LXXXVI
Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Москва
Издательство МЦНМО
2023

LXXXVI Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Москва
Издательство МЦНМО
2023

Департамент образования и науки города Москвы
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Московское математическое общество
Факультет математики НИУ ВШЭ
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты mmo@mccme.ru

☞ Материалы данной книги размещены на странице

www.mccme.ru/mmo

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

Председатель оргкомитета LXXXVI ММО
д.ф.-м.н. *С. Горчинский*.

Сборник подготовили:

Е. Атамась, Е. Бакаев, А. Бегунц, А. Блинков, Д. Бродский, В. Буланкина, Б. Бутырин, А. Волостнов, М. Волчкевич, Г. Гальперин, Т. Гарманова, Т. Голенищева-Кутузова, А. Голованов, Д. Горяшин, А. Грибалко, А. Гусев, Г. Гусев, А. Доледенок, С. Дориченко, М. Евдокимов, П. Закорко, А. Заславский, Т. Казицына, А. Канель-Белов, В. Клепцын, И. Климанова, К. Кноп, М. Колодей, Д. Копьев, Т. Корчемкина, Е. Костина, О. Косухин, М. Лисицын, М. Малкин, Д. Мухин, Г. Мерзон, Г. Минаев, И. Михайлов, Е. Неустроева, В. Новиков, А. Панкратьев, А. Пешнин, А. Пономарев, А. Попов, В. Радионов, А. Райгородский, М. Раскин, И. Раскина, В. Ретинский, Я. Слабодич, А. Соколов, В. Соколова, А. Тертерян, А. Устинов, М. Федотова, Б. Френкин, А. Хачатурян, М. Хачатурян, А. Шаповалов, И. Шейпак, А. Юран, И. Ященко

6 класс

1. На доске написаны две суммы:

$$1+22+333+4444+55555+666666+7777777+\\ +88888888+999999999$$

$$9+98+987+9876+98765+987654+9876543+\\ +98765432+987654321$$

Определите, какая из них больше (или они равны).

(*Г. Гальперин*)

Ответ: суммы равны.

Решение. Запишем обе суммы столбиком, причём вторую для большей наглядности в обратном порядке. В обеих суммах в разряде единиц будут складываться цифры от 1 до 9, в разряде десятков — цифры от 2 до 9, в разряде сотен — цифры от 3 до 9 и так далее. И цифра, получающаяся в каждом разряде, и перенос в старший разряд окажутся в обоих случаях одинаковыми. Поэтому и результат сложения будет один и тот же.

$$
\begin{array}{lr}
 & {}^{4}\\
 & 1\\
 & 22\\
 & 333\\
 & 4444\\
+ & 55555\\
 & 666666\\
 & 7777777\\
 & 88888888\\
 & 999999999\\
\hline
 & 5
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lr}
 & {}^{4}\\
 & 987654321\\
 & 98765432\\
 & 9876543\\
 & 987654\\
+ & 98765\\
 & 9876\\
 & 987\\
 & 98\\
 & 9\\
\hline
 & 5
\end{array}
$$

Обе суммы, конечно, можно непосредственно вычислить, получается 1097393685. Но это достаточно трудоёмкий и неинтересный путь.

Комментарий. Можно представить себе, как цифры во втором примере «падают вниз», и второй пример превращается в первый.

2. Вася в течение 10 дней решал задачи — каждый день хотя бы одну. Каждый день (кроме первого), если погода была пасмурная, то он решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а если солнечная — на одну задачу меньше. За первые 9 дней Вася решил 13 задач. Какая погода была на десятый день? (*Б. Френкин*)

Ответ: пасмурная.

Решение. Рассмотрим любые два дня, идущие подряд. Каждый день решено хотя бы по одной задаче, но ровно по одной оба дня быть не может, значит, за эти два дня решено минимум три задачи. Таким образом, за первые 8 дней Вася решил как минимум $4 \cdot 3 = 12$ задач. Если бы он за девятый день решил хотя бы две задачи, число решённых за 9 дней задач превысило бы 13. Так что за 9-й день была решена ровно одна задача. На 10-й день погода была пасмурной (и Вася решил две задачи), в противном случае он бы решил в этот день 0 задач, а по условию это не так.

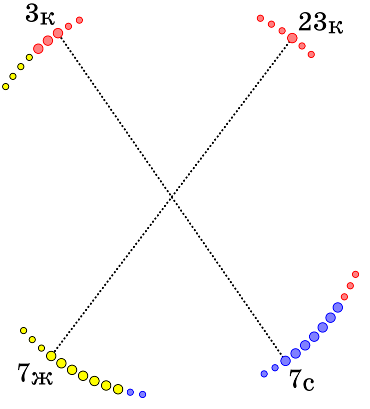
Можно привести пример, как такое могло быть: Вася за эти 10 дней последовательно решал 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 задачи. Нетрудно доказать, что этот пример единственен. В самом деле, доказательство, что Вася решил за 9-й день ровно одну задачу, применимо к любому нечётному дню.

Комментарий. Казалось бы, ответ на вопрос можно было бы дать, вообще не учитывая ни сколько было дней, ни сколько всего решено задач. Действительно, пасмурная погода в последний день ничему противоречить не может, а солнечная может, причём ровно в том случае, когда в предпоследний день решена ровно одна задача. А раз нас просят определить погоду в последний день, то ответ «пасмурная». Тем не менее, такое рассуждение не может считаться решением, так как исходит из неявного предположения, что на задачу можно дать однозначный ответ.

3. Сто сидений карусели расположены по кругу через равные промежутки. Каждое покрашено в жёлтый, синий или красный цвет. Сиденья одного и того же цвета расположены подряд и пронумерованы 1, 2, 3, ... по часовой стрелке. Синее сиденье № 7 противоположно красному № 3, а жёлтое № 7 — красному № 23. Найдите, сколько на карусели жёлтых сидений, сколько синих и сколько красных. (*А. Шаповалов*)

Ответ: жёлтых 34, синих 20, красных 46.

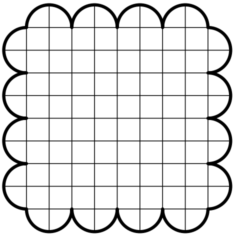
Решение. Между 3-м и 23-м красными расположено 19 сидений, значит, между 7-м синим и 7-м жёлтым их столько же. Это первые шесть жёлтых сидений и, стало быть, $19-6=13$ синих с номерами, бо́льшими 7. Отсюда находим, что синих сидений $7+13=20$.



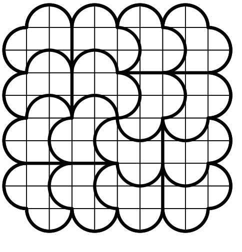
Проходя полкруга по часовой стрелке от 3-го красного к 7-му синему сиденью, мы минуем (не считая этих двух) $(100-2):2=49$ сидений. Шесть из них синие, а остальные $49-6=43$ — красные. Поэтому всего красных сидений $3+$ $+43=46$. Количество жёлтых сидений $100-20-46=34$.

4. Разрежьте «печенье» на 16 равных частей (т. е. одинаковых по размеру и по форме). Разрезы не обязательно прямолинейные.

