10 класс. Решения

1. Про четыре целых числа a, b, c, d известно, что

$$a + b + c + d = ab + bc + cd + da + 1\,.$$

Докажите, что модули каких-то двух из этих чисел отличаются на один.

(2023-64, А. Доледенок)

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$a + b + c + d = (a + c)(b + d) + 1\,.$$

После замены $x = a + c$ и $y = b + d$ получаем

$$x + y = xy + 1.$$

Перенесём все слашаемые в одну часть и разложим на множители

$$(x - 1)(y - 1) = 0.$$

Таким образом, $a + c = 1$ или $b + d = 1$. Пусть $a + c = 1$. Сумма двух положительных целых чисел не меньше двух, следовательно $a \leqslant 0$ или $c \leqslant 0$. Не умаляя общности, пусть $a \leqslant 0$. Тогда $c > 0$. Итого $|c| - |a| = c + a = 1$. Что и требовалось доказать.

2. В эстафетном забеге Москва — Петушки участвовали две команды по 20 человек. Каждая из команд по-своему разделила дистанцию на 20 не обязательно равных отрезков и распределила их между участниками так, чтобы каждый бежал ровно один отрезок (скорость каждого участника постоянна, но скорости разных участников могут быть различны). Первые участники обеих команд стартовали одновременно, а передача эстафеты происходит мгновенно. Какое максимальное количество обгонов могло быть в таком забеге? Опережение на границе этапов обгоном не считается.

(2023-96, Е. Неустроева)

Ответ. 38 обгонов.

Решение. Сначала докажем, что произошло не более 38 обгонов. Заметим, что между стартом и первым обгоном и между двумя последовательными обгонами хотя бы в одной из команд должен поменться бегущий. Смен бегунов было по 19 в каждой команде, то есть, всего 38, а значит, и обгонов было не более 38.

Докажем, что 38 обгонов могло быть. Изобразим траектории движения команд на графике с горизонтальной осью, соответствующей времени, и вертикальной осью, соответствующей пройденной дистанции. Тогда обе траектории являются 20-звенными ломаными со звеньями, направленными вверх-вправо. Левый-нижний конец каждой ломаной совпадает с началом координат, а правые-верхние концы ломаных имеют одинаковую координату по вертикальной оси. В такой ситуации обгон — точка пересечения ломаных, не являющаяся вершиной.

Итак, приведем пример. Для начала нарисуем ломаную, состоящую из 40 последовательных сторон правильного 160-угольника, так чтобы последняя сторона была горизонтальна. Другими словами, первое звено ломаной выходит из точки с координатами $(0, 0)$ и повернуто под углом в $9/4°$, а каждой следующее повернуто на $9/4°$ градусов по часовой стрелке по сравнению с предыдущим. Таким образом, последнее звено будет повернуто горизонтально, то есть, на $40 \cdot 9/4° = 90°$ относительно вертикальной оси. Соединим последовательно отрезками вершины вспомогательной ломаной с номерами $1, 2, 4, 6, \ldots 50$, это

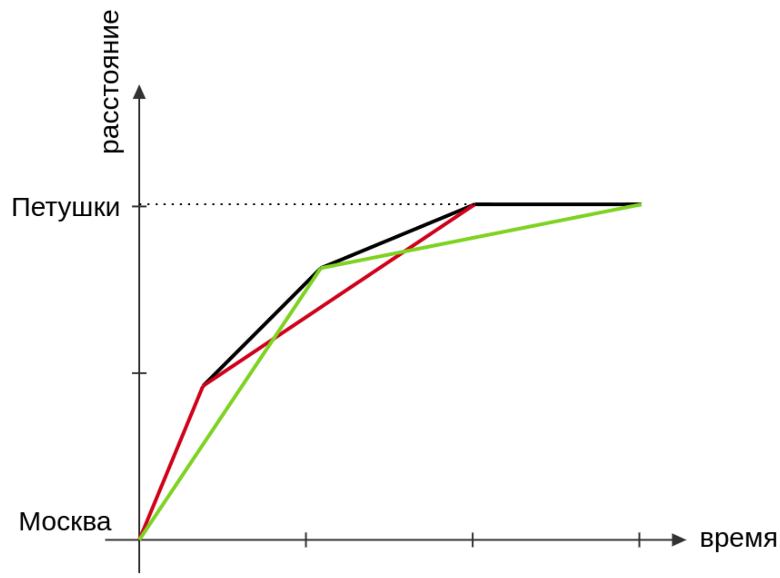

Рис. 1: к решению задачи 2

будет траектория первой команды. Траекторией второй команды будет ломаная, соединяющая вершины с номерами $1, 3, 5, \ldots 51$. Пересекаться будут отрезки $(i, i+2)$ и $(i+1, i+3)$ для $i = 1, 2, \ldots 38$, их точки пересечения — искомые 38 обгонов.

