

11 класс, второй день

1. Дана строго возрастающая функция $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ (где \mathbb{N}_0 — множество целых неотрицательных чисел), которая удовлетворяет соотношению $f(n + f(m)) = f(n) + m + 1$ для любых $m, n \in \mathbb{N}_0$. Найдите все значения, которые может принимать $f(2023)$.

(Т.А. Гарманова)

Решение. 1) Подставляя $m = 0, n = 0$, получим $f(f(0)) = f(0) + 1$.

Если $f(0) = 0$, то получим $f(0) = f(0) + 1$, что невозможно.

2) Пусть $f(0) = a$, тогда $a \in \mathbb{N}$. Из первого пункта получаем, что $f(a) = a + 1$. Если подставить $m = 0, n = a$, то получим, что $f(2a) = f(a) + 1 = a + 2$. Поэтому значения функции на концах отрезка $[a; 2a]$ являются двумя последовательными натуральными числами. По условию функция $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ строго возрастает, а значит, на отрезке $[a; 2a]$ не должно быть других целых точек помимо a и $2a$, так как в противном случае, значения в этих точках совпадали бы с $a + 1$ или $a + 2$, что противоречило бы строгому возрастанию. $2a - a = 1$, т. е. $a = 1$.

Подставляя в исходное соотношение $m = 0$ и учитывая равенство $f(0) = 1$, получаем $f(n + 1) = f(n) + 1$. Таким образом, $f(n) = n + 1$, следовательно, $f(2023) = 2024$.

2. Какое наименьшее количество различных целых чисел нужно взять, чтобы среди них можно было выбрать как геометрическую, так и арифметическую прогрессию длины 5?

(М. А. Евдокимов)

Решение. Приведём пример шести целых чисел, удовлетворяющих условию: $-8, -2, 1, 4, 10, 16$. Числа $1, -2, 4, -8, 16$ образуют геометрическую прогрессию, а числа $-8, -2, 4, 10, 16$ — арифметическую прогрессию.

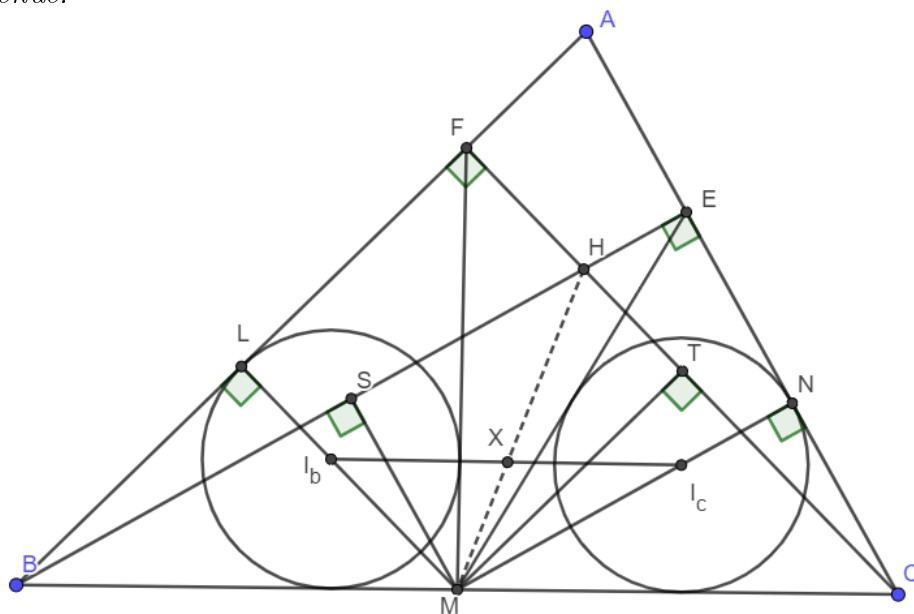
Покажем, что никакие пять различных целых чисел не удовлетворяют условию задачи. Предположим противное: пусть найдутся пять целых чисел, одновременно образующих геометрическую прогрессию и, возможно, в другом порядке, арифметическую прогрессию. Тогда они имеют вид b, bq, bq^2, bq^3, bq^4 где $b \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $b \neq 0$ и $q \neq 0$ по определению геометрической прогрессии. Числа b, bq^2, bq^4 всегда одного знака и в арифметической прогрессии идут либо подряд при $q < 0$, либо через одного при $q > 0$. В любом случае должно выполняться равенство $2bq^2 = b + bq^4$, т. е. $b(q^2 - 1)^2 = 0$, откуда $q = \pm 1$, но тогда среди чисел есть равные. Противоречие. Следовательно, пяти чисел недостаточно.