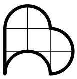
(*Т. Голенищева-Кутузова*)



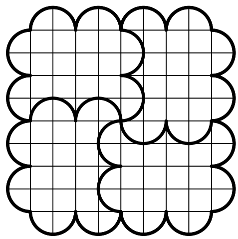
Ответ:



Комментарий. Как можно придумать разрезание? В «печенье» 64 клеточки и 16 полукругов по краям. Значит, в каждой части скорее всего будет полукруг и 4 клеточки, но тогда откуда внутри фигуры (не на границе) появятся полукруги? Вероятно, придётся делать полукруглые разрезы — но тогда у фигурок будут не только выпуклые полукруги, но и вогнутости в виде полукруга. Из соображений площади получается одна вогнутость и две выпуклости. Таких фигурок бывает две разных, одна из них подходит:

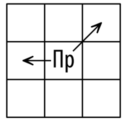


Можно неформально рассуждать и так. Фигура имеет центр и две оси симметрии и поэтому искомое разрезание можно попытаться получить, ведя из центра к краю печенья четыре одинаковые линии разреза (каждый разрез получается из предыдущего поворотом на 90°). Прямыми эти линии быть не должны, попробуем дуги окружности и получим вот такой рисунок:

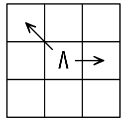


Каждую из получившихся одинаковых четвертушек печенья уже не очень сложно разрезать на четыре фигурки, описанные выше.

5. Фигура «скрипач» бьёт клетку слева по стороне (локтем) и справа вверху по диагонали (смычком), если он правша, и, наоборот, правую клетку по стороне и левую верхнюю по диагонали, если левша (все скрипачи сидят лицом к нам). Посадите как можно больше «скрипачей» в «оркестр» 8×8 клеток, чтобы они не били друг друга. (Вы можете использовать любое количество как правшей, так и левшей.)



так бьёт правша



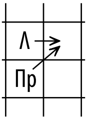
а так левша

(*М. Хачатурян*)

Решение. Разместить 32 скрипача несложно: например, можно заполнить четыре столбца через один (неважно, правшами или левшами). Однако можно разместить и больше. Возможный пример с 34 скрипачами приведён на рисунке.

Пр	Л			Пр	Л		
		Пр	Л			Пр	Л
Пр	Л			Пр	Л		
		Пр	Л			Пр	Л
Пр	Л			Пр	Л		
		Пр	Л			Пр	Л
Пр	Л			Пр	Л		Пр
Л		Пр	Л		Пр		Л

Комментарий. Можно доказать, что более 34 скрипачей разместить не удастся. В самом деле, рассмотрим вертикальную полосу шириной в две клетки. Всякий скрипач, стоящий в этой полосе и при этом не в верхней строке, бьёт одну какую-то клетку в этой же полосе. Мы можем поставить эту пустую клетку в соответствие данному скрипачу. Если при этом оказалось, что два скрипача бьют одну и ту же пустую клетку (возможны два аналогичных друг другу варианта этого, один из них показан на рисунке), то клетка, расположенная под дважды побитой, тоже обязана быть пустой, поэтому её можно поставить в соответствие одному из двух скрипачей, допустим, нижнему. Если же эту клетку бьёт смычком скрипач, стоящий ещё ниже, поставим ему в соответствие соседнюю с ним по горизонтали клетку (она заведомо пустая), и так далее.



Итак, в полосе может быть максимум 9 скрипачей — двое в верхних клетках и ещё семеро в оставшихся 14 клетках, потому что каждому скрипачу там соответствует пустая клетка, то есть занятых клеток не более половины.

Однако две полосы с девятью скрипачами не могут соседствовать, иначе в верхней строке четыре скрипача сидели бы подряд. Поэтому таких полос не более двух, в оставшихся двух полосах максимум по 8 скрипачей, так что всего в оркестре не более чем $9+9+8+8=34$ музыканта.

6. Кащей заточил в темницу толпу пленников и сказал им: «Завтра вам предстоит испытание. Я выберу нескольких из вас (кого захочу, но минимум троих), посажу за круглый стол в каком-то порядке (в каком пожелаю) и каждому на лоб наклею бумажку с нарисованной на ней фигуркой. Фигурки могут повторяться, но никакие две разные фигурки не будут наклеены на одинаковое число людей.

Каждый посмотрит на фигурки остальных, а своей не увидит. Подавать друг другу какие-то знаки запрещено. После этого я наклейки сниму и велю всех развести по отдельным камерам. Там каждый должен будет на листе бумаги нарисовать фигурку. Если хоть один нарисует такую, какая была у него на лбу, всех отпущу. Иначе останетесь здесь навечно».

Как пленникам договориться действовать, чтобы спастись? (*Т. Голенищева-Кутузова, Т. Казицына*)

Решение. Поскольку разных фигурок разное количество, какая-то фигурка использована больше остальных. Назовём её *главной*. Если фигурок любой другой формы хотя бы на две меньше, то каждый пленник видит, какая фигурка главная. Если все нарисуют её, среди них будут и угадавшие верно.

Пусть это не так и, например, главная фигурка — квадрат, следующая по числу — круг, причём кругов ровно на один меньше, чем квадратов. Тогда пленники с квадратами на лбу будут видеть одинаковое количество кругов и квадратов и не смогут определить наверняка главную фигурку (остальные, как и раньше, будут видеть, какая фигурка главная, и могут нарисовать её). Для этого случая есть несколько спасительных алгоритмов.

Первый — из двух кандидатов в главные фигурки назвать ближайшую по часовой стрелке. Докажем, что хоть кто-то угадает. Будем учитывать только квадраты и круги, игнорируя остальных пленников. Может ли после каждого квадрата по часовой стрелке следовать круг? Нет, так как квадратов больше. Тот пленник с квадратом, после которого по часовой стрелке следует квадрат, угадает и всех спасёт.

Работает и противоположный алгоритм: из двух кандидатов в главные фигурки называть не ту, которая ближе всего по часовой стрелке. Для доказательства тоже рассмотрим лишь круги и квадраты. Как минимум в одном месте после пленника с квадратом следует по часовой стрелке пленник с кругом. Этот пленник с квадратом верно нарисует свою фигурку.

7 класс

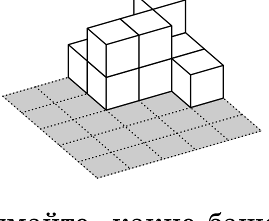
1. Аня называет дату красивой, если все шесть цифр её записи различны. Например, 19.04.23 — красивая дата, а 19.02.23 и 01.06.23 — нет. А сколько всего красивых дат в 2023 году? (*М. Евдокимов*)

Ответ: 30.

Решение. Цифры 2 и 3 уже участвуют в номере года, поэтому из всех месяцев нужно рассмотреть только 01, 04, 05, 06, 07, 08, 09 и 10. В каждом из этих номеров есть 0, поэтому в красивой дате не будет дня с номером, начинающимся с 0, 2 и 3, а также не будет дней 10, 11, 12 и 13 — остаются только 6 дней, с 14 по 19. Но тогда в каждом месяце красивая дата начинается с 1, и подходят только 6 месяцев, с 04 по 09. Остаётся заметить, что для каждого подходящего месяца ровно один день, оканчивающийся на ту же цифру, не будет красивым — значит, в каждом из 6 месяцев по 5 красивых дат, а всего в 2023 году — 30.

2. Посреди пустого бассейна стоит квадратная платформа 50×50 сантиметров, расчерченная на клеточки 10×10 см. На клетки платформы Лена ставит башенки из кубиков $10 \times 10 \times 10$ см. Потом Таня включает воду.

Если высоты башенок были такие, как в таблице справа, то при уровне воды 5 см был 1 остров, при уровне воды 15 см было два острова (если острова «граничат по углу», то считаются отдельными островами), а при уровне воды 25 см все башенки оказались закрыты водой и стало 0 островов.



0	0	1	1	2
0	0	2	2	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Придумайте, какие башенки из кубиков можно поставить, чтобы количество островов было следующим:

Уровень воды (см)	5	15	25	35	45
Количество островов	2	5	2	5	0

В ответе напишите в каждой клетке квадрата 5 на 5, сколько кубиков на ней стоит.

