотрим треугольник ACE. Заметим, что если рассмотреть окружность, вписанную в исходный треугольник, содержащий треугольник ACE, а затем уменьшить её радиус на r, оставив центр тем же, то получится окружность, вписанная в треугольник ACE (см. рис. 1). Аналогично радиус окружности, вписанной в треугольник BDF, на r меньше, чем радиус окружности, вписанной в исходный треугольник, содержащий BDF. Таким образом, утверждение задачи эквивалентно равенству радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACE и BDF.

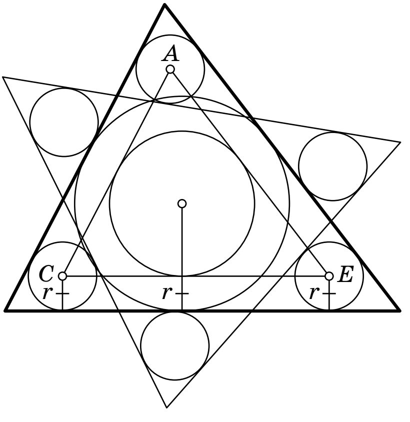


Рис. 1

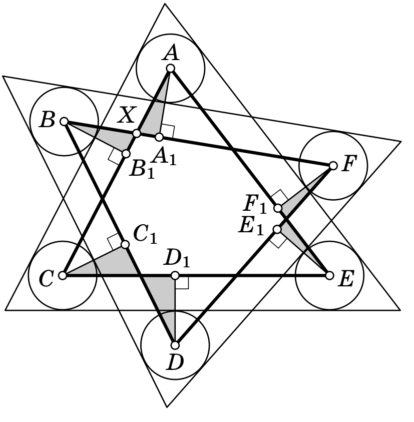


Рис. 2

Опустим перпендикуляры из A на BF, из B на AC и т. д. Обозначим их основания через A_1, B_1, ..., а точку пересечения отрезков AB_1 и A_1B — через X. Несложно видеть, что длины отрезков AA_1, BB_1, ... равны $2r$. Рассмотрим четырёхугольник AA_1B_1B. Он вписанный, поскольку $\angle AA_1B = \angle AB_1B$, а так как $AA_1 = BB_1$, то он является равнобокой трапецией с основаниями AB и A_1B_1. Следовательно, $\triangle AXA_1 = \triangle BXB_1$ и $AB_1 = A_1B$. Рассматривая трапеции BB_1C_1C, CC_1D_1D, ..., получаем аналогичные равенства треугольников и отрезков (см. рис. 2; на нём закрашены три пары равных треугольников из шести).

Несложно видеть, что периметры треугольников ACE и BDF равны:

$$P_{ACE} = AB_1 + B_1C + CD_1 + D_1E + EF_1 + F_1A = \\ = A_1B + BC_1 + C_1D + DE_1 + E_1F + FA_1 = P_{BDF}.$$

Также равны площади треугольников ACE и BDF, поскольку при вырезании из них общего шестиугольника остаётся по шесть прямоугольных треугольников, разбивающихся на пары равных.

Поскольку площадь треугольника равна произведению радиуса окружности, вписанной в треугольник, и полупериметра, то из равенства площадей и равенства периметров двух треугольников следует равенство радиусов вписанных в них окружностей.

Комментарий. Существуют весьма несимметричные примеры конструкции, описанной в задаче, вроде того, что изображён на рис. 3. В частности, нельзя утверждать ни что исходные треугольники равны между собой, ни что вписанные в них окружности совпадают (т. е. что шестиугольник пересечения описанный).

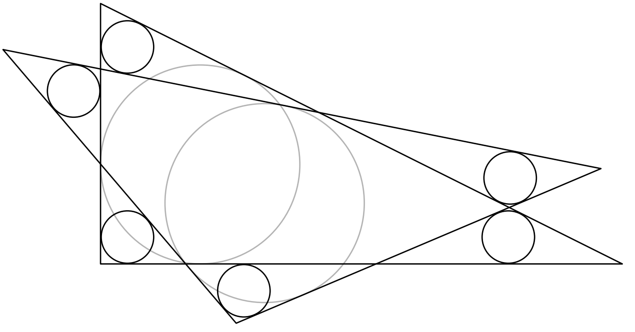


Рис. 3

6. Даны выпуклый многоугольник M и простое число p. Оказалось, что существует ровно p способов разбить M на равносторонние треугольники со стороной 1 и квадраты со стороной 1. Докажите, что длина одной из сторон многоугольника M равна $p-1$. (*Н. Белухов*)

Решение. Назовём *каёмкой* разбиения квадраты и треугольники, имеющие хотя бы одну общую точку с грани-

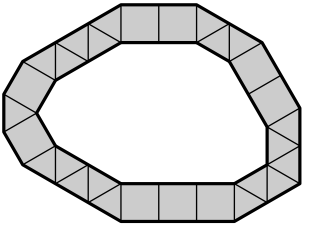


Рис. 4. Многоугольник и его каёмка

цей многоугольника M. Обозначим через M_1 многоугольник, полученный из M отбрасыванием каёмки. Сделаем несколько наблюдений о каёмке.

1) Рассмотрим какой-нибудь угол многоугольника M. Поскольку он покрывается одним или несколькими углами правильных треугольников и квадратов, то он может быть равен 60°, 90°, 120°, 150°. Отсюда каждый внешний угол многоугольника не меньше 30°. Но сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°. Поэтому у многоугольника M не более 12 углов, причём их может быть 12 только в случае, если все углы M равны 150°.

2) Рассмотрим квадрат или треугольник каёмки, примыкающий к углу, сторона которого лежит на стороне многоугольника. Если это квадрат (см. рис. 5), то несложно видеть, что все оставшиеся фигуры разбиения, которые примыкают к этой стороне, — тоже квадраты, потому что образующиеся углы 90° можно замостить только квадратом (см. рис. 6).

Рис. 5

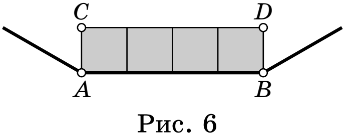


Рис. 6

Если это треугольник (см. рис. 7), то несложно видеть, что все оставшиеся фигуры разбиения, которые примыка-

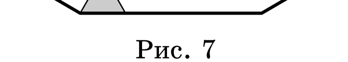


Рис. 7

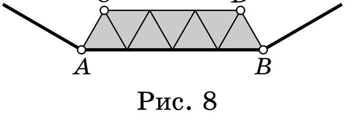


Рис. 8

ют к этой стороне, — тоже треугольники, потому что образующиеся углы 120° можно замостить только двумя треугольниками (см. рис. 8). Таким образом, к каждой стороне многоугольника M примыкают либо только квадраты, либо только треугольники.

3) Из предыдущего пункта следует, что стороны M_1 будут параллельны соответствующим сторонам M (стороны AB и CD на рисунках). Если у M нет углов по 60° или 90°, то длины сторон M_1 будут либо равны соответствующим длинам сторон M (в случае квадратов), либо на 1 меньше (в случае треугольников). При этом длина стороны может стать равной 0. То есть M_1 — выпуклый многоугольник, у которого сторон не больше, чем у M.

Назовём *характеристикой* многоугольника M набор чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$, построенный следующим образом. Если M — 12-угольник, то это длины сторон M, перечисленные в порядке обхода против часовой стрелки. Если у M меньше 12 сторон, то не все его углы равны 150°. Мысленно добавим несколько сторон нулевой длины: если есть угол 120°, то добавим в соответствующую вершину сторону нулевой длины, если есть угол 90°, то добавим в соответствующую вершину две последовательные стороны нулевой длины, если есть угол 60° — три последовательные стороны нулевой длины. Несложно проверить, что в итоге получится 12 сторон, некоторые из которых равны 0. Стороны $a_1, a_3, \ldots, a_{11}$ будем называть *нечётными*, а стороны $a_2, a_4, \ldots, a_{12}$ — *чётными*.