Проиллюстрируем пример для случая команд, состоящих из двух участников.

3. Периметр треугольника ABC равен 1. Окружность ω касается стороны BC, продолжения стороны AB в точке P и продолжения стороны AC в точке Q. Прямая, проходящая через середины AB и AC, пересекает описанную окружность треугольника APQ в точках X и Y. Найдите длину отрезка XY.

(2023-47, Д. Бродский)

Решение.

Середину стороны AB обозначим за M, середину AC – за N. Также нам известно, что периметр треугольника ABC равен 1, то есть $P_{ABC} = 1$.

Так как точки P и Q – точки касания вневписанной окружности треугольника ABC со сторонами угла PAQ, то $AP = AQ$ как открезки касательных. Как известно, длина таких отрезков – это полупериметр треугольника ABC.

Поскольку MN – средняя линия треугольника ABC, то $MN = \frac{1}{2}BC$.

Пусть $AB = 2c, BC = 2a, AC = 2b$. Тогда $AM = \frac{1}{2}AB = c, AN = \frac{1}{2}AC = b, MN = \frac{1}{2}BC = a$. Также $AP = AQ = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = a + b + c$.

Из того, что хорды XY и AP описанной окружности треугольника PAQ пересекаются в точке M следует, что $XM \cdot MY = AM \cdot MP$, а в терминах только что введенных обозначений получаем равенство

$$XM \cdot (a + NY) = c \cdot (AP - AM)$$
$$XM \cdot (a + NY) = c \cdot (a + b + c - c)$$
$$XM \cdot (a + NY) = c \cdot (a + b) \tag{1}$$

Аналогично для хорд XY и AQ, пересекающихся в точке N, получаем равенство

$$NY \cdot XN = AN \cdot NQ$$

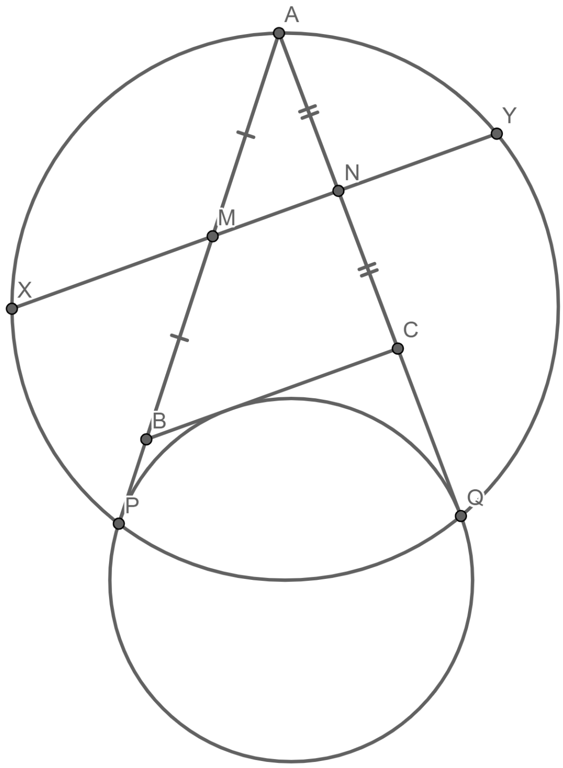

Рис. 2: к решению задачи 3

$$NY \cdot (a + XM) = b \cdot (AQ - AN)$$
$$NY \cdot (a + XM) = b \cdot (a + c) \qquad (2)$$

Теперь вычтем из (1) равенства (2):

$$(XM - NY) \cdot a = ac + bc - ab - bc$$
$$(XM - NY) \cdot a = a \cdot (c - b)$$

Поскольку $a \neq 0$, то $XM - NY = c - b$, то есть $XM = NY + c - b$.
Теперь подставим получившееся выражение в равнество (2):

$$NY \cdot (a + NY + c - b) = b \cdot (a + c)$$
$$NY^2 + NY \cdot (a + c - b) - b(a + c) = 0$$
$$(NY - b) \cdot (NY + a + c) = 0$$

Поскольку $NY + a + c > 0$, то $NY = b$. Значит, $XM = NY + c - b = c$.
Поэтому $XY = XM + MN + NY = c + a + b = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{2}$.