(*Т. Голенищева-Кутузова, И. Ященко*)

Ответ: один из возможных примеров приведён на рисунке ниже. На следующих рисунках показано, какие клетки закрыты водой при разных уровнях воды. На 3d-модель можно посмотреть на сайте Математического праздника, https://olympiads.mccme.ru/matprazdnik/sol23.html

4	3	4	3	4
0	0	1	0	0
0	4	3	4	0
0	0	0	0	0
2	1	2	1	2

4	3	4	3	4
		1		
	4	3	4	
2	1	2	1	2

5 см

4	3	4	3	4
	4	3	4	
2		2		2

15 см

4	3	4	3	4
	4	3	4	

25 см

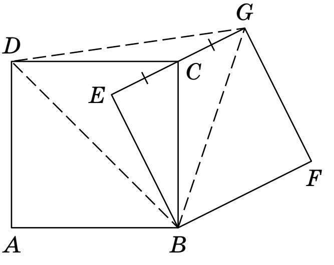
4		4		4
	4		4	

35 см

Комментарий. Изучая, как меняется рельеф местности при постепенно поднимающемся уровне воды, можно доказать замечательную теорему Эйлера. Об этом можно прочитать в статье М. Шубина «Топология и... рельеф местности» (журнал «Квант» № 8 за 1982 год, kvant.ras.ru).

3. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4).

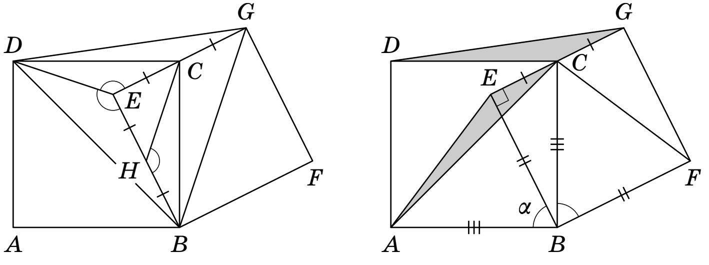
4. Два квадрата расположены как на рисунке, отмеченные отрезки равны. Докажите, что треугольник BDG равнобедренный. **[*6 баллов*]**



Решение 1. Рассмотрим треугольники DEG и DEB. У них общая сторона DE, равные стороны EG и EB (как две стороны квадрата). Осталось доказать, что углы DEG и DEB

равны, — тогда указанные треугольники будут равны (по двум сторонам и углу между ними), а значит, будут равны и соответственные стороны DG и DB.

Равенство этих углов можно доказать так. Отметим H — середину отрезка EB. Заметим, что $HB = EC$ как половины стороны правого квадрата, а также $BC = DC$, $\angle HBC = 90^\circ - \angle ECB = \angle ECD$. Значит, треугольники HBC и ECD равны по двум сторонам и углу между ними. Так как треугольник EHC равнобедренный прямоугольный, $\angle EHC = 45^\circ$, а $\angle DEG = \angle CHB = 180^\circ - \angle EHC = 135^\circ$. Но тогда и $\angle DEB = 360^\circ - \angle DEG - \angle GEB = 360^\circ - 135^\circ - 90^\circ = 135^\circ$.



Решение 2. Заметим, что $BD = AC$ как диагонали квадрата. Если мы докажем, что треугольники CEA и GCD (на рисунке справа отмечены серым) равны, то из равенства соответственных сторон AC и DG будет следовать $DG = AC = BD$. Как доказать равенство этих треугольников?

Рассмотрим треугольники ABE и CBF. У каждого из них две стороны равны сторонам исходных квадратов. Равны и углы между этими сторонами: каждый из них дополняет угол EBC до прямого угла квадрата. Значит, эти треугольники равны.

Но треугольник BCF равнобедренный (так как он «расположен в квадрате симметрично»; более формально: CB и CF — гипотенузы прямоугольных треугольников CBE и CFG, равных по двум катетам). Значит, $CF = CB = AB = AE$.

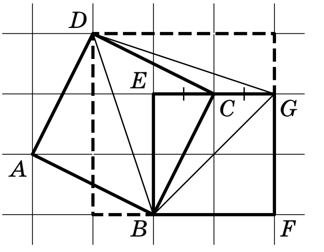
Теперь мы знаем, что в серых треугольниках равны стороны AE и DC, а стороны CE и CG равны по условию. Осталось доказать, что равны углы между сторонами.

Если угол при основании равнобедренных треугольников ABE и CBF равен α, то $\angle AEC = 90^\circ + \alpha$. Но и $\angle DCG = 360^\circ - \angle BCD - \angle BCG = 360^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$

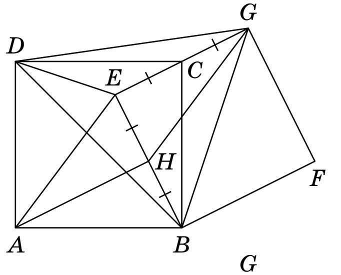
($\angle CBF = \alpha$ и $\angle BCG$ дают в сумме 180° как односторонние при параллельных сторонах квадрата и секущей BC).

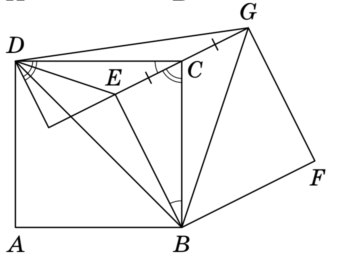
Равенство серых треугольников (а вместе с ним и утверждение задачи) доказано.

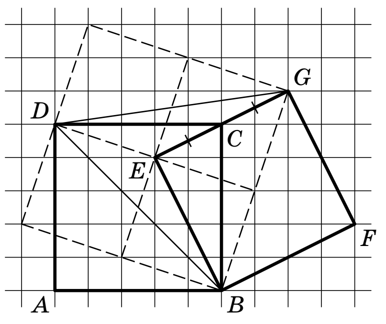
Решение 3. Перенесём чертёж на клетчатую бумагу. Начнём с квадрата $BEGF$: пусть это клетчатый квадрат 2×2. По отрезку BC построим квадрат $ABCD$. Теперь видно, что отрезки DG и DB равны как гипотенузы прямоугольных треугольников с катетами длиной 1 клетка и 3 клетки.



Комментарий. Есть множество дополнительных построений, которые также позволяют решить задачу. Вот некоторые из них:



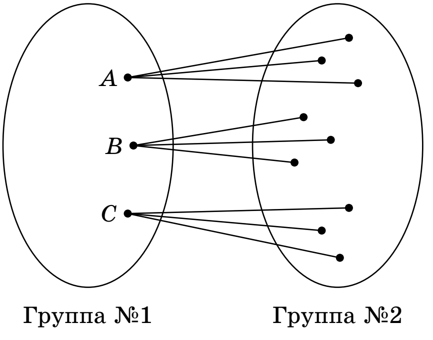




5. В параллели 7-х классов 100 учеников, некоторые из которых дружат друг с другом. 1 сентября они организовали несколько клубов, каждый из которых основали три ученика (у каждого клуба свои). Дальше каждый день в каждый клуб вступали те ученики, кто дружил хотя бы с тремя членами клуба. К 19 февраля в клубе «Гепарды» состояли все ученики параллели. Могло ли получиться так, что в клубе «Черепахи» в этот же день состояло ровно 50 учеников? (*В. Клепцын, М. Раскин*)

Ответ: да, могло.

Решение. Разделим семиклассников на две группы по 50 учеников. Пусть в каждой группе все ученики дружат со всеми, причём у троих учеников A, B и C из первой группы есть ещё по 3 разных друга во второй группе, и больше никто ни с кем не дружит.