Многоугольнику M_1 можно поставить в соответствие набор, построенный по тем же правилам, так, чтобы нумерации сторон в M и M_1 соответствовали друг другу. Посмотрим, как могут быть связаны характеристики M и M_1.

1) Пусть длины сторон M отличны от нуля. Тогда все углы M равны 150°. Заметим, что существует два варианта расположить квадрат и треугольник, примыкающие к углу 150° (см. рис. 9).

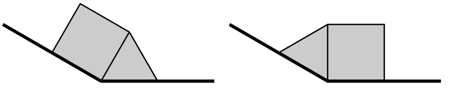


Рис. 9

При выборе одного из вариантов остальная каёмка восстанавливается однозначно. Действительно, сначала восстанавливается часть каёмки, примыкающая к сторонам угла, затем разбиения двух соседних углов и т. д.

Итого получается два варианта каёмки: равносторонние треугольники расположены вдоль всех нечётных сторон, а квадраты — вдоль всех чётных; или наоборот. В первом варианте характеристикой M_1 будет набор $(a_1-1, a_2, a_3-1, a_4, \ldots, a_{11}-1, a_{12})$, а во втором — набор $(a_1, a_2-1, a_3, a_4-1, \ldots, a_{11}, a_{12}-1)$.

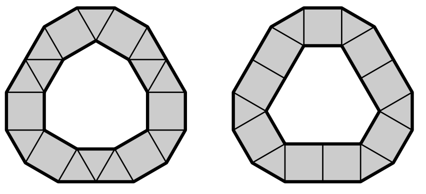


Рис. 10. Два варианта каёмки

2) Пусть по крайней мере одна нечётная сторона M равна нулю, а все чётные стороны отличны от нуля. Рассмотрим i такое, что $a_i=0$. Тогда угол при соответствующей вершине в многоугольнике M будет равен 120° (поскольку a_{i-1} и a_{i+1} не равны 0), то есть его единственным образом можно разбить на два равносторонних треугольника. Далее каёмка восстанавливается однозначно. Действительно, достаточно возле всех сторон с нечётными номерами и ненулевой длиной разместить равносторонние треугольники, а возле сторон с чётными номерами и ненулевой длиной — квадраты. Получаем, что характеристика M_1 будет равна $(a_1, a_2-1, a_3, a_4-1, \ldots, a_{11}, a_{12}-1)$.

3) Пусть по крайней мере одна чётная сторона M равна нулю, а все нечётные стороны отличны от нуля. Аналогично получаем, что характеристика M_1 будет равна $(a_1-1, a_2, a_3-1, a_4, \ldots, a_{11}-1, a_{12})$.

4) Пусть по крайней мере одна чётная и одна нечётная стороны M равны нулю. Поскольку все ненулевые стороны M_1 параллельны соответствующим сторонам M и имеют такую же или меньшую длину, то по крайней мере одна чётная и одна нечётная стороны M_1 равны нулю.

Отметим, что если по крайней мере одна чётная и одна нечётная стороны M равны нулю, то существует не более одного способа разбить M нужным образом. Действительно, тогда у M найдётся угол, меньший 150°, разбиение которого восстанавливается однозначно. Далее каёмка восстанавливается не более чем одним способом. У многоугольника, полученного отбрасыванием каёмки, каёмка снова восстанавливается не более чем одним способом и т. д.

Обозначим $x=\min\{a_1, a_3, \ldots, a_{11}\}$, $y=\min\{a_2, a_4, \ldots, a_{12}\}$. Одно из чисел x или y отлично от нуля, иначе M можно разбить не более чем одним способом. Выделим у многоугольника M каёмку, уменьшающую либо чётные, либо нечётные стороны M (если одно из чисел x или y равно 0, то каёмку можно выбрать единственным способом). Уберём каёмку, останется многоугольник M_1. Выделим какую-нибудь каёмку многоугольника M_1, уберём её и обозначим оставшийся многоугольник через M_2. Будем продолжать так до тех пор, пока хотя бы одна чётная и хотя бы одна нечётная стороны не станут равны нулю. В этот момент характеристика многоугольника будет равна $(a_1-x,\ a_2-y,\ a_3-x,\ a_4-y,\ \ldots,\ a_{11}-x,\ a_{12}-y)$.

Оставшийся многоугольник M_{x+y} не зависит от того, какие именно каёмки были выбраны на предыдущих шагах, поскольку характеристика задаёт не более чем один многоугольник. Поэтому если M_{x+y} нельзя разбить на правильные треугольники и квадраты, то и для M не существует соответствующего разбиения. Следовательно, M_{x+y} можно разбить единственным образом, то есть количество разбиений M равно количеству способов уменьшить оба числа x и y до 0, то есть C_{x+y}^{y}.

По условию задачи $C_{x+y}^{y}=p$, где p — простое число. Докажем, что это может быть только в случае $x+y=p$ и $y=1$. Заметим, что $x+y\geqslant p$, поскольку иначе C_{x+y}^{y} не может делиться на p. Также x и y отличны от нуля, так как иначе $C_{x+y}^{y}=1$. Тогда

$$C_{x+y}^{y}\geqslant C_{x+y}^{1}=x+y\geqslant p.$$

Нетрудно видеть, что равенство достигается только при $x=1$, $y=p-1$ либо наоборот. В обоих случаях одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ равно $p-1$, что и требовалось доказать.

10 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса (с. 11).

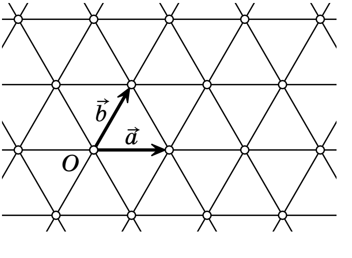
2. Точки M и N — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Касательная ℓ к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает прямую BC в точке K. Докажите, что описанная окружность треугольника MKN касается ℓ. (*Д. Ю. Бродский*)

Решение. По свойству касательной к описанной окружности имеем $\angle BAK = \angle ACK$. Следовательно, треугольники BAK и ACK подобны по двум углам. Поскольку KM и KN — соответствующие медианы в этих подобных треугольниках, имеем $\angle AKM = \angle CKN$. Наконец, поскольку $MN \parallel KC$, имеем $\angle CKN = \angle MNK$. Итак, $\angle AKM = \angle MNK$, и по свойству касательной к описанной окружности получаем, что описанная окружность треугольника MKN касается ℓ, что и требовалось доказать.

3. Среди любых пяти узлов обычной клетчатой бумаги обязательно найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел клетчатой бумаги. А какое минимальное количество узлов сетки из правильных шестиугольников необходимо взять, чтобы среди них обязательно нашлось два, середина отрезка между которыми — тоже узел этой сетки? (*А. К. Кулыгин*)

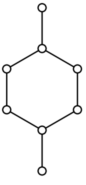
Ответ: 9.

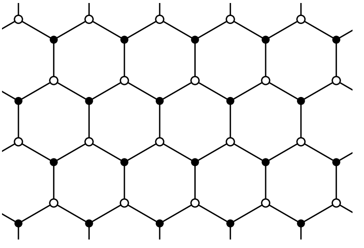
Лемма. Среди любых пяти узлов сетки из правильных треугольников найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел сетки.