Ответ: 6.

3. В треугольнике ABC высоты BE и CF пересекаются в точке H , точка M — середина стороны BC , а X — точка пересечения внутренних касательных к окружностям, вписанным в треугольники BMF и CME . Докажите, что точки X , M и H лежат на одной прямой.

(И.Н. Михайлов)

Решение.



Способ 1. Пусть S, T — середины высот BE и CF , а L, N — середины отрезков BF и CE . Обозначим окружности, вписанные в треугольники BMF, CME , через ω_1, ω_2 , а их центры — через I_b и I_c соответственно. Треугольники BMF и CME — равнобедренные, поэтому точки I_b и I_c лежат на соответствующих высотах ML и MN этих треугольников. Отрезки BI_b и CI_c являются биссектрисами треугольников MLB и MNC , поэтому, записывая для них основное свойство биссектрисы, получаем соотношения: $\frac{MI_c}{NI_c} = \frac{MC}{NC}$, $\frac{MI_b}{LI_b} = \frac{MB}{LB}$. Разделив первое на второе и учитывая равенство $MB = MC$, получаем, что $\frac{MI_c}{MI_b} \cdot \frac{LI_b}{NI_c} = \frac{LB}{NC}$. Поскольку X — центр гомотетии,

переводящей ω_1 в ω_2 , то X лежит на линии центров I_bI_c и верно равенство: $\frac{LI_b}{NI_c} = \frac{XI_b}{XI_c}$. Но тогда

где $\frac{MI_c}{MI_b} \cdot \frac{LI_b}{NI_c} = \frac{MI_c}{MI_b} \cdot \frac{XI_b}{XI_c} = \frac{MI_c}{MI_b} \cdot \frac{S_{MXI_b}}{S_{MXI_c}} = \frac{\rho(X, MI_b)}{\rho(X, MI_c)}$, где $\rho(X, AB)$ обозначает расстояние от точки X до прямой AB . С другой стороны, по свойству средней линии $MS \parallel AC$ и $MT \parallel AB$, то есть $MS \perp BE$ и $MT \perp CF$. Значит, $MLFT$ и $MNES$ — прямоугольники, то есть $MT = LF$ и $MS = NE$. Тогда выполнены равенства $\frac{LB}{NC} = \frac{LF}{NE} = \frac{MT}{MS} = \frac{\rho(H, ML)}{\rho(H, MN)}$, где последнее равенство выполнено, поскольку MS и MT есть в точности общие перпендикуляры к парам параллельных прямых $BE \parallel MN$ и $CF \parallel ML$. Собирая все доказанные равенства вместе, получаем, что

$\frac{\rho(H, ML)}{\rho(H, MN)} = \frac{LB}{NC} = \frac{MI_c}{MI_b} \cdot \frac{LI_b}{NI_c} = \frac{\rho(X, MI_b)}{\rho(X, MI_c)}$, откуда немедленно следует, что точки M, X и H лежат на одной прямой.

Способ 2. Как и в первом решении обозначим окружности, вписанные в треугольники BMF и CME , через ω_1, ω_2 , их центры через I_b и I_c соответственно, а середины отрезков BF и CE — через L и N . Пусть также Y — точка пересечения внешних касательных к ω_1, ω_2 . Заметим, что

четвёрка точек (I_b, I_c, X, Y) — гармоническая, то есть двойное отношение $(I_b, I_c; X, Y)$ равно -1 . Спроецируем эту четвёрку точек на прямую BE с центром в точке M . Точка Y лежит на прямой AC , поскольку эта прямая является одной из внешних касательных к ω_1 и ω_2 , поэтому Y перейдёт в B . Точка I_b перейдёт в точку R пересечения прямых ML и BH , которая является серединой BH , поскольку в треугольнике BFC отрезок ML — средняя линия. Точка I_c перейдёт в бесконечно удалённую точку прямой BH , поскольку $MI_c \parallel BH$. Но при центральной проекции сохраняется двойное отношение четвёрки точек, а четвёрка $(R, \infty; H, B)$ — гармоническая. Значит, образом точки X при данной проекции является точка H , что и требовалось доказать.