Тогда в клубе «Гепарды», основанном любыми тремя учениками второй группы, после первого дня будет состоять вся вторая группа, после второго дня в него будут входить A, B и C из первой, а уже после третьего дня в клубе «Гепарды» будут состоять все ученики параллели.

Если же основателями клуба «Черепахи» будут A, B и C из первой группы, то на следующий день вся первая группа будет в клубе «Черепахи», но ни у кого из второй группы нет трёх друзей в первой, поэтому никто из второй группы в этот клуб не попадёт.

6. У царя есть 7 мешков с золотыми монетами, в каждом по 100 монет. Царь помнит, что в одном мешке все монеты весят 7 г, во втором 8 г, в третьем 9 г, в четвёртом 10 г, в пятом 11 г, в шестом 12 г, в седьмом 13 г, но не помнит, где какие.

Царь сообщил это придворному мудрецу и указал на один из мешков. Мудрец может вынимать из этого и из других мешков любое количество монет, но на вид они все одинаковы. Однако у мудреца есть большие двухчашечные весы без гирь (они точно покажут, равны ли веса на чашках, а если нет, то какая чашка тяжелее). Может ли мудрец определить, какие монеты в указанном мешке, сделав не более двух взвешиваний? (*М. Евдокимов*)

Ответ: да, может.

Решение. Заметим что если взять из каждого мешка по монете, то их суммарный вес будет равен $7+8+\ldots+13=70$ грамм. Назовём такой набор монет *комплектом*.

Пусть в указанном царём мешке монеты весят x грамм каждая. Если взять 70 таких монет, то их вес равен $70x$ — такой же, как у x комплектов. То есть если мудрец узнает, сколько комплектов нужно, чтобы уравновесить эти 70 монет, он ответит на вопрос царя.

Пускай первым взвешиванием мудрец сравнит вес этих 70 монет и 10 комплектов. Если весы в равновесии, то $x = 10$ и задача решена, если монеты перевесили, то $x > 10$, если перевесили комплекты, то $x < 10$.

Если мудрец знает, что $x > 10$, то за одно взвешивание он легко выяснит, весят монеты 11, 12 или 13 г каждая. Действительно, теперь можно сравнить вес 70 монет и 12 комплектов. Если монеты перевесили, то $x = 13$, если весы в равновесии, то $x = 12$, если комплекты перевесили, то $x = 11$.

Аналогичным образом мудрец может поступить в случае $x < 10$: монеты тогда могут весить по 7, 8 или 9 г, так что осталось сравнить вес 70 монет и 8 комплектов.

Отметим, что при каждом взвешивании мудрец использует не более чем $70+12$ монет из мешка, на который указал царь, и не более чем по 12 монет из остальных мешков. Так что монет в мешках ему хватит.

Комментарии. 1. Если снять с обеих чаш одинаковый набор монет, то результат взвешивания не изменится. Пользуясь этим соображением, мудрец сможет решить задачу и когда в каждом мешке хотя бы по $70-8=62$ монеты.

2. В решении используется лишь суммарный вес 7 монет. Поэтому аналогичным образом можно решить задачу не только для монет весом 7, 8, ..., 13 грамм, но и для любого другого набора из семи различных весов (при достаточном количестве монет в мешках).

8 класс

1. Даны три различных ненулевых числа. Петя и Вася составляют квадратные уравнения, подставляя эти числа в качестве коэффициентов, но каждый раз в новом порядке. Если у уравнения есть хотя бы один корень, то Петя получает фантик, а если ни одного, то фантик достаётся Васе. Первые три фантика достались Пете, а следующие два — Васе. Можно ли определить, кому достанется последний, шестой фантик? (*М. Евдокимов*)

Ответ: можно, последний фантик достанется Пете.

Решение. Квадратное уравнение имеет хотя бы один корень в точности тогда, когда его дискриминант неотрицателен. Если поменять местами первый и последний коэффициенты, то дискриминант не изменится. Значит, все шесть уравнений разбиваются на пары, в каждой из которых либо оба уравнения имеют корни, либо оба не имеют. Поэтому количество уравнений, имеющих корни, чётно. Значит, последний фантик достанется Пете.

2. На столе в ряд стоят 23 шкатулки, в одной из которых находится приз. На каждой шкатулке написано либо «Здесь приза нет», либо «Приз в соседней шкатулке». Известно, что ровно одно из этих утверждений правдиво. Что написано на средней шкатулке? (*М. Евдокимов*)

Ответ: «Приз в соседней шкатулке».

Решение. Заметим, что на шкатулке, соседней с содержащей приз, всегда написано верное утверждение. А раз у нас всего одно утверждение истинно, то и такая «соседняя» шкатулка всего одна. Но тогда приз лежит в одной из крайних шкатулок, а истинное утверждение написано на соседней с ней шкатулке. Следовательно, шкатулка в центре не содержит приз и должна иметь ложную надпись. А значит, её надпись: «Приз в соседней шкатулке».

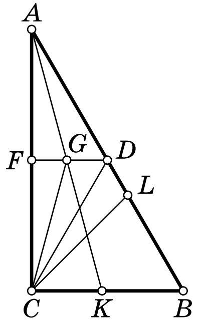
3. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30 градусов одна биссектриса в два раза короче другой. (*Е. Бакаев*)

Решение 1. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Будем доказывать, что биссектриса AK в два раза больше биссектрисы CL данного треугольника.

Достроим ABC до правильного треугольника ABB'. При этом AK образует со стороной правильного треугольника угол 15°.

Пусть прямая, проходящая через B' параллельно CL, пересекает AB в точке N. Тогда CL — средняя линия в треугольнике $B'NB$, значит, $B'N = 2CL$. В то же время отрезок $B'N$, как и AK, образует угол $60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ со стороной равностороннего треугольника, значит, $AK = B'N = 2CL$.

Решение 2. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Будем доказывать, что биссектриса AK в два раза больше биссектрисы CL данного треугольника. Проведём в треугольнике ABC среднюю линию DF, параллельную BC (точка F — середина AC). Пусть она пересекает биссектрису AK в точке G. Тогда FG — средняя линия треугольника ACK (так как $FG \parallel CK$ и F — середина AC), значит, G — середина AK. Так как CG — медиана прямоугольного треугольника ACK,



$\angle CAG = \angle ACG = 15^\circ$. Так как CD — медиана прямоугольного треугольника ABC, $\angle DAC = \angle DCA = 30^\circ$, отсюда $\angle GCD = \angle ACD - \angle ACG = 15^\circ$, $\angle DCL = \angle ACL - \angle ACD = 15^\circ$, $\angle ADF = \angle ABC = 60^\circ$ (соответственные углы при DF и BC и секущей AB), $\angle FDC = \angle FDA = 60^\circ$ (DF — медиана, а значит, и биссектриса в равнобедренном треугольнике ACD), $\angle CDL = \angle DAC + \angle DCA = 60^\circ$. Треугольники CGD и CLD равны по стороне CD и парам углов $\angle GCD$, $\angle LCD$ и $\angle CDG$, $\angle CDL$. Отсюда $CL = CG = AG = AK/2$, что и требовалось.

Решение 3. Пусть дан треугольник ABC, где $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, AK и CL — биссектрисы, CD — медиана. Тогда по свойству прямоугольного треугольника $CD = AD = BD$, в треугольнике BCD есть две равные стороны и угол 60°, поэтому он равносторонний. Тогда $\angle ABK = \angle CDL = 60^\circ$. При этом $\angle KAB = \frac{1}{2}\angle BAC = 15^\circ$ и

$$\angle LCD = \angle ACL - \angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACB - \angle BAC = 15^\circ.$$

Тогда треугольники ABK и CDL подобны по двум углам. Поэтому $AK/CL = AB/CD = AB/BC = 2$, что и требовалось.