Доказательство. Введём начало отсчёта в одном из узлов сетки и обозначим за $\vec{a}$ и $\vec{b}$ радиус-векторы к двум ближайшим узлам, как на рисунке. Тогда узлы сетки суть точки вида $m\vec{a} + n\vec{b}$ для целых m и n. По принципу Дирихле из пяти точек найдутся две точки $m_1\vec{a} + n_1\vec{b}$ и $m_2\vec{a} + n_2\vec{b}$, у которых одновременно совпадает чётность m_1 и m_2 и чётность n_1 и n_2. Середина отрезка, соединяющего эти две точки, есть точка $\frac{m_1+m_2}{2}\vec{a}+\frac{n_1+n_2}{2}\vec{b}$. Она является узлом сетки, так как числа $\frac{m_1+m_2}{2}$ и $\frac{n_1+n_2}{2}$ являются целыми в силу одинаковой чётности m_1 и m_2, n_1 и n_2. $\square$

Решение. На рисунке слева можно увидеть пример расположения 8 узлов сетки, среди которых нет двух, середина отрезка между которыми — узел сетки. Докажем, что девяти узлов достаточно. Заметим, что шестиугольная сетка разбивается в объединение двух треугольных (см. рисунок справа). По принципу Дирихле среди любых девяти узлов по крайней мере пять окажутся в одной из этих двух треугольных сеток. По лемме среди этих пяти узлов найдутся два искомых.





Комментарий. Треугольная сетка из леммы является сеткой из равных параллелограммов, если стереть «лишние» линии. А утверждение про квадратную сетку из условия задачи также справедливо для любой сетки из равных параллелограммов. Таким образом, в условии задачи присутствовала в каком-то смысле подсказка.

4. Дан многочлен степени 2022 с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1. Какое наибольшее число корней он может иметь на интервале (0; 1)?

(*А. Я. Канель-Белов*)

Ответ: 2021.

Решение. Все 2022 корня многочлена лежать на интервале (0; 1) не могут. Действительно, в противном случае свободный член многочлена, равный по теореме Виета произведению корней, лежит на интервале (0; 1) и не может быть целым.

Докажем, что в качестве примера многочлена с 2021 корнем на интервале (0; 1) подойдёт многочлен

$$P(x)=x^{2022}+(1-4042x)(3-4042x)\ldots(4041-4042x).$$

Заметим, что при всех $k = 0, 1, \ldots, 2021$ число

$$P\left(\frac{2k}{4042}\right) = \left(\frac{2k}{4042}\right)^{2022} + (-1)^k (2k-1)!!(4041-2k)!!$$

является положительным при чётном k и является отрицательным при нечётном k. Таким образом, на интервале $(0; 1)$ многочлен $P(x)$ меняет знак по крайней мере 2021 раз и, следовательно, имеет хотя бы 2021 корень.

См. также решение задачи 5 для 11 класса (первый день, с. 33).

5. См. задачу 5 для 9 класса (с. 18).

6. Андрей Михайлович выписал на доску все возможные последовательности длины 2022, состоящие из 1011 нулей и 1011 единиц. Назовём две последовательности *совместимыми*, если они совпадают ровно в 4 позициях. Докажите, что Андрей Михайлович может разбить все последовательности на 20 групп так, чтобы никакие две совместимые последовательности не попали в одну группу.

(*А. М. Райгородский*)

Решение. Понятно, что совместимые последовательности в двух позициях совпадают по единицам, а в двух — по нулям. Рассмотрим первые пять позиций. Существует $C_5^3 = 10$ способов поставить три единицы на эти пять позиций. Для каждого из этих десяти способов Андрей Михайлович выделяет группу написанных на доске последовательностей, первые три единицы которых стоят на соответствующих трёх позициях. Таким образом, Андрей Михайлович разбивает на десять групп все написанные на доске последовательности, у которых на первых пяти позициях встречаются хотя бы три единицы. Кроме того, любые две последовательности из одной группы совпадают по единицам хотя бы в трёх позициях, следовательно, не являются совместимыми. Аналогично Андрей Михайлович разбивает на десять групп все написанные на доске последовательности, у которых на первых пяти позициях встречаются хотя бы три нуля. А поскольку у каждой последовательности на первых пяти позициях встречаются или три нуля, или три единицы, Андрей Михайлович разбил все последовательности на 20 групп.

1.[1] В коллекции Алика есть два типа предметов: значки и браслеты. Значков больше, чем браслетов. Алик заметил, что если он увеличит количество браслетов в некоторое (не обязательно целое) число раз, не изменив количества значков, то в его коллекции будет 100 предметов. А если, наоборот, он увеличит в это же число раз первоначальное количество значков, оставив прежним количество браслетов, то у него будет 101 предмет. Сколько значков и сколько браслетов могло быть в коллекции Алика?

(*А. И. Галочкин*)

Ответ: 34 значка и 33 браслета либо 66 значков и 33 браслета.

Решение. Пусть у Алика x значков и y браслетов, а увеличение происходит в n раз. Тогда получаем систему

$$x + ny = 100, \quad nx + y = 101.$$

Складывая эти уравнения и вычитая первое из второго, приводим систему к виду

$$(n+1)(x+y) = 201, \quad (n-1)(x-y) = 1.$$

Исключая n, получаем

$$\frac{201}{x+y} - \frac{1}{x-y} = 2.$$

Это уравнение преобразуем к виду

$$(201 - 2u)(2v + 1) = 201 = 3 \cdot 67,$$

где $u = x + y$, $v = x - y$ — натуральные числа.

Случай $201 - 2u = 201$, $2v + 1 = 1$ противоречит условию, что значков больше, чем браслетов. Если же $201 - 2u = 1$, $2v + 1 = 201$, то $x = 100$, $y = 0$, что невозможно, поскольку по условию в коллекции присутствуют предметы обоих типов. Поэтому возможны два случая:

1) $2v + 1 = 3$, $201 - 2u = 67$, тогда $x = 34$, $y = 33$, $n = 2$;

2) $2v + 1 = 67$, $201 - 2u = 3$, тогда $x = 66$, $y = 33$, $n = \frac{34}{33}$.

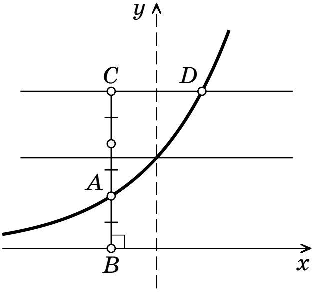
---

[1] См. также задачу 3 для 9 класса (с. 16), отличающуюся только формулировкой.

2. В декартовой системе координат (с одинаковым масштабом по осям x и y) нарисовали график показательной функции $y=3^x$. Затем ось y и все отметки на оси x стёрли. Остались лишь график функции и ось x без масштаба и отметки 0. Каким образом с помощью циркуля и линейки можно восстановить ось y? (*М. А. Евдокимов*)

Решение. Будем использовать стандартные построения циркулем и линейкой, изучаемые в школе: построение перпендикуляра к данной прямой из данной точки, а также построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.

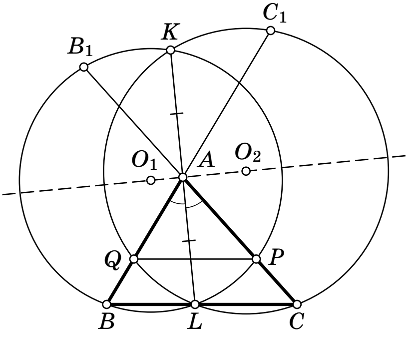
Отметим на графике произвольную точку A и построим перпендикуляр AB к оси x (см. рис.). На продолжении отрезка BA за точку A отметим такую точку C, что $AC=2AB$. Далее построим прямую, проходящую через точку C параллельно оси x, и обозначим через D точку её пересечения с графиком. Тогда длина отрезка CD равна 1. Действительно, если A имеет координаты $(x_0,\ 3^{x_0})$, то ордината точки D равна $3\cdot 3^{x_0}=3^{x_0+1}$, поэтому её абсцисса равна x_0+1.