Решение 2.
Середину стороны AB обозначим за M, середину AC – за N.
Поскольку MN – средняя линия треугольника ABC, то $MN = \frac{1}{2}BC$, $MN||BC$.
Отметим точку O – центр окружности ω.
Заметим, что точка O лежит на биссектрисе угла BAC как центр вневписанной окружности $\triangle ABC$.

Поскольку $OP \perp AP$ и $OQ \perp AQ$, точки A, Q, O, P лежат на одной окружности (а именно, построенной на AO как на диаметре), поэтому точка O лежит на описанной окружности треугольника APQ.

Далее мы будем доказывать вариацию задачи 255 из задачника Шарыгина и применим ее результаты для доказательства нашей задачи.

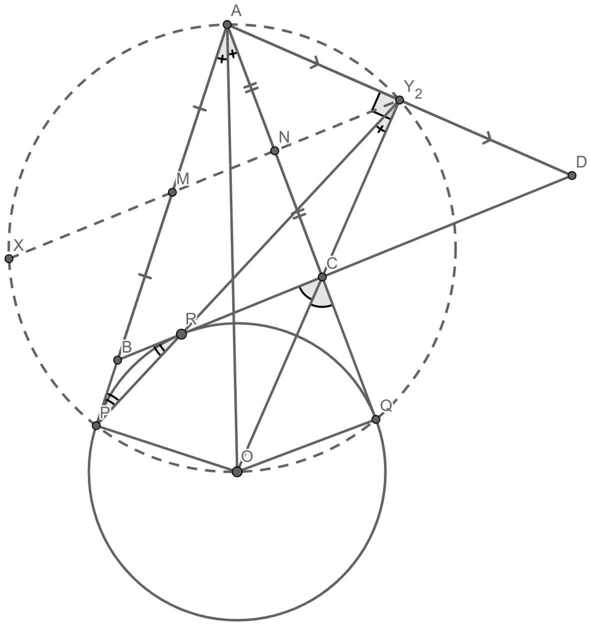

Рис. 3: к решению задачи 3

Обозначим точку касания окружности w с BC за R. Теперь заметим, что точка O лежит на биссектрисе угла BCQ как центр вневписанной окружности треугольника ABC. Продлим эту биссектрису за точку C до точки пересечения с прямой PR. Назовем эту точку Y_2. Докажем, что $\angle CY_2A = 90°$. Для этого посчитаем углы:

Отрезки BP и BR равны как отрезки касательных к окружности ω. Поэтому $\angle BPR = \angle BRP$. А из того, что $\angle ABC$ внешний для треугольника PBR, следует $\angle BPR = \angle BRP = \frac{1}{2}\angle ABC$.

$$\angle BRP = \angle Y_2RC$$

(как вертикальные)

$$\angle RY_2C = \angle BCO - \angle Y_2RC$$

(т.к. $\angle BCO$ внешний для $\triangle RY_2C$)

$$\angle RY_2C = \frac{1}{2}\angle BCQ - \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\angle RY_2C = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC) - \frac{1}{2}\angle ABC$$

(т.к. $\angle BCQ$ внешний для $\triangle ABC$)

$$\angle RY_2C = \frac{1}{2}\angle BAC$$

Поймем, что поскольку AO – биссектриса $\angle BAC$, то $\angle BAO = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle RY_2C$.

Поэтому по признаку вписанного четырехугольника точки O, P, A, Y_2 лежат на одной окружности, то есть на описанной окружности треугольника APQ (ведь точки O, P, A на ней лежат). Тогда $\angle OY_2A = 90°$.

Теперь докажем, что точка Y_2 лежит на MN. Действительно, если продлить AY_2 за точку Y_2 до точки T – точки пересечения с прямой BC, то в получившемся треугольнике ACT биссектриса CY_2 является также высотой, а, значит, и медианой, то есть точка Y_2 – середина AT.

Прямая MN пройдет через середину AT, то есть через точку Y_2, т.к. в $\triangle CAT$ она проходит через середину стороны AC параллельно стороне CT.