Решение 4. Пусть дан треугольник ABC, где $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, AK и CL — биссектрисы. Построим точку M так, что $CLAM$ будет параллелограммом. Тогда $\angle KCM = 90^\circ + \angle ACM = 90^\circ + \angle CAB = 120^\circ$, а $\angle KAM = 15^\circ + \angle CAM = 15^\circ + \angle ACL = 60^\circ$. Это значит, что точки A, K, C и M лежат на одной окружности. Рассмотрим треугольник AKM. В нём $\angle KAM = 60^\circ$, а $\angle AMK = \angle ACK = 90^\circ$ в силу вписанности $AKCM$. Следовательно, его гипотенуза AK вдвое больше катета AM по свойству прямоугольного треугольника с углом 60°. Тогда $AK = 2AM = 2CL$ в силу свойства параллелограмма.

4. Назовём натуральное число *хорошим*, если в его десятичной записи есть только нули и единицы. Пусть произведение двух хороших чисел оказалось хорошим числом. Правда ли, что тогда сумма цифр произведения равна произведению сумм цифр сомножителей?

(*В. Клепцын, К. Кноп*)

Ответ: не обязательно.

Решение. Рассмотрим произведение двух хороших чисел

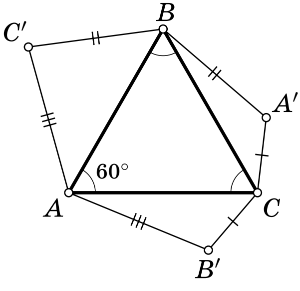
$$(10^2 + 10^4 + 10^8 + \ldots + 10^{1024}) \times \\ \times (10^{N-2} + 10^{N-4} + 10^{N-8} + \ldots + 10^{N-1024}),$$

где N — большое чётное число (например, миллион). Когда мы раскроем все скобки, то получим много слагаемых, каждое из которых — степень числа 10. Если бы все слагаемые были разными, мы получили бы хорошее число с суммой цифр, равной произведению сумм цифр исходных чисел. Посмотрим, получились ли какие-то слагаемые одинаковыми. Если $10^a \cdot 10^{N-b} = 10^x \cdot 10^{N-y}$, где $x \neq a$, то $a + N - b = x + N - y$, откуда $a + y = b + x$. Так как a, b, x, y — степени двойки, равенство возможно лишь в случае $a = b$, $x = y$. Значит, у нас будет 10 совпавших слагаемых, равных 10^N, в сумме они дадут 10^{N+1}.

Заметим, что никакие другие слагаемые не равны 10^{N+1}, так как у всех слагаемых показатель степени чётный.

Поэтому сумма слагаемых будет хорошим числом, но сумма его цифр будет на 9 меньше, чем произведение сумм цифр исходных чисел.

5. На сторонах равностороннего треугольника ABC построены во внешнюю сторону треугольники $AB'C$, $CA'B$, $BC'A$ так, что получился шестиугольник $AB'CA'BC'$, в котором каждый из углов $A'BC'$, $C'AB'$, $B'CA'$ больше 120°, а для сторон выполняются равенства $AB' = AC'$, $BC' = BA'$, $CA' = CB'$. Докажите, что из отрезков AB', BC', CA' можно составить треугольник. (*Д. Бродский*)



Решение. Чтобы из предложенных отрезков можно было сложить треугольник, достаточно доказать, что наибольший из отрезков AB', BC', CA' меньше суммы двух других. Мы можем считать, что наибольший из этих отрезков — это AB'. Тогда повернём треугольник $AB'C$ на 60° против часовой стрелки относительно точки A. Точка C при этом перейдёт в точку B из-за того, что треугольник ABC — правильный, а точка B' — в новую точку B''. Теперь рассмотрим треугольник $AC'B''$: в нём боковые стороны AC' и AB'' равны, а угол между ними больше 60°, поскольку угол $C'AB'$ по условию больше 120°. Следовательно, углы при основании $C'B''$ будут меньше 60°. Поскольку в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $C'B'' > AB'' = AB'$. Рассмотрим треугольник $B''C'B$. В нём по неравенству треугольника $C'B'' < BC' + B''B = BC' + CB' = BC' + CA'$. Тогда из двух полученных неравенств следует, что $AB' < C'B'' < BC' + CA'$. Значит, из отрезков AB', BC', CA' можно составить треугольник.

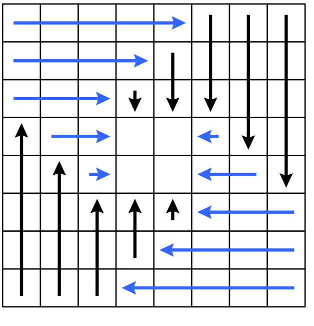
6. На каждую клетку доски 8×8 поставили по сторожу. Каждый сторож может смотреть в одном из четырёх направлений (вдоль линий доски) и сторожить всех сторожей на линии своего взгляда. Для какого наибольшего k можно так направить взгляды сторожей, чтобы каждого сторожа сторожили не менее k других сторожей? (*В. Новиков*)

Ответ: 5.

Решение. Докажем, что $k \leqslant 5$. Для этого предположим, что $k \geqslant 6$. Рассмотрим сторожей, стоящих в углах доски. На каждого из них смотрят по крайней мере 6 сторожей, и эти сторожа должны стоять у края доски. При этом, если какой-то сторож видит одного из угловых сторожей, то он не видит других угловых сторожей. Таким образом, хотя бы 24 сторожа, стоящих у края доски, смотрят вдоль сторон доски. Тогда «внутрь» доски, не на угловых сторожей, смотрит не более четырёх сторожей, стоящих у границ.

Рассмотрим теперь сторожей, стоящих в центральном квадрате 6×6. Посчитаем для них максимально возможное количество «входящих взглядов». (Взгляды, обращённые на сторожей на границе доски, подсчитывать не будем.) Это число не превосходит $184 = 24 + 100 + 48 + 12$. (В этой сумме 24 — от четырёх сторожей на границе, 100 — по 5 взглядов от каждого из 20 сторожей на границе квадрата 6×6, 48 — по 4 взгляда от каждого из 12 сторожей на границе квадрата 4×4, 12 — по 3 взгляда от каждого из 4 сторожей из центрального квадрата 2×2.) Таким образом, на 36 сторожей приходится $184 = 36 \cdot 5 + 4 < 36 \cdot 6$ взглядов. Значит, среди сторожей есть те, которым досталось меньше 6 взглядов.

Примеры для $k = 5$ могут быть устроены по-разному. Один из вариантов изображён на рисунке (длинные стрелки означают, что несколько сторожей подряд смотрят в одну сторону, сторожа в центре могут смотреть в любую сторону).



9 класс

1. Саша записывает числа 1, 2, 3, 4, 5 в каком-нибудь порядке, расставляет знаки арифметических операций «$+$», «$-$», «$\times$» и скобки и смотрит на результат полученного выражения. Например, он может получить число 8 с помощью выражения $(4-3)\times(2+5)+1$. Может ли он получить число 123?

Формировать числа из нескольких других нельзя (например, из чисел 1 и 2 нельзя составить число 12).

(*А. Голованов, А. Соколов*)

Ответ: да, может.

Решение. Например, $3\times(2\times4\times5+1)=123$.

2. Даны две последовательности из букв А и Б, в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается вставить в какое-то место последовательности (возможно, в начало или в конец) одну или несколько одинаковых букв или убрать из последовательности одну или несколько подряд идущих одинаковых букв. Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций. (*В. Новиков*)

Решение 1. Сначала решим аналогичную задачу для последовательностей из двух букв, а именно докажем, что из одной последовательности можно получить другую не более чем за 2 операции.