Отметим теперь на луче BA точку на расстоянии $CD=1$ от точки B и проведём через неё прямую, параллельную оси x. Она пересечёт график в точке $(0,\ 1)$, т. е. в той же точке, что и ось y. Для завершения построения остаётся провести через эту точку прямую, перпендикулярную оси x, — это и будет искомая ось y.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AL. На продолжении отрезка LA за точку A выбрана точка K так, что $AK=AL$. Описанные окружности треугольников BLK и CLK пересекают отрезки AC и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые PQ и BC параллельны. (*Д. Ю. Бродский*)

Решение. Первый способ. Рассмотрим отрезок KL, он является общей хордой окружностей, описанных около треугольников BLK и CLK. Точка A — середина KL, поэтому она лежит на линии центров O_1O_2 этих окружностей. Продлим BA и CA до пересечения с окружностями в точках C_1 и B_1, соответственно. В силу симметрии получившейся конструкции относительно прямой O_1O_2 отрезки AB и AC равны отрезкам AB_1 и AC_1 соответственно. Введём следующие обозначения: $BL = m$, $CL = n$, $BA = AB_1 = c$, $CA = AC_1 = b$, $AQ = x$, $AP = y$. По свойству секущей $m(m+n) = BL \cdot BC = BQ \cdot BC_1 = (BA - QA) \cdot BC_1 = (c-x)(b+c)$. Аналогично, для секущих CB и CB_1 получаем $n(m+n) = (b-y)(b+c)$. Разделив одно равенство на другое, получим $\frac{m}{n} = \frac{c-x}{b-y}$. По свойству биссектрисы AL треугольника ABC получаем $\frac{m}{n} = \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$. Отсюда $\frac{c}{b} = \frac{c-x}{b-y}$, или $c(b-y) = b(c-x)$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем $cy = bx$, или $\frac{y}{b} = \frac{x}{c}$, откуда, по обратной теореме о пропорциональных отрезках, следует, что $QP \parallel BC$.



Второй способ. Отметим точки B_1 и C_1, симметричные точкам B и C относительно внешней биссектрисы угла BAC. Так как эта внешняя биссектриса перпендикулярна KL, она является серединным перпендикуляром к отрезку KL, т. е. совпадает с прямой O_1O_2, соединяющей центры окружностей. Поскольку KL является общей хордой окружностей (BLK) и (CLK), при симметрии относительно O_1O_2 они переходят в себя, поэтому точки B_1 и C_1 лежат на (BLK) и (CLK) соответственно. Заметим, что $AB_1 \cdot AP = KA \cdot AL = AC_1 \cdot AQ$, поэтому $AB \cdot AP = AC \cdot AQ$, откуда $\frac{AB}{AQ} = \frac{AC}{AP}$. По обратной теореме о пропорциональных отрезках получаем $QP \parallel BC$.

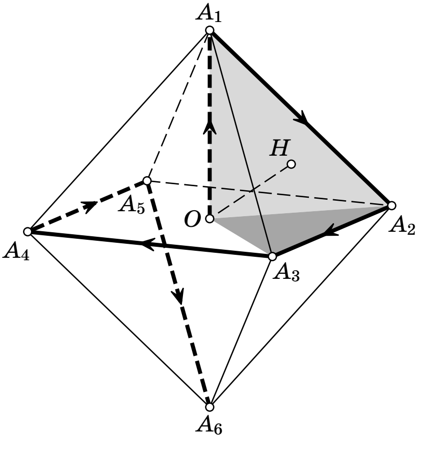
Это решение можно окончить иначе. Заметим, что из соотношения $AB_1 \cdot AP = AC_1 \cdot AQ$ следует, что четырехугольник B_1QPC_1 — вписанный, поэтому $\angle AQP = \angle C_1B_1A = \angle ABC$, откуда вытекает требуемое.

4. Звездолёт находится в полупространстве на расстоянии a от его границы. Экипаж знает об этом, но не представляет, в каком направлении двигаться, чтобы достигнуть граничной плоскости. Звездолёт может лететь в пространстве по любой траектории, измеряя длину пройденного пути, и имеет датчик, подающий сигнал, когда граница достигнута. Может ли звездолёт гарантированно достигнуть границы, преодолев путь длиной не более $14a$?

(*М. А. Евдокимов*)

Ответ: Да, может.

Решение. Пусть корабль находится в некоторой точке O. Рассмотрим правильный октаэдр $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, описанный возле шара радиуса a с центром в точке O. Докажем, что путь $O \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5 \to A_6$ заведомо позволит достигнуть граничной плоскости. Предположим противное. Но тогда вершины октаэдра, а значит, и сам октаэдр (вы-



пуклая оболочка его вершин) лежат строго внутри полупространства. Поэтому вписанный шар октаэдра, радиус которого равен a, тоже лежит строго внутри полупространства. Получаем противоречие, так как по условию расстояние до граничной плоскости полупространства равно a.

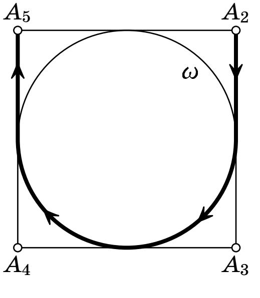
Покажем теперь, что длина пути $O \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to \to A_5 \to A_6$ меньше $14a$. Пусть $OA_1 = OA_2 = OA_3 = x$, OH — высота пирамиды $OA_1A_2A_3$. Запишем ее объём двумя способами:

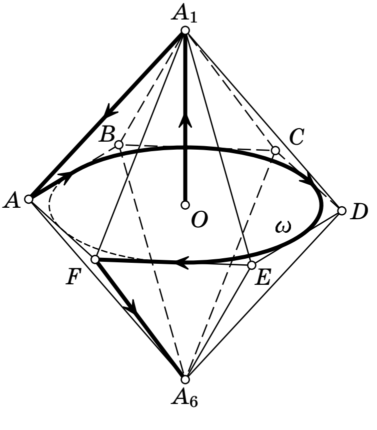
$$V = \frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{3} \cdot OH \cdot S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{(x\sqrt{2})^2}{4}.$$

Отсюда получаем, что $x = a\sqrt{3}$, а длина ребра октаэдра равна $a\sqrt{6}$. Поэтому длина пути равна $(\sqrt{3} + 5\sqrt{6})a < 14a$, так как $\sqrt{2} < 43/30$.

Комментарий. Существует много других способов. Также можно придумать пример, в котором длина пути меньше $13a$. Для этого в исходном решении заменим участок пути $A_2 \to A_3 \to \to A_4 \to A_5$ на приведённый на рисунке ниже (половина стороны квадрата $\to$ полуокружность $\to$ половина стороны квадрата). При этом общая длина пути сократится на $(2 - \pi/2) \cdot a\sqrt{6}$ и будет чуть меньше $13a$. Этот пример подходит, так как выпуклая оболочка точек пути всё ещё содержит вписанный в октаэдр шар радиуса a, поскольку этот шар касается образующей конуса с вершиной A_1 и основанием, которым является вписанная окружность ω квадрата $A_2A_3A_4A_5$.

Можно улучшить оценку примерно до $12{,}75a$, если в плоскости квадрата $A_2A_3A_4A_5$ рассмотреть правильный шестиугольник





$ABCDEF$, описанный возле той же самой окружности ω. Путь будет следующим: по отрезку OA_1, по прямой до вершины шестиугольника A, далее по касательной до точки касания с ω, далее по дуге окружности ω, далее по касательной к ω до точки F, далее по отрезку FA_6. Моделирование на компьютере позволяет ещё немного улучшить эту конструкцию, если менять расстояние от точек A_1 и A_6 до плоскости окружности ω и путь в этой плоскости так, чтобы объединение двух соответствующих конусов содержало шар с центром в точке O радиуса a. Однако улучшение получается незначительным. Если у кого-нибудь из читателей получится существенно улучшить оценку сверху или получить хорошую оценку снизу, просьба писать автору задачи по адресу: mmo2022kosmos@mail.ru.