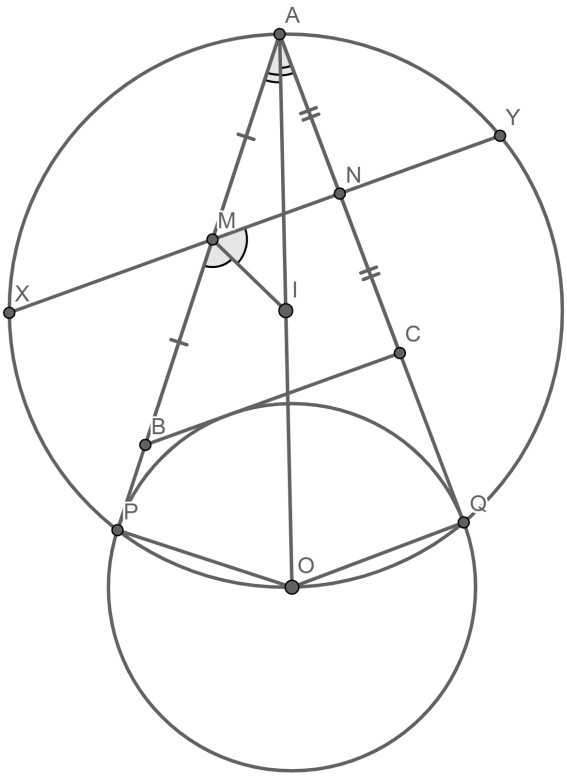

Рис. 4: к решению задачи 3

Значит, точка Y_2 лежит на пересечении описанной окружности $\triangle APQ$ и прямой MN, поэтому совпадает с точкой Y.

В прямоугольном треугольнике AYC медиана NY, проведенная к гипотенузе, равна ее половине, то есть $NY = \frac{1}{2}AC$. Аналогично $XM = \frac{1}{2}AB$. Значит, $XY = XM + MN + NY = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}$.

Решение 3.

Введем те же обозначения, что и в прошлом решении, а именно: точки M, N – середины AB и AC соответственно, точки P, Q – точки касания ω с продолжением AB и продолжением AC соответственно. Точка O – ее центр.

Как и раньше, заметим, что точка O лежит на описанной окружности треугольника APQ. Это верно, поскольку $OP \perp AB, OP \perp AQ$ как радиусы, проведенные в точки касания, и тогда точки P и Q лежат на окружности, построенной на AO как на диаметре.

Далее обозначим за I центр описанной окружности треугольника PAQ. Поскольку AO – диаметр описанной окружности треугольника APQ, то точка I лежит на AO и $AO = 2AI$.

Теперь сделаем гомотетию с центром в точке A и коэффициентом $\frac{1}{2}$. При этом точка B перейдет в точку M, точка C – в точку N , точка O – в точку I. Получается, что треугольник ABC переходит в треугольник AMN, и центр вневписанной окружности треугольника ABC перейдет в центр вневписанной окружности треугольника AMN. Таким образом, мы получили, что точка I – центр вневписанной окружности треугольника AMN.

Значит, точка I лежит на биссектрисе угла BMN, и, в частности, высоты, опущенные на AP и XY, равны. Получается, что XY и AP равноудаленные от центра окружности хорды. Значит, они равны. А так как $AP = \frac{P_{ABC}}{2} = \frac{1}{2}$, то $XY = \frac{1}{2}$.

4. На экране суперкомпьютера напечатано число $11\ldots1$ (900 единиц). Каждую секунду суперкомпьютер заменяет его по следующему правилу. Число записывается в виде $\overline{AB}$, где B состоит из двух его последних цифр, и заменяется на $2 \cdot A + 8 \cdot B$ (если B начинается на нуль, то он при вычислении опускается). Например, 305 заменяется на $2 \cdot 3 + 8 \cdot 5 = 46$. Если на экране остаётся число, меньшее 100, то процесс останавливается. Правда ли, что он остановится?

(2023-70, М. Евдокимов)

Ответ. Нет, не остановится.

Решение. Условие можно перефразировать как то, что если число на экране имеет вид $100A + B$, где $0 \leqslant B < 100$ то оно заменяется на число $2A + 8B$. Поэтому оно уменьшается на $(100A+B) - (2A+8B) = 98A - 7B = 7(14A - B)$. Эта величина обязательно положительна при $A > 7$, так что все числа, начиная с 800, обязательно уменьшаются. Естественный вопрос — а может ли что-нибудь помешать числу уменьшиться дальше? Или можем ли мы выяснить, до какого числа, меньшего 800, «досчитает» суперкомпьютер? Во-первых, из записи выше видно, что разница между числом и его образом обязательно делится на 7. Так что остаток от деления на 7 сохраняется. А поскольку на 7 делится $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, то делится и $111111 = 111 \cdot 1001$, и значит, и число из $900 = 6 \cdot 150$ единиц. Значит, все числа, которые будут получаться, тоже делятся на 7 — и на 14, потому что $2A + 8B$ это всегда число чётное.