Если одна из последовательностей — это АА, а другая — ББ, то уберём все буквы первой последовательности, а затем добавим буквы второй последовательности. В противном случае в последовательностях есть одинаковые буквы (возможно, стоящие на разных местах). Оставим в первой последовательности эту букву, а другую уберём. Затем добавим в нужное место букву, которой недостаёт для второй последовательности.

Вернёмся к первоначальной задаче. Разобьём каждую последовательность на 50 пар подряд идущих букв. За две операции каждую пару первой последовательности можно переделать в соответствующую пару второй последовательности.

Решение 2. Разобьём каждую из последовательностей на блоки подряд идущих одинаковых букв. В обеих последовательностях получится не более 50 блоков из букв А и не более 50 блоков из букв Б. Если получилось ровно по 50 блоков, то в обеих последовательностях буквы чередуются. Тогда либо последовательности совпадают, либо из первой можно получить вторую, отбросив первую букву и приписав такую же букву в конец.

Пусть в какой-то из последовательностей блоков из какой-то буквы не более 49. Понятно, что если из второй последовательности с помощью операций можно получить первую, то, проделав операции в обратном порядке, получим из первой последовательности вторую. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что в первой последовательности не более 49 блоков из букв А. Проделаем с первой последовательностью следующие операции.

1. Уберём все буквы А. На это потребуется не более 49 операций.

2. При необходимости изменим количество букв Б так, чтобы их количество совпало с количеством букв Б во второй последовательности. На это потребуется не более 1 операции.

3. Добавим в нужные места блоки из букв А, равные по длине соответствующим блокам букв А из второй последовательности. На это потребуется не более 50 операций.

В итоге вторая последовательность получена не более чем за 100 операций.

Решение 3. Докажем, что на самом деле можно справиться за не более чем 51 операцию. Как и в предыдущем решении, будем пользоваться тем, что если из второй последовательности можно получить первую, то можно и наоборот.

Пусть буква А встречается в первой и второй последовательностях соответственно a_1 и a_2 раз, а буква Б — соответственно $b_1 = 100 - a_1$ и $b_2 = 100 - a_2$ раз. Без ограничения общности будем считать, во-первых, что $a_1 + a_2 \leqslant 100 \leqslant b_1 + b_2$ (иначе можно поменять местами буквы), а во-вторых, что $a_1 \geqslant a_2$ (иначе можно поменять местами последовательности). Процесс перевода первой последовательности во вторую выполним в два этапа:

1) удалим из первой последовательности a_1-a_2 букв А, чтобы их стало столько же, сколько во второй последовательности;

2) в полученной последовательности изменим количества букв Б, стоящих между буквами А, чтобы она совпала со второй.

Второй этап можно выполнить за не более чем a_2+1 операцию. Действительно, на обе последовательности (полученную после первого этапа и требуемую) можно смотреть как на последовательности из a_2 букв А, в промежутках между которыми вставлены ноль или более букв Б; всего промежутков ровно a_2+1 (позиции до и после крайних букв А тоже считаются «промежутками»). Ясно, что мы можем за не более чем одну операцию привести количество букв Б, стоящих в каком-то одном промежутке, к требуемому. Значит, за не более чем a_2+1 операцию мы можем «исправить» все количества букв Б на те, что должны быть в требуемой последовательности.

Осталось доказать, что первый этап можно выполнить за $50-a_2$ операций.

Отметим, что $50-a_2\geqslant 0$, так как

$$a_2=\frac{1}{2}(a_2+a_2)\leqslant\frac{1}{2}(a_1+a_2)\leqslant 50.$$

При этом если $a_2=50$, то из $a_2\leqslant a_1$ и $a_1+a_2\leqslant 100$ имеем и $a_1=50$. В этом случае первая стадия процесса тривиальна — ничего удалять не нужно. Далее разбираем случай $50-a_2>0$.

Буквы Б в первой последовательности разделяют буквы А на b_1+1 непрерывных блоков из нуля или более букв (считаем, что блок из нуля букв А образуется, если две буквы Б стоят рядом либо если буква Б стоит с краю последовательности). Достаточно доказать, что можно выбрать не более чем $50-a_2$ блоков так, чтобы суммарно в них было не менее a_1-a_2 букв А; в этом случае мы за не более чем $50-a_2$ операций можем произвольно уменьшить или удалить эти блоки и добиться требуемого количества букв А. Отметим, что если $50-a_2\geqslant b_1+1$, то можно просто выбрать все блоки, и в них окажется $a_1\geqslant a_1-a_2$ букв А; далее разбираем случай $50-a_2<b_1+1$.

Предположим противное: даже если выбрать $50-a_2$ наибольших (по количеству букв) блоков, в них суммарно окажется не более a_1-a_2-1 букв А. Заметим, что хотя бы один из выбранных блоков содержит не более одной буквы А по принципу Дирихле, так как

$$a_1-a_2-1<2(50-a_2) \;\Leftarrow\; a_1+a_2<101 \;\Leftarrow\; a_1+a_2\leqslant 100.$$

Так как мы выбрали наибольшие блоки, то остальные

$$(b_1+1)-(50-a_2)$$

блоков тоже содержат не более чем по одной букве А; суммарно в первой последовательности оказывается не более

$$(a_1-a_2-1)+((b_1+1)-(50-a_2))=a_1+b_1-50=50$$

букв А. Но мы знаем, что их a_1, откуда $a_1\leqslant 50$.

В этом случае $a_1-a_2-1<50-a_2$; снова применяя принцип Дирихле, получаем, что один из выбранных блоков содержит ноль букв А. Тогда все остальные блоки тоже содержат ноль букв А. Следовательно, общее количество букв А в первой последовательности не превосходит a_1-a_2-1; но мы знаем, что их ровно a_1, противоречие.

Комментарий. Последовательность ААА…АА нельзя перевести в АБАБ…АБ менее чем за 51 операцию. Действительно, в первой последовательности ноль блоков из букв Б, а во второй их 50. При этом каждая операция увеличивает количество таких блоков не более чем на 1. А ещё должна быть хотя бы одна операция, уменьшающая количество букв А, и такая операция не может увеличивать количество блоков из букв Б.

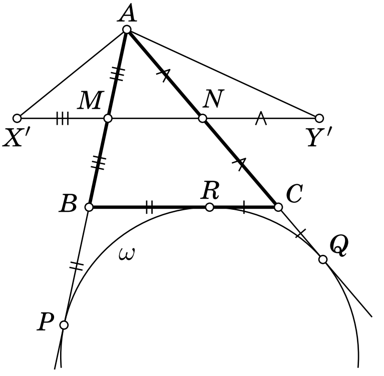
3. Периметр треугольника ABC равен 1. Окружность ω касается стороны BC, продолжения стороны AB в точке P и продолжения стороны AC в точке Q. Прямая, проходящая через середины AB и AC, пересекает описанную окружность треугольника APQ в точках X и Y. Найдите длину отрезка XY. (*Д. Бродский*)

Ответ: 1/2.

Решение 1. Обозначим точку касания ω с отрезком BC через R. Рассмотрим отрезки AP и AQ. С одной стороны, они равны. С другой стороны, $BR=BP$ и $CR=CQ$, поэтому

$$AP+AQ=AB+BP+CQ+AC=AB+BC+AC.$$

Следовательно, длины отрезков AP и AQ равны половине периметра треугольника ABC.