5. См. задачу 4 для 10 класса (с. 26).

Ответ: 2021 корень.

Решение. Если многочлен P имеет $n = 2022$ корней на интервале $(0; 1)$, то значение их произведения, по теореме Виета равное свободному члену, также будет лежать на интервале $(0; 1)$, что противоречит условию, что все коэффициенты многочлена P — целые. Таким образом, многочлен P имеет не более $n - 1$ корня на интервале $(0; 1)$.

Покажем теперь, как построить многочлен, удовлетворяющий условию задачи и имеющий ровно $n - 1$ корень на интервале $(0; 1)$. Будем считать, что $P(0) \neq 0$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = x^n P(1/x)$. Это многочлен степени n с целыми коэффициентами и свободным членом, равным 1 (его коэффициенты — это коэффициенты многочлена P, выстроенные в обратном порядке). Каждому корню x_0 многочлена P, лежащему на интервале $(0; 1)$, соответствует корень $1/x_0$ многочлена Q, лежащий на луче $(1; +\infty)$. Верно и обратное: каждому корню многочлена Q, лежащему на луче $(1; +\infty)$, соответствует корень многочлена P, который лежит на интервале $(0; 1)$.

Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = 1 + x(x - 10)(x - 20)\ldots(x - 10(n - 1)).$$

Поскольку

$$Q(5) < 0, \quad Q(15) > 0, \quad \ldots,$$
$$Q(10(n - 2) + 5) < 0, \quad Q(10(n - 1) + 5) > 0,$$

в рассмотренных n точках многочлен $Q(x)$ принимает значения чередующихся знаков, поэтому он имеет $n-1$ корень на луче $(1;+\infty)$. Эти корни расположены на интервалах $(5;15)$, $(15;25)$, ..., $(10(n-2)+5;\,10(n-1)+5)$. Следовательно, соответствующий построенному многочлену Q многочлен P имеет ровно $n-1$ корень на интервале $(0;1)$.

Комментарий. Приведённое решение подходит для многочлена произвольной чётной степени n. Пример можно модифицировать и для случая нечётного n.

См. также решение задачи 4 для 10 класса.

6. Султан собрал 300 придворных мудрецов и предложил им испытание. Имеются колпаки 25 различных цветов, заранее известных мудрецам. Султан сообщил, что на каждого из мудрецов наденут один из этих колпаков, причём если для каждого цвета написать количество надетых колпаков, то все числа будут различны. Каждый мудрец будет видеть колпаки остальных мудрецов, а свой колпак нет. Затем все мудрецы одновременно огласят предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно? (*А. В. Грибалко*)

Ответ: да, могут.

Решение. Поскольку $0+1+2+\ldots+24=300$, количества колпаков различных цветов принимают все значения от 0 до 24.

Далее, каждый мудрец считает количество колпаков каждого из цветов. Для двух цветов количества колпаков совпадают и мудрец понимает, что на нём колпак одного из этих двух цветов. Остаётся только сделать выбор, какой именно из этих двух цветов ему назвать.

Договориться (заранее!) о том, как каждому мудрецу делать этот выбор, можно различными способами. Например, можно воспользоваться обобщением леммы Холла (см. по этому поводу статью М. Шевцовой «Многократная лемма Холла в задачах про мудрецов» в Кванте №7 за 2019 год). Стратегия, приведённая ниже, основана на понятии чётности перестановки.

Пусть мудрецы заранее занумеровали цвета числами от 0 до 24. Тогда истинному распределению колпаков соответствует перестановка

$$\begin{array}{r}\text{номер цвета}\\ \text{кол-во колпаков}\end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & 24 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_i & \dots & a_j & \dots & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Если мудрец видит равное количество колпаков цвета i и цвета j (по k штук каждого из этих двух цветов), то ему нужно принять решение, к какому из этих двух цветов отнести свой колпак, то есть выбрать между двумя перестановками

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & 24 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & k & \dots & k+1 & \dots & a_{24} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & 24 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & k+1 & \dots & k & \dots & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Одна из этих перестановок соответствует истинному распределению цветов, при этом указанные перестановки отличаются расположением ровно двух элементов, поэтому имеют разную чётность.

Мудрецы могут заранее договориться, чтобы ровно 150 из них сделали свой выбор в пользу чётной перестановки, а остальные 150 — в пользу нечётной перестановки.

Тогда ровно 150 мудрецов верно назовут цвет своего колпака.

Замечание. Стратегия, согласно которой мудрецы заранее договариваются так, что 150 из них выбирают цвет с бо́льшим номером (из двух, между которыми нужно сделать выбор), а остальные 150 выбирают цвет с меньшим номером, не гарантирует 150 верных ответов.

Действительно, пусть истинному распределению колпаков соответствует перестановка

$$\begin{array}{r}\text{номер цвета}\\ \text{кол-во колпаков}\end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 15 & 16 & 17 & 24 & 23 & 22 & 21 & 20 & 19 & 18 \end{pmatrix}$$

и пусть мудрецы, которым достались колпаки цветов 3–17 (их ровно 150 человек), должны выбрать цвет с меньшим номером, а остальные 150 мудрецов — с бо́льшим номером. Тогда все мудрецы, кроме мудрецов с колпаками цветов 1, 2 и 24, назовут цвет ошибочно.

11 класс, второй день

1. Некоторые неотрицательные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a+b+c=2\sqrt{abc}$. Докажите, что $bc \geqslant b+c$.

(*Д. В. Горяшин*)

Решение. Способ 1. Перенесём все слагаемые в левую часть равенства и выделим полный квадрат:

$$a-2\sqrt{a}\sqrt{bc}+b+c=(\sqrt{a}-\sqrt{bc})^2+b+c-bc.$$

Следовательно, $bc=b+c+(\sqrt{a}-\sqrt{bc})^2 \geqslant b+c$.

Способ 2. Числа a, b и c неотрицательны, поэтому исходное равенство можно рассматривать как квадратное уравнение относительно $\sqrt{a}$: $(\sqrt{a})^2-2\sqrt{bc}\sqrt{a}+b+c=0$. По условию это уравнение имеет хотя бы одно решение, а значит, $D/4=bc-b-c \geqslant 0$.

Способ 3. Если $a=0$, то $b=c=0$, и неравенство выполнено. Пусть $a>0$. В силу неравенства о средних имеем $a+b+c \geqslant 2\sqrt{a(b+c)}$. Тогда по условию $2\sqrt{abc} \geqslant 2\sqrt{a(b+c)}$, откуда, разделив на $2\sqrt{a}$ и возведя в квадрат, получаем требуемое неравенство.

Способ 4. По неравенству о средних $a+bc \geqslant 2\sqrt{abc}=a+$ $+b+c$, откуда $bc \geqslant b+c$.

2. Волейбольный чемпионат с участием 16 команд проходил в один круг (каждая команда играла с каждой ровно один раз, ничьих в волейболе не бывает). Оказалось, что какие-то две команды одержали одинаковое число побед. Докажите, что найдутся три команды, которые выиграли друг у друга по кругу (то есть A выиграла у B, B выиграла у C, а C выиграла у A).