Но этого мало. А не сохраняется ли (или не изменяется ли предсказуемым образом) делимость на ещё какое-нибудь простое число p?

Если на p делится $100A + B$, то делится и $8(100A + B) = 800A + 8B$ (а если не делится, то остаток умножается ровно на 8). Разница между этим числом и $2A + 8B$ составляет $(800 - 2)A = 798A$, так что если p — это делитель 798, то остаток от деления на p умножится на 8. $798 = 7 \cdot 114 = 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19$; это даёт нам два новых простых числа, 3 и 19.

Посмотрим, какой остаток даёт исходное число при делении на 3 и на 19. Оно делится на 3, потому что 900 делится на 3. Наконец, то, что $10^{18} - 1$ делится на 19 — следует из Малой Теоремы Ферма, но можно проверить и просто «делением в столбик». А значит, делится на 19 и число из $900 = 18 \cdot 50$ единиц. Поэтому все итерации, начиная со второй, будут делится на 798. И значит, итоговое (ненулевое!) число никогда не станет меньше 100.

Комментарий. Если бы нам не «повезло» с выбором исходного числа — можно было бы «отследить» изменение остатков от деления на 3, 7 и 19 (поскольку они на каждом шаге умножаются на 8), и понять, есть ли среди получающихся вариантов числа, меньшие 100.

5. На плоскости даны две окружности ω_1 и ω_2, касающиеся внешним образом. На окружности ω_1 выбран диаметр AB, а на окружности ω_2 выбран диаметр CD. Рассмотрим всевозможные положения точек A, B, C и D, при которых $ABCD$ — выпуклый описанный четырёхугольник, и пусть I — центр его вписанной окружности. Найдите геометрическое место точек I.

(2023-81, М. Евдокимов)

Ответ. Точка I является точкой касания окружностей.

Решение. Итак, предположим, что диаметры выбраны так, что четырёхугольник $ABCD$ является описанным. Тогда $AB + CD = BC + AD$. Пусть M и N — центры окружностей ω_1 и ω_2 соответственно, а P — точка касания. $\angle APB = \angle CPD = 90^\circ$, так как угол, опирающийся на диаметр, является прямым. По свойству медианы прямоугольного треугольника $MP = \frac{1}{2}AB$ и $PN = \frac{1}{2}CD$, следовательно $MN = MP + PN = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