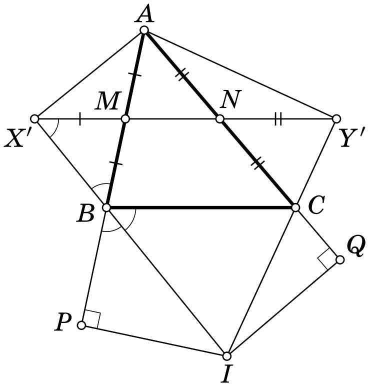


Обозначим середины отрезков AB и AC через M и N соответственно. Отметим точки X' и Y' на прямой MN так, что $X'M = MA$ и $Y'N = NA$ (см. рисунок). Заметим, что длина отрезка $X'Y'$ также равна половине периметра треугольника ABC, то есть $AP = X'Y'$. Но $X'M = MA$, откуда $MP = MY'$. Следовательно, $AX'M$ и PMY' — равнобедренные треугольники, откуда $AX'PY'$ — равнобокая трапеция.

Как известно, равнобокую трапецию можно вписать в окружность, поэтому точка P лежит на описанной окружности γ треугольника $AX'Y'$. Аналогично точка Q лежит на γ, поэтому γ описана около треугольника PAQ. Следовательно, $X' = X$, $Y' = Y$ и $XY = 1/2$.

Решение 2. Отметим точку I — центр окружности ω. Поскольку $\angle API = \angle AQI = 90^\circ$, то точки A, P, I, Q лежат на одной окружности γ, построенной на отрезке AI как на диаметре. Обозначим через M и N середины отрезков AB и AC соответственно, а через X' и Y' — точки пересечения прямых BI и CI с прямой MN соответственно. Докажем, что X' и Y' лежат на γ.

Заметим, что углы PBI и MBX' равны как вертикальные, а углы CBI и $MX'B$ равны, так как прямые BC и MN параллельны. Но BI — биссектриса угла PBC, поэтому $\angle MBX' = \angle MX'B$, то есть треугольник BMX' равнобедренный и $BM = MX'$. В треугольнике ABX' медиана $X'M$ равна половине стороны, поэтому этот треугольник прямоуголь-



ный с прямым углом X'. Таким образом, $\angle AX'I = 90^\circ$, то есть X' лежит на γ, поэтому $X' = X$. Аналогично треугольник ACY' прямоугольный и $Y' = Y$. Тогда $XY = XM + MN + NY = 1/2$.

Комментарий. По сути, в решении доказан известный факт, что проекция вершины A на биссектрису внутреннего или внешнего угла лежит на средней линии треугольника.

Решение 3. В обозначениях предыдущего решения пусть a, b и c — половины длин сторон BC, AC и AB соответственно, а x и y — длины отрезков MX и NY соответственно. Запишем степени точек M и N относительно γ двумя способами:

$$\begin{cases} MX \cdot MY = MA \cdot MP, \\ NY \cdot NX = NA \cdot NQ \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(a+y) = c(a+b), \\ y(a+x) = b(a+c). \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение из первого:

$$ax - ay = ac - ab \quad \Leftrightarrow \quad y = x + b - c.$$

Подставим в первое уравнение системы:

$$x(a+x+b-c) = c(a+b) \ \Leftrightarrow \ x^2 + x(a+b-c) - c(a+b) = 0.$$

По теореме Виета у полученного квадратного уравнения относительно x два корня: c и $-(a+b)$. Так как x положительно, то $x = c$. Аналогично $y = b$. Отсюда $XY = a+b+c = 1/2$.

Комментарий. Другие решения можно найти на странице олимпиады, mmo.mccme.ru/2023/

4. Дано натуральное число $n>1$. Назовём положительную обыкновенную дробь (не обязательно несократимую) *хорошей*, если сумма её числителя и знаменателя равна n. Докажите, что любую положительную обыкновенную дробь, знаменатель которой меньше n, можно выразить через хорошие дроби (не обязательно различные) с помощью операций сложения и вычитания тогда и только тогда, когда n — простое число.

Напомним, что обыкновенная дробь — это отношение целого числа к натуральному. (*Т. Казицына*)

Решение. Сначала докажем, что если n составное, то не любую дробь, знаменатель которой меньше n, можно выразить через хорошие. Если среди хороших дробей есть сократимые, то сократим их. Обозначим НОК знаменателей всех полученных после сокращения дробей через N. Заметим, что знаменатели всех несократимых дробей, которые можно выразить, будут делителями N. Действительно, для всех хороших дробей это утверждение верно, а знаменатели суммы или разности дробей, знаменатели которых делят N, также будут делить N.

Пусть n делится на простое число p, и натуральное число α таково, что $p^\alpha < n \leqslant p^{\alpha+1}$. Рассмотрим какую-нибудь хорошую дробь $\frac{n-a}{a}$, у которой знаменатель a делится на p. Поскольку $a<n\leqslant p^{\alpha+1}$, то a не делится на $p^{\alpha+1}$. Заметим, что $n-a$ делится на p, поэтому дробь $\frac{n-a}{a}$ можно сократить на p. После сокращения знаменатель не будет делиться на p^α. Таким образом, N не будет делиться на p^α, следовательно, дробь $\frac{1}{p^\alpha}$ выразить не получится.

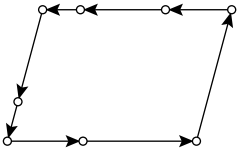
Докажем, что если n равно простому числу p, то любую дробь, знаменатель которой меньше n, можно выразить. Рассмотрим дробь $\frac{b}{a}$, где $a<p$. Как известно, НОД двух целых чисел x и y можно представить в виде $kx+ly$ для некоторых целых k и l (это называется *линейным представлением НОД*). Так как p простое, то числа $p-a$ и a взаимно просты, поэтому найдутся такие целые k и l, что $k(p-a)+la=1$. Тогда

$$\frac{1}{a}=\frac{k(p-a)+la}{a}=k\cdot\frac{p-a}{a}+l=k\cdot\frac{p-a}{a}+(p-1)l\cdot\frac{1}{p-1}.$$

Таким образом, дробь $\frac{1}{a}$ можно выразить через хорошие дроби $\frac{p-a}{a}$ и $\frac{1}{p-1}$. Дробь $\frac{b}{a}$ представляется в виде суммы b дробей $\frac{1}{a}$, поэтому её также можно выразить через хорошие.

5. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны. (*А. Юран*)

Решение. Для каждой фигуры — параллелограмма и треугольника — рассмотрим все вершины фигур на границе. Для каждой фигуры проведём между соседними точками на границе векторы так, чтобы их направление соответствовало обходу границы фигуры против часовой стрелки.

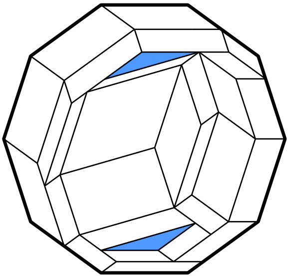


Рассмотрим произвольную прямую ℓ и все векторы, параллельные ей. Сумма этих векторов равна нулю. Действительно, к каждой линии разреза, параллельной ℓ, примыкают наборы противоположных векторов. Если ℓ параллельна каким-то сторонам 100-угольника, то сумма векторов, соответствующих противоположным сторонам 100-угольника, также равна нулю, так как они будут направлены в противоположные стороны и равны по длине.

С другой стороны, в каждом параллелограмме сумма векторов, соответствующих противоположным сторонам, равна нулю. Следовательно, и в двух треугольниках сумма всех векторов, параллельных ℓ, также будет нулевой.

Выберем в качестве ℓ прямую, параллельную какой-нибудь из сторон первого треугольника. Получим, что набор векторов второго треугольника, параллельных ℓ, — это векторы, противоположные векторам первого треугольника. Аналогично для двух других сторон. Поэтому для каждой стороны первого треугольника существует параллельная и равная ей по длине сторона второго треугольника. Следовательно, треугольники равны.