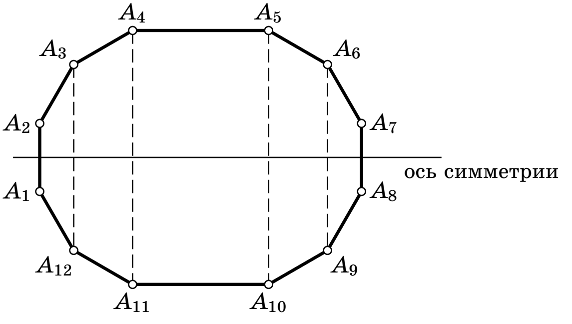
(*Фольклор*)

Решение. Рассмотрим команды A и B, одержавшие одинаковое число побед, и пусть в матче между ними победила команда A. Покажем, что обязательно найдется команда C, которая выиграла у команды A, но проиграла команде B. Рассмотрим все команды, у которых выиграла команда B. Среди них найдётся хотя бы одна команда, которая выиграла у команды A, так как в противном случае с учётом выигрыша у команды B команда A набрала бы больше очков, чем команда B. Таким образом, тройка команд A, B, C удовлетворяет условию задачи.

3. В выпуклом 12-угольнике все углы равны. Известно, что дли́ны каких-то десяти его сторон равны 1, а длина ещё одной равна 2. Чему может быть равна площадь этого 12-угольника? (*М. А. Евдокимов*)

Ответ: $8+4\sqrt{3}$.

Решение. Рассмотрим 12-угольник $A_1A_2\ldots A_{12}$, удовлетворяющий условию задачи. У него десять сторон длины 1 и одна сторона длины 2. Обозначим через x длину оставшейся стороны. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, ..., $\overrightarrow{A_{12}A_1}$, а также коллинеарные им единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_{12}$. Тогда для некоторых i и j имеет место равенство $\vec{e}_1+\ldots+2\vec{e}_i+\ldots+x\vec{e}_j+\ldots+\vec{e}_{12}=\vec{0}$. Помимо того, $\vec{e}_1+\vec{e}_7=\vec{e}_2+\vec{e}_8=\ldots=\vec{e}_6+\vec{e}_{12}=\vec{0}$, поэтому $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\ldots+\vec{e}_{12}=\vec{0}$. Вычитая второе из полученных равенств из первого, получаем $\vec{e}_i+(x-1)\vec{e}_j=\vec{0}$. Это возможно лишь в случае, если $\vec{e}_i=-\vec{e}_j$ и $x=2$. Значит, в исходном 12-угольнике есть пара параллельных сторон длины 2.



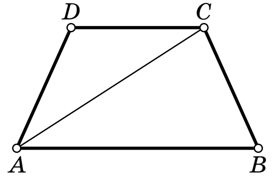
В силу равенства всех углов и соответствующих сторон этот 12-угольник имеет ось симметрии (см. рисунок). Чтобы найти площадь, разобьём его на 4 трапеции и прямоугольник. Находим $A_3A_{12}=A_6A_9=1+\sqrt{3}$, $A_4A_{11}=A_5A_{10}=2+\sqrt{3}$, поэтому искомая площадь равна

$$S=2\cdot(2+\sqrt{3})+\frac{\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{3}+1+\sqrt{3})}{2}+\frac{1+\sqrt{3}+1}{2}=8+4\sqrt{3}.$$

4. В равнобедренной трапеции проведена диагональ. По контуру каждого из получившихся двух треугольников ползёт свой жук. Скорости движения жуков постоянны и одинаковы. Жуки не меняют направления обхода своих контуров, и по диагонали трапеции они ползут в разных направлениях. Докажите, что при любых начальных положениях жуков они когда-нибудь встретятся.

(*П. А. Бородин*)

Решение. Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AB > CD$ проведена диагональ AC, так что первый жук ползает по циклу $A \to C \to D \to A$, второй — по циклу $A \to B \to C \to A$. Рассмотрим моменты времени, в которые первый жук оказывается в точке A. За время обхода первым жуком полного цикла из A снова в A второй жук сдвигается по своему циклу на $AB - CD$ в одну и ту же сторону. Поскольку



$$AB - CD < BC + AC - CD = AD + AC - CD < \\ < AC + CD + AC - CD = 2AC,$$

при таких сдвигах в один из рассматриваемых моментов времени второй жук окажется на расстоянии меньше $2AC$ до точки A по ходу своего движения, а значит, встретится с первым жуком на диагонали AC.

5. Таня последовательно выписывала числа вида $n^7 - 1$ для натуральных чисел $n = 2, 3, \ldots$ и заметила, что полученное при $n = 8$ число делится на 337. А при каком наименьшем $n > 1$ она получит число, делящееся на 2022?

(*Т. А. Гарманова*)

Ответ: 79.

Решение. Пусть натуральное число n таково, что $n^7 - 1$ делится на $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$. Тогда $n^7 - 1$ делится на 2 и на 3, поэтому n — нечётное число, имеющее остаток 1 при делении на 3. Помимо того, $n^7 - 1$ делится на 337. Заметим, что если два числа сравнимы по модулю 337 (т. е. дают одинаковые остатки при делении на 337), то седьмые степени этих чисел также сравнимы по модулю 337. Это означает, что для нахождения искомого числа достаточно рассмотреть все целые числа n из промежутка $[0; 336]$, удовлетворяющие сравнению $n^7 \equiv 1 \pmod{337}$.

Мы будем пользоваться следующим утверждением. Пусть p — простое число, P_k — многочлен степени k с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого не делится на p; тогда сравнение $P_k(n) \equiv 0 \pmod p$ имеет не более k решений среди целых чисел $0 \leqslant n < p$. (Доказать это утверждение можно индукцией по степени k, примерно так же, как то, что многочлен степени k с вещественными коэффициентами имеет не более k вещественных корней. См. также статью А. Геронимуса «Сравнения по простому модулю» в Кванте №11 за 1978 год.)

Найдём теперь все решения сравнения $n^7 \equiv 1 \pmod{337}$ на отрезке $[0; 336]$. Нам известны два решения: $n_1 = 1$, $n_2 = 8$. Заметим, что если n — решение сравнения $n^7 \equiv 1 \pmod{337}$, то для любого натурального s числа n^s также являются решениями. Следовательно, решениями данного сравнения являются числа

$$8^2 = 64 \equiv 64 \pmod{337},$$
$$8^3 = 512 \equiv 175 \pmod{337},$$
$$8^4 \equiv 8 \cdot 175 \equiv 52 \pmod{337},$$
$$8^5 \equiv 8 \cdot 52 \equiv 79 \pmod{337},$$
$$8^6 \equiv 8 \cdot 79 \equiv 295 \pmod{337}.$$

Итак, мы нашли семь решений на отрезке $[0; 336]$: $n_1 = 1$, $n_2 = 8$, $n_3 = 52$, $n_4 = 64$, $n_5 = 79$, $n_6 = 175$, $n_7 = 295$. Так как число 337 простое, по сформулированному выше утверждению других решений на этом отрезке нет. Из них нечётными и имеющими остаток 1 при делении на 3 являются $n_1 = 1$, $n_5 = 79$, $n_6 = 175$ и $n_7 = 295$. Из них наименьшее, большее 1, есть $n_5 = 79$.