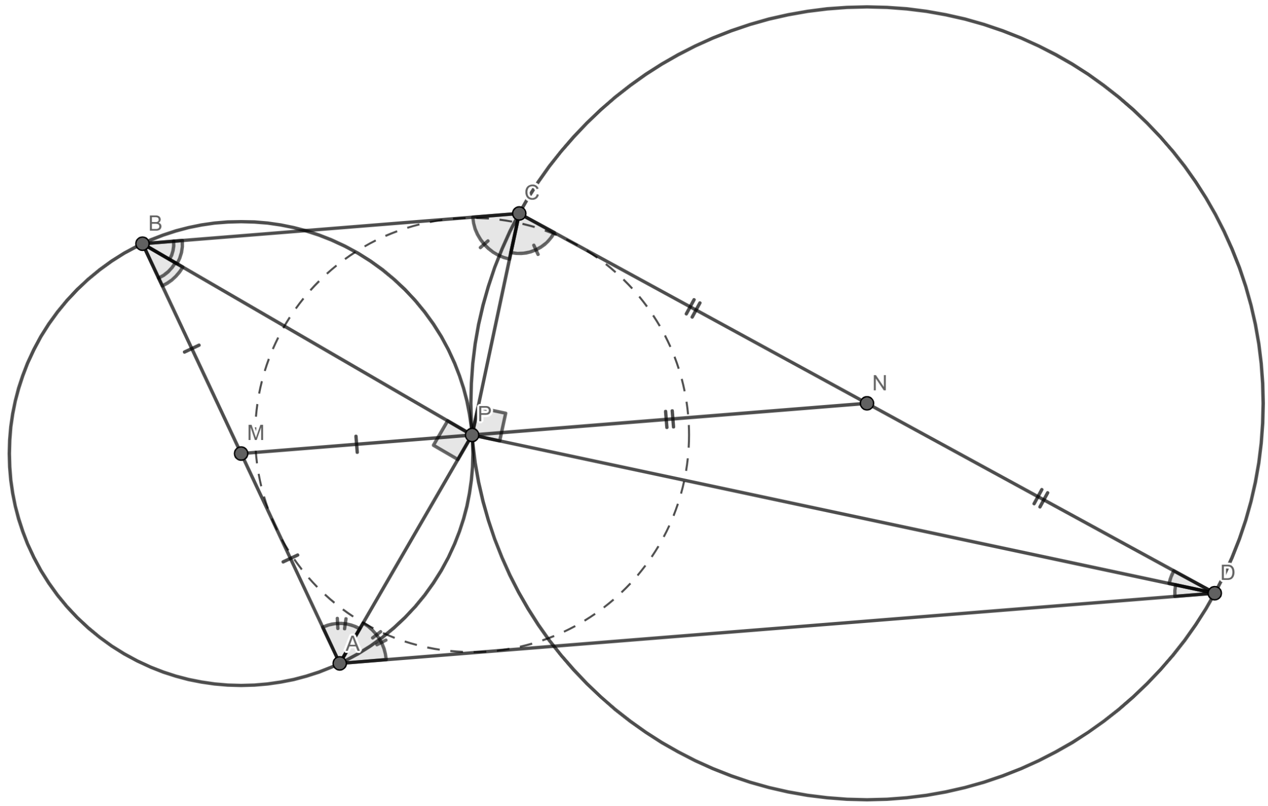

Рис. 5: к решению задачи 5

Утверждение. Длина средней линии выпуклого четырёхугольника (т.е. отрезка, соединяющего середины его противоположных сторон) не превосходит полусуммы двух других сторон и равна ей, если эти стороны параллельны и только в этом случае.

Доказательство. Итак, пусть $ABCD$ — четырёхугольник, M и N — середины AB и CD соответсвенно. Отметим точку K — середину AC. Тогда MK и KN являются средними линиями в треугольниках ABC и ADB. Следовательно, $MK = \frac{1}{2}BC$ и $KN = \frac{1}{2}AD$. По неравенству треугольника $\frac{1}{2}(AB + CD) = MK + KN \geqslant MN$. Равенство достигается, только когда точки K, M и N лежат на одной прямой. В этом случае AB и CD параллельны этой прямой, так как она будет содержать средние линии треугольников ABC и ADB. $\square$

Таким образом, согласно вышедоказанному утверждению, $MN \parallel BC \parallel AD$. Ясно, что $\angle MPA = \angle PAD$ из параллельности. Кроме того, $\angle MAP = \angle MPA$, так как треугольник APM равнобедренный. Таким образом, AP является биссектрисой угла BAD. Аналогично BP, CP и DP тоже являются биссектрисами углов четырёхугольника. Таким образом, точка P, будучи точкой пересечения биссектрис, является центром вписанной окружности.

Наконец, покажем, что ГМТ непусто, то есть докажем, что найдётся хотя бы одно положение диаметров при котором четырёхугольник $ABCD$ является описанным. Обозначим через r_i радиус окружности ω_i. Не умаляя общности, можно считать, что $r_1 \leqslant r_2$. Если $r_1 = r_2$, то проведём диаметры так, чтобы они были перпендикулярны MN. Тогда четырёхугольник $ABCD$ окажется квадратом. Пусть $r_1 < r_2$. Построим диаметр AB так, что $AB \perp MN$. Проведём касательные к ω_1 в точках A и B. Они пересекают ω_2 в четырёх точках, образующих прямоугольник. В качестве диаметра CD возьмём одну из диагоналей этого четырёхуголника (см. картинку). Тогда четырёхугольник $ABCD$ является трапецией. Как и раньше, можно доказать, что точка P является точкой пересечения его биссектрис, следовательно он является описанным.