Комментарии. 1. Разрезания из условия существуют, причём они могут быть устроены достаточно несимметричным образом: например, стороны треугольников могут не *все* быть параллельными сторонам 100-угольника, треугольники могут не образовывать параллелограмм, не примыкать к сторонам 100-угольника, они могут быть несимметричны относительно центра 100-угольника. На рисунке приведён пример разрезания 10-угольника. По ссылке https://tifv.github.io/mmo-2023-g9-p5-parallelogram/ можно посмотреть, как могут выглядеть разбиения при различном положении треугольников.



2. Другое решение задачи можно получить, рассматривая цепочки параллелограммов аналогично решению задачи 3 параграфа 12 книги В. В. Произволова «Задачи на вырост».

6. Назовём тройку чисел *триплетом*, если одно из них равно среднему арифметическому двух других. Последовательность (a_n) строится следующим образом: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и при $n > 1$ число a_n — такое минимальное натуральное число, большее a_{n-1}, что среди чисел a_0, a_1, ..., a_n нет трёх, образующих триплет. Докажите, что $a_{2023} \leqslant 100\,000$.

(*Б. Бутырин*)

Решение. Обозначим через $b(n)$ двоичную запись числа n; например, $b(13) = 1101$. Обозначим число, *троичная* запись которого совпадает с $b(n)$, через $b(n)_3$; например, $b(13)_3 = 1101_3 = 1 + 9 + 27 = 37$. Докажем индукцией по n, что $a_n = b(n)_3$.

База индукции ($n \leqslant 1$) дана в определении. Переход: пусть для всех $i < n$ троичная запись числа a_i совпадает с $b(i)$. Необходимо доказать, что, во-первых, число $b(n)_3$ не образует триплета с какими-нибудь a_i и a_j для $i < j < n$ и, во-вторых, никакое меньшее число не удовлетворяет этому условию.

Предположим, что найдутся такие числа i и j, что $0 \leqslant i < j < n$ и $b(i)_3 + b(n)_3 = 2 \cdot b(j)_3$. Заметим, что при сложении чисел $b(i)_3$ и $b(n)_3$ в троичной системе счисления не возникает переходов через разряд, поэтому если в результате получилось число $2 \cdot b(j)_3$, то на всех позициях, где в строке $b(j)$ стоит единица, в обеих строках $b(i)$ и $b(n)$ также стоят единицы, а на всех остальных позициях в этих строках стоят нули. Таким образом, $b(i) = b(j) = b(n)$, из чего следует, что $i = j = n$. Противоречие.

Докажем теперь, что любое число, меньшее $b(n)_3$ (и большее a_{n-1}), образует триплет с какими-нибудь a_i и a_j. Рассмотрим произвольное число x, удовлетворяющее неравенству $b(n-1)_3 < x < b(n)_3$. Поскольку $b(n-1)_3$ и $b(n)_3$ — это два соседних числа, чья троичная запись состоит из нулей и единиц, в троичной записи числа x есть двойка.

Пусть троичная запись числа x — это строка s_n. Построим строки s_i и s_j, состоящие из нулей и единиц и имеющие такую же длину, что и s_n, по следующему принципу: единицы в s_i стоят ровно на тех позициях, где в строке s_n стоят единицы; единицы в s_j стоят ровно на тех позициях, где в строке s_n стоят ненулевые цифры. Возьмём в качестве i число с двоичной записью s_i, а в качестве j — число с двоичной записью s_j. Пусть d_i, d_j и d_n — цифры в какой-то позиции строк s_i, s_j и s_n соответственно. Тогда заметим, что, во-первых, $d_i \leqslant d_j \leqslant d_n$, а во-вторых, $2d_j = d_i + d_n$. Более того, в тех позициях, где в строке s_n стоит двойка, выполняется цепочка строгих неравенств $d_i < d_j < d_n$. Значит, $i < j < n$, и числа (a_i, a_j, x) образуют триплет, что и требовалось доказать.

Поскольку $2023 < 2048 = 2^{11}$, имеем, что в троичной записи числа a_{2023} не больше 11 цифр, ни одна из которых не превосходит 1. Значит,

$$a_{2023} \leqslant 3^0 + 3^1 + \ldots + 3^{10} = \frac{3^{11} - 1}{2} \leqslant \frac{243^2 \cdot 3}{2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{250^2 \cdot 3}{2} = 62\,500 \cdot \frac{3}{2} < 66\,666 \cdot \frac{3}{2} < 100\,000.$$

Комментарий. На самом деле $a_{2023} = 88\,465$.

10 класс

1. Про четыре целых числа a, b, c, d известно, что

$$a+b+c+d=ab+bc+cd+da+1.$$

Докажите, что модули каких-то двух из этих чисел отличаются на один. (*А. Доледенок*)

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$a+b+c+d=(a+c)(b+d)+1.$$

После замены $x=a+c$ и $y=b+d$ получаем

$$x+y=xy+1.$$

Перенесём все слагаемые в одну часть и разложим на множители:

$$(x-1)(y-1)=0.$$

Таким образом, $a+c=1$ или $b+d=1$. Пусть $a+c=1$. Сумма двух положительных целых чисел не меньше двух, следовательно, $a \leqslant 0$ или $c \leqslant 0$. Не умаляя общности, пусть $a \leqslant 0$. Тогда $c > 0$. Итого $|c|-|a|=c+a=1$. Что и требовалось доказать.

2. В эстафетном забеге Москва—Петушки участвовали две команды по 20 человек. Каждая из команд по-своему разделила дистанцию на 20 не обязательно равных отрезков и распределила их между участниками так, чтобы каждый бежал ровно один отрезок (скорость каждого участника постоянна, но скорости разных участников могут быть различны). Первые участники обеих команд стартовали одновременно, а передача эстафеты происходит мгновенно. Какое максимальное количество обгонов могло быть в таком забеге? Опережение на границе этапов обгоном не считается. (*Е. Неустроева*)

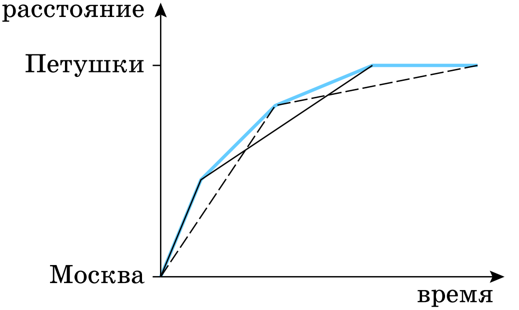
Ответ: 38 обгонов.

Решение. Сначала докажем, что произошло не более 38 обгонов. Заметим, что между стартом и первым обгоном и между двумя последовательными обгонами хотя бы в одной из команд должен поменяться бегущий. Смен бегунов было по 19 в каждой команде, то есть всего 38, а значит, и обгонов было не более 38.

Докажем, что 38 обгонов могло быть. Изобразим траектории движения команд на графике с горизонтальной осью, соответствующей времени, и вертикальной осью, соответствующей пройденной дистанции. Тогда обе траектории являются 20-звенными ломаными со звеньями, направленными вверх-вправо. Левый нижний конец каждой ломаной совпадает с началом координат, а правые верхние концы ломаных имеют одинаковую ординату. В такой ситуации обгон — точка пересечения ломаных, не являющаяся вершиной.

Итак, приведём пример. Для начала нарисуем ломаную, состоящую из 40 последовательных сторон правильного 160-угольника, так чтобы последняя сторона была горизонтальна. Другими словами, первое звено