6 класс (3914 работ)

	1	2	3	4	5	6
8						6
7				173	250	2
6			298	66	31	6
5			20	374	51	6
4	1969	660	8	370	54	11
3	18	167	32	195	56	3
2	31	260	92	1497	84	43
1	19	338	46	209	172	38
0	1877	2489	3418	1030	3216	3799

7 класс (2748 работ)

	1	2	3	4	5	6
8					7	26
7				229	0	12
6			323	56	1	15
5			33	389	21	9
4	1471	1688	14	299	9	41
3	0	2	23	133	6	4
2	185	116	68	1009	40	42
1	2	142	32	97	34	34
0	1090	800	2255	536	2630	2565

8 класс (2209 работ)

	1	2	3	4	5	6
$+$	371	240	199	119	40	2
$\pm$	356	75	95	17	16	0
$\mp$	14	183	145	59	134	291
$-$	1292	1074	904	1293	1375	976
0	176	637	866	721	644	940

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

9 класс (*1335 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	589	303	91	76	7	1
$\pm$	0	2	15	22	0	3
$\mp$	0	6	408	21	12	19
$-$	588	479	390	440	493	88
0	158	545	431	776	823	1224

10 класс (*1019 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	302	181	75	5	8	9
$\pm$	69	8	46	0	1	0
$+/2$	0	0	0	0	0	1
$\mp$	127	6	130	46	13	5
$-$	397	339	464	302	468	206
0	124	485	304	666	529	798

11 класс, первый день (*675 работ*)

	1	2	3	4	5	6
$+$	220	164	108	41	1	9
$\pm$	64	27	24	20	1	0
$\mp$	231	20	11	13	28	23
$-$	160	464	532	601	645	643

11 класс, второй день (*171 работа*)

	1	2	3	4	5
$+$	129	146	43	62	5
$\pm$	30	0	30	9	5
$\mp$	0	0	33	17	5
$-$	12	25	65	83	156

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики, в котором представлены все основные направления современной математики.

С 1933 года на мехмате было подготовлено свыше 40 тысяч специалистов в самых разных областях математики и механики. Среди них около 5 тысяч кандидатов и докторов наук, более 50 академиков, 6 лауреатов Филдсовской премии (С. П. Новиков, Г. А. Маргулис, В. Г. Дринфельд, М. Л. Концевич, В. А. Воеводский, А. Ю. Окуньков). Сейчас на мехмате работают 14 академиков и 13 членов-корреспондентов РАН. В 2019 году в России по решению Правительства РФ созданы 4 математических центра мирового уровня; мехмат — соорганизатор одного из них.

Научная работа на мехмате происходит в рамках научных школ. Во главе школы стоит один или несколько ученых, вокруг которых группируются их ученики и ученики их учеников. Выбирая научного руководителя и кафедру, студент попадает в большой научный коллектив. А студентам младших курсов помогают включиться в научную работу организованные кафедрами просеминары.

Система образования на мехмате динамично развивается: организуются новые курсы и циклы курсов, открываются новые образовательные программы и т. д. В частности, в 2021 году впервые прошел набор на программу «Фундаментальная математика и математическая физика» (fmmp.math.msu.ru), включающую самые современные курсы по математике и математической физике.

Большое внимание на факультете уделяется прикладным исследованиям: изучаются атомные реакторы, свойства химических веществ, прогнозируется погода, анализируются экономические процессы и пр.

Выпускники мехмата работают в Московском университете и других крупнейших вузах страны, в академических институтах. Практически вся современная московская математическая школа вышла с мехмата. Мехматяне также работают в школах, в авиакосмической отрасли, в инжиниринговых компаниях, в IT, в банках, в страховании, — везде, где нужны фундаментальные знания, аналитический ум, навыки работы с большими объемами информации.

Поэтому мехмат всюду плотен — где бы вы ни оказались, где-то рядом есть наши выпускники...

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ НИУ ВШЭ

создан в 2007 г. при участии Независимого Московского Университета для подготовки ведущих специалистов мирового уровня в области чистой математики, ее приложений и математического образования. Международный экспертный совет факультета включает филдсовских лауреатов П. Делиня, С. К. Смирнова и других выдающихся математиков. Согласно отчету за 2017 г., «Совет повторно оценивает общий уровень научных исследований на факультете как выдающийся, как в отношении объема, так и в отношении качества. Факультет удерживает лидирующую позицию среди математических факультетов страны».

Лидерские позиции НИУ ВШЭ в области математики отражены в ключевых предметных рейтингах: университет вошел в 2022 году в топ-75 по рейтингу QS и в 2021 стал единственным представителем России в топ-100 по рейтингу ARWU.

На старших курсах студенты выбирают индивидуальные учебные планы, позволяющие глубоко изучить заинтересовавшую область чистой математики или ее приложений. Благодаря этому выпускники, нацеленные на академическую карьеру, поступают в лучшие аспирантуры мира, а остальные неизменно востребованы в IT, финансах и других наукоемких приложениях.

Помимо программы общего профиля «Математика», на факультете действует совместный бакалавриат с Центром педагогического мастерства, который готовит высококвалифицированных преподавателей физико-математических школ.

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК НИУ ВШЭ

создан в 2014 году совместно с компанией «Яндекс». Факультет ведет подготовку специалистов высокого уровня по работе с данными, аналитиков, исследователей в области компьютерных наук и программных инженеров для ведущих ИТ-компаний и исследовательских центров. Бакалаврские программы «Прикладная математика и информатика» и «Программная инженерия» ежегодно привлекают сильнейших абитуриентов страны. В 2018 году открыта англоязычная программа двух дипломов «Прикладной анализ данных» совместно с Лондонской Школой Экономики.

Наряду с отличной фундаментальной подготовкой в области математики и информатики большое внимание уделяется прикладным курсам и проектной работе, построению индивидуальной образовательной траектории. В числе преподавателей — ведущие российские математики и эксперты в области Computer Science, международные специалисты, исследователи из научных институтов, сотрудники высокотехнологичных компаний, победители олимпиад по спортивному программированию ICPC и математических олимпиад.

Магистерские программы ФКН реализуются совместно со Сбером, Сколтехом, Школой анализа данных Яндекса, Институтом проблем передачи информации и Институтом системного программирования РАН. На факультете четырнадцать научных лабораторий. Среди реализуемых проектов — применение методов машинного обучения к обработке данных на экспериментах Большого адронного коллайдера, анализ динамики сообществ в графах и кластеризация, разработки в области биоинформатики и автоматической обработки текстов. Наши студенты участвуют в фундаментальных и прикладных проектах, побеждают на хакатонах и олимпиадах, проходят стажировки в ведущих научных центрах и компаниях-лидерах ИТ-индустрии.

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ МОСКОВСКОГО ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА (МФТИ)

МФТИ занимает 1 место среди технических вузов России в рейтинге лучших университетов мира Times Higher Education по направлениям «Computer Sciences» и «Physical Sciences».

Физтех-школа прикладной математики и информатики МФТИ специализируется на образовании и исследованиях в области чистой и прикладной математики, компьютерных наук и технологий работы с большими данными и искусственным интеллектом. Образовательные программы ФПМИ, создаваемые на стыке этих областей, актуализируются ежегодно. В 2022 году обновлен трек по чистой математике (совместно с МИАН), открыт набор на новые треки по экономике (с РЭШ), олимпиадному программированию, математическому и IT-образованию (с Яндекс, Сириус).

Благодаря системе индивидуальных учебных планов, разнообразию базовых кафедр и лабораторий студенты выстраивают образовательную траекторию в соответствии со своими интересами, а также участвуют в исследовательской работе уже с первых курсов бакалавриата.

Мощная фундаментальная подготовка, закладываемая на младших курсах, позволяет будущим выпускникам не упираться в потолок возможностей и справляться с решением задач любой сложности. А начиная со второго-третьего курса студенты привлекаются к работе на базовых кафедрах от ведущих IT-компаний (Яндекс, ABBYY, СБЕР, Тинькофф и др.) и институтов РАН (МИАН, ИСП РАН, ВЦ РАН, ИППИ РАН и др.).

Такое сочетание — Академии и Индустрии — не имеет аналогов и позволяет предоставить выпускникам ФПМИ максимальную свободу в выборе дальнейшей карьерной траектории.

Сайт: fpmi.mipt.ru   Вконтакте: vk.com/miptfpmi

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК СПбГУ

— сообщество увлеченных своим делом профессионалов, в которое мы приглашаем Вас. В 2019 году факультет МКН объединил новые образовательные программы «Науки о данных» (разработана совместно с компанией Яндекс, до 2021 программа называлась МААД) и «Современное программирование» (разработана совместно с компанией JetBrains) с программами бакалавриата и магистратуры по направлению «Математика», развивавшимися с 2015 года совместно с лабораторией им. П. Л. Чебышева. С 2021 года также открыта программа аспирантуры, а в 2022 году состоится первый набор на магистерскую программу «Разработка программного обеспечения и науки о данных».