4. Имеются абсолютно точные двухчашечные весы и набор из 50 гирь, веса которых равны $\arctg 1$, $\arctg \frac{1}{2}$, $\arctg \frac{1}{3}$, ..., $\arctg \frac{1}{50}$. Докажите, что можно выбрать 10 из них и разложить по 5 гирь на разные чаши весов так, чтобы установилось равновесие.

(М.А. Евдокимов)

Решение. Сначала покажем, что в данном наборе есть тройки гирь, одна из которых уравнивает две другие. Все веса не превосходят $\pi/4$, поэтому равенство $\operatorname{tg}(\arctg \frac{1}{n} + \arctg \frac{1}{m}) = \operatorname{tg}(\arctg \frac{1}{k})$ равносильно равенству $\arctg \frac{1}{n} + \arctg \frac{1}{m} = \arctg \frac{1}{k}$.

Воспользовавшись формулой $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$, получаем

$$\frac{n + m}{nm - 1} = \frac{1}{k},$$

т. е. $nm - k(n + m) = 1$. Добавив в этом равенстве к обеим частям k^2 и разложив на множители, получим $(n - k)(m - k) = k^2 + 1$. Выбирая теперь различные натуральные k и раскладывая $k^2 + 1$ на множители, находим подходящие тройки, в которых каждое число не превосходит 50. Результат для $k \leq 5$ и $n < m$ представлен в следующей таблице:

k	1	2	3	4	5
(n, m)	(2, 3)	(3, 7)	(4, 13) (5, 8)	(5, 21)	(6, 31) (7, 18)

Теперь покажем, как разложить гири по чашам:

1-я чаша		2-я чаша
1	=	2, 3
5, 21	=	4
6, 31	=	7, 18

(в таблице указано значение n для гири весом $\arctg \frac{1}{n}$).

Таким образом нам удалось выбрать 10 гирь и разложить по 5 гирь на разные чаши весов так, чтобы установилось равновесие.

5. В выпуклом многограннике обозначим через V , P и T соответственно число вершин, рёбер и максимальное число треугольных граней, которые имеют общую вершину. Докажите, что $V\sqrt{P+T} \geq 2P$.

Например, для тетраэдра ($V = 4$, $P = 6$, $T = 3$) выполняется равенство, а для треугольной призмы ($V = 6$, $P = 9$, $T = 1$) или куба ($V = 8$, $P = 12$, $T = 0$) имеет место строгое неравенство.

(О.Н. Косухин)

Решение. Степенью вершины многогранника называется количество исходящих из неё рёбер этого многогранника. Вершины называются смежными, если они соединены ребром.

Пусть A — произвольная вершина многогранника, k — её степень, m_j — степени всех смежных с ней вершин ($j = 1, 2, \dots, k$), занумерованных в произвольном порядке. Тогда $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ — это количество всех рёбер, исходящих из смежных с A вершин, учтённых один или два раза, причём дважды учтены те и только те рёбра, которые лежат против вершины A в некоторой треугольной грани многогранника. Значит, $m_1 + m_2 + \dots + m_k \leq P + T$. Отсюда, используя известное неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим, получаем

$$\frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} + \dots + \sqrt{m_k}}{k} \leq \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_k}{k}} \leq \frac{\sqrt{P+T}}{\sqrt{k}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\frac{m_1}{k}} + \sqrt{\frac{m_2}{k}} + \dots + \sqrt{\frac{m_k}{k}} \leq \sqrt{P+T}.$$

Обозначим сумму в левой части последнего неравенства через $S(A)$.

Пусть A_i ($i = 1, 2, \dots, V$) — все вершины многогранника, занумерованные в произвольном порядке, а n_i ($i = 1, 2, \dots, V$) — их соответственные степени. Для любой пары смежных вершин A_i и A_j по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{n_j}{n_i}} + \sqrt{\frac{n_i}{n_j}} \geq 2.$$

Складывая эти неравенства по всем неупорядоченным парам $\{A_i, A_j\}$ смежных вершин многогранника, получаем

$$\sum_{i=1}^V S(A_i) \geq 2P.$$

По доказанному выше неравенству $S(A) \leq \sqrt{P+T}$ отсюда следует требуемая оценка.