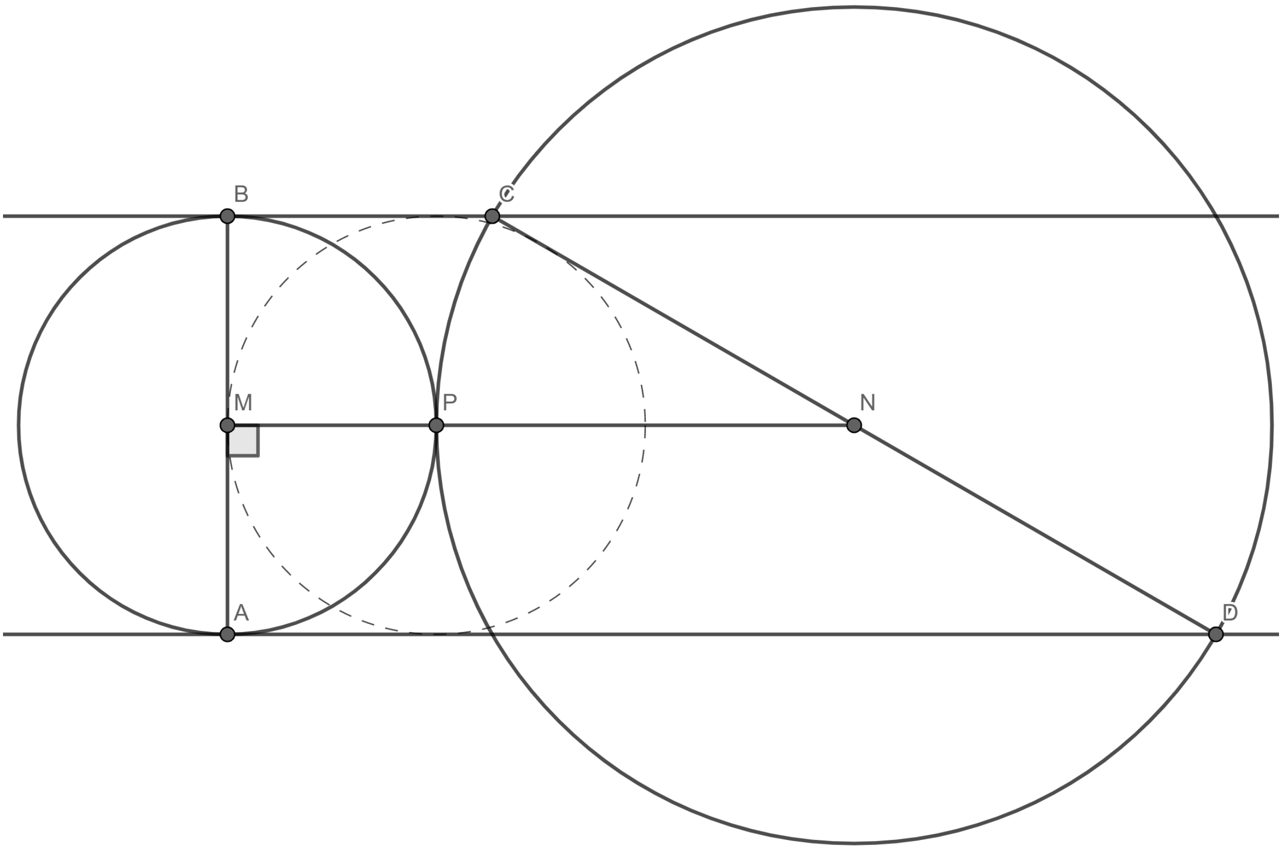

Рис. 6: к решению задачи 5

Другое решение. Участники олимпиады придумали другое доказательство, основанное на следующей лемме.

Лемма. Пусть дан четырёхугольник $ABCD$ и точка P. Если $\angle APB + \angle CPD = 180°$, то существует точка, изогонально сопряжённая точке P относительно четырёхугольника $ABCD$. Более того, такой точкой является образ точки P при изоциклической инволюции.

О свойства изогонального сопряжения в четырёхугольнике и изоциклической инволюции можно почитать в проекте ЛКТГ "Кубика фокусов и циркулярные кубики"(https://www.turgor.ru/lktg/2020/2/index.html) или посмотреть здесь (https://youtu.be/a0CqrAzJ54c).

Итак, пусть нам дан описанный четырёхугольник $ABCD$ и точка P так, что описанные окружности треугольников ABP и CDP касаются. Пусть α и β — описанные окружности треугольников BCP и ADP, а Q — вторая точка их пересечения. Так как $\angle APB = \angle CPD = 90°$, по лемме точки P и Q изогонально сопряжены. Тогда, с одной стороны, биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в середине дуги PQ окружности α, биссектрисы углов BAD и CDA пересекаются в середине дуги PQ окружности β. С другой стороны, биссектрисы углов описанного четырёхугольника пересекаются в одной точке. Такое возможно, только если окружности α и β касаются, то есть $P = Q$. Следовательно, точка P изогональна сопряжена сама себе, поэтому является точкой пересечения биссектрис и центром вписанной окружности.

6. На острове живут хамелеоны пяти цветов. Когда один хамелеон кусает другого, цвет укушенного хамелеона меняется по некоторому правилу, причем новый цвет зависит только от цвета укусившего и цвета укушенного. Известно, что 2023 красных хамелеона могут договориться о последовательности укусов, после которой все они станут синими. При каком наименьшем k можно гарантировать, что k красных хамелеонов смогут договориться так, чтобы стать синими?

Например, правила могут быть такими: если красный хамелеон кусает зеленого, уку-

шенный меняет цвет на синий; если зеленый кусает красного, укушенный остается красным, то есть «меняет цвет на красный»; если красный хамелеон кусает красного, укушенный меняет цвет на жёлтый, и так далее. (Конкретные правила смены цветов могут быть устроены иначе.)

(2022-60, М. Раскин)

Ответ. При $k = 5$.

Решение.

Для начала приведём пример правил, для которых для описанной перекраски будет необходимо хотя бы 5 красных хамелеонов. Занумеруем цвета так, чтобы красный был первым цветом, а синий — последним. Тогда пусть правила выглядят следующим образом: если хамелеон цвета $k < 5$ кусает хамелеона цвета k, укушенный меняет цвет на $k + 1$. Кроме того, все хамелеоны, укушенные хамелеоном синего цвета, тоже становятся синими. Никакие другие ситуации цвета хамелеонов не меняют. Несложно заметить, что если изначально хамелеонов всего 4, то, при таких правилах, ни у одного из них не получится стать синим. Действительно, никакой появившийся цвет не может исчезнуть раньше появления синего. Кроме того, никакой цвет не может появиться раньше, чем появятся все предыдущие. Таким образом, в момент появления первого синего хамелеона есть хотя бы по одному хамелеону каждого из цветов.

Теперь докажем, что 5 хамелеонов хватит. Процесс перекрашивания будет состоять из двух этапов. На первом этапе 5 хамелеонов должны следить за тем, как перекрашиваются 2023 хамелеона из красного в синий и перекрашиваться параллельно с ними 'забегами', заботясь о том, чтобы после каждого забега воспроизводились два условия: (1) есть не более 1 хамелеона каждого цвета, остальные — красные, (2) палитра цветов 5 хамелеонов расширяется и всегда содержит в себе палитру цветов 2023 хамелеонов.

В рамках забега 5 хамелеонов ждут, когда среди цветов 2023 хамелеонов появится новый цвет, отсуствующий у 5 хамелеонов. Пусть этот цвет представляет хамелеон X. Далее 5 хамелеонов прослеживают, как перекрашивался хамелеон X из красного цвета, выбирают любого красного хамелеона из 5-ти и перекрашивают его тем же путем. Это всегда возможно, поскольку палитра цветов остальных 4 хамелеонов, которые будут его кусать, содержит палитру цветов 2023 хамелеонов. После этого забега условия 1, 2 воспроизведутся и можно будет перейти к следующему забегу. Первый этап заканчивается в тот момент, когда в палитре 2023 хамелеонов перестанут появляться новые цвета.

На втором этапе хамелеоны всех встретившихся нам цветов должны перекраситься в синий. Для этого для каждого цвета найдём последний момент его присутствия в алгоритме для 2023 хамелеонов, и упорядочим цвета в соответствии с этими моментами в обратном порядке. Таким образом, синий цвет будет первым, предыдущий цвет хамелеона, ставшего синим в последнюю очередь, — вторым, и так далее. Тогда, в силу построенного порядка, хамелеон цвета $k > 1$ может уменьшить номер своего цвета посредством укуса от хамелеона цвета $l < k$. Другими словами, хамелеоны цветов $1, \ldots, k$ могут стать цветов $1, \ldots, k-1$. Применив это рассуждение несколько раз, получим, что наши хамелеоны могут все поменять свой цвет на синий.

Комментарий. Нетрудно заметить, что для n цветов понадобится n хамелеонов. На самом деле это задача — один из многих вопросов вокруг (в общем случае) сетей Петри. От совсем небольших изменений задачи минимальный размер стартовой популяции может значительно увеличиться.

Например, пусть при укусе оба хамелеона могут по-разному менять свой цвет, а достичь надо состояния с одним зелёным хамелеоном и многими синими. В таком случае минимальное количество может расти быстрее не только любого многочлена от n, но и любой функции вида $n^{n^{n^{\cdots}}}$! Это было доказано совсем недавно; в ответе появляется так называемая функция Аккермана.

К счастью, если все хамелеоны должны быть одного цвета и в начале и в конце, ситуация заметно упрощается. Требование же, что при укусе меняет цвет только один из хамелеонов, даже само по себе упрощает ситуацию ещё сильнее. Оно соответствует «немедленному наблюдению» или «одностороннему взаимодействию» в сетях Петри (immediate observation, one-way communication).

В этом варианте показано, например — вполне доступными школьникам комбинаторными методами — что если два набора цветов хамелеонов, и после добавления к ним одинакового количества синих хамелеонов из первого становится можно получить второй, то достаточно добавить n^3 хамелеонов.