В работу со студентами вовлечен выдающийся коллектив преподавателей и научных сотрудников, председатель Совета программы «Математика» — филдсовский лауреат С. К. Смирнов. Студенты МКН получают глубокое понимание фундаментальных основ современной математики и спектра возможных приложений, а также полную свободу в выборе своей траектории. С третьего курса студенты выбирают из 100+ спецкурсов примерно половину предметов каждый семестр. Посмотрите сами удобные учебные планы интересующих программ:

Математика `bit.ly/syllabus_math`
Науки о данных `bit.ly/syllabus_maad`
Современное программирование `bit.ly/syllabus_sp`

Студенты активно вовлекаются в научную работу в сотрудничестве с лабораториями СПбГУ, а также в работу над программными продуктами под руководством профессионалов из индустрии. Выпускники МКН собирают портфолио, с которым могут уверенно чувствовать себя при поступлении на любые магистерские и PhD программы мира или строить карьеру в передовых областях IT-индустрии. Наш приём 55 + 30 + 35 человек на три программы позволяет с первого семестра много общаться с каждым студентом и создавать атмосферу, способствующую индивидуальному развитию. Все занятия проходят в центре Санкт-Петербурга — на Васильевском острове, а комфортное общежитие расположено на расстоянии двадцатиминутной прогулки.

joinmkn.ru

Задать вопрос о поступлении в чате: t.me/mathcs_admission
Поговорить со студентами в чат-боте: t.me/getmatespbu_bot
E-mail: math-cs@spbu.ru

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru
www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»
www.problems.ru

На сайте www.problems.ru размещаются все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.), Турнира городов и других соревнований, задачи из разных книг. Большинство задач приведено с решениями, есть тематический рубрикатор.

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ»
zadachi.mccme.ru

Более 9000 задач по планиметрии и 3000 задач по стереометрии с решениями, чертежами, атрибутами для тематического поиска и прослеживания взаимосвязей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ

www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях.

Недавно сайту исполнилось 15 лет, открылась его новая версия, каждую неделю появляются новые материалы.

АРХИВ ИЗДАТЕЛЬСТВА «MATHESIS»

maTHesis.ru

Одесское издательство «Mathesis» с 1904 по 1925 год выпускало удивительно интересные книги. Некоторые из них стали классикой, часть сейчас незаслуженно забыта.

Ясность и доступность изложения, подбор научно-популярных книг поможет лучше понять математику, физику, астрономию, другие естественные науки, а также историю их познания.

Чтение этих книг заведомо будет полезно молодому поколению, а также тем, кто занимается его образованием и воспитанием.

Книгоиздательство научныхъ и популярно научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ

МЕХАНИЗМЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

tcheb.ru

В проекте собираются все механизмы, созданные Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821—1894), великим российским математиком. Задача проекта — навсегда сохранить уникальное наследие путем создания высокоточных компьютерных моделей уцелевших механизмов, воссоздать уже утраченные по архивным документам. По договоренности с музеями моделирование производится на основе тщательного измерения всех параметров оригиналов.

К 200-летию Чебышева открылась новая версия сайта.

Первые научно-популярные журналы начали выходить в России более двух веков назад. На их статьях выросло не одно поколение российских ученых, инженеров, просто думающих и читающих людей самых разных родов занятий. Сейчас старые номера этих журналов доступны читателям лишь в ничтожном числе библиотек. Электронные архивы призваны сделать их материалы доступными для широкой аудитории.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (1886—1917)

vofem.ru

Журнал, фактически заложивший традиции жанра в литературе на русском языке. За 31 год его существования вышло 674 выпуска В.О.Ф.Э.М.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы и многое другое. Среди постоянных рубрик журнала были, например: «Статьи, посвященные вопросам преподавания математики и физики», «Опыты и приборы», «Математические мелочи», «Библиографический отдел».

Статьи составлялись настолько популярно, насколько это возможно без ущерба для научной стороны дела.

ЖУРНАЛ «ПРИРОДА» (1912—)

priroda.ras.ru

Ежемесячный научно-популярный журнал Российской академии наук (РАН) «Природа» — одно из старейших в России изданий. Первый номер этого журнала вышел в 1912 году.

Фактически перед вами огромная энциклопедия по естественным наукам, составленная и регулярно пополнявшаяся отечественными учеными на протяжении 100 лет.

ЖУРНАЛ «КВАНТИК» (2012—)

kvantik.com

В журнале вы найдёте статьи и задачи по математике, лингвистике, физике, химии, биологии и другим естественным наукам. Журнал доступен школьникам 5—8 классов, но может быть интересен любознательным читателям любого возраста.

ЖУРНАЛ «КВАНТ» (1970—)

kvant.ras.ru

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

СБОРНИКИ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ» (3 сер., 1997—)

www.mccme.ru/free-books/matpros.html

Сборники с таким названием выходили в 1934—38 и 1957—61 годах. Сборники новой серии играют роль связующего звена между специальной и популярной математической литературой. Математическое содержание «должно быть понятно вдумчивому и настойчивому читателю, даже при отсутствии специальной подготовки». Кроме того в сборниках публикуются материалы о математической жизни, материалы по преподаванию математики.

СЕРИИ КНИГ

БИБЛИОТЕКА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»

mccme.ru/mmmf-lectures/books/

Осенью 1999 года Московское математическое общество, Малый мехмат МГУ и Московский центр непрерывного математического образования возобновили популярные лекции по математике для школьников 9–11 классов. В том же году возникла серия небольших брошюр по материалам избранных лекций — вышло более 40 выпусков.

БРОШЮРЫ ЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ «СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

mccme.ru/dubna/books/

написаны по материалам интенсивных мини-курсов, вплотную подводящих студентов и подготовленных старшеклассников к действительно современной математике.

А на странице mccme.ru/dubna/courses/ доступны видеозаписи многих занятий ЛШСМ.

«ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

ashap.info/Knigi/Matkruzhki/

Главный адресат серии — школьный учитель математики, который понимает, что для пробуждения интереса к математике и для развития учеников школьных уроков часто не хватает. Но брошюры могут быть интересны и полезны и школьникам.

В брошюру по каждой теме входят разработки нескольких занятий с изложением необходимой теории, разобранными примерами, задачами (к ним приводятся подробные решения) и методическими указаниями. Изложение каждой темы начинается практически «с нуля» или, во всяком случае, там, где заканчиваются стандартные школьные учебники.

Двадцать первая летняя школа
«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»
имени Виталия Арнольда

для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс) пройдет с 19 по 30 июля 2022 года в Подмосковье.

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов.

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. Если вы хотите участвовать в работе школы, заполните до 20 мая анкету участника.

Предварительное согласие провести занятия на школе дали академики РАН Л. Д. Беклемишев, В. В. Козлов, Д. О. Орлов, члены-корреспонденты РАН А. А. Гайфуллин, А. Г. Кузнецов, И. А. Панин, В. Ю. Протасов, а также И. В. Аржанцев, А. В. Гасников, С. О. Горчинский, А. Я. Канель-Белов, Г. Ю. Панина, Ф. В. Петров, А. М. Райгородский, Е. Ю. Смирнов, А. Б. Сосинский, К. А. Шрамов.

Материалы прошедших школ и информацию о ЛШСМ-2022 смотрите на сайте

www.mccme.ru/dubna

Контактный e-mail оргкомитета dubna@mccme.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

LXXXV Московская математическая олимпиада
Задачи и решения

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-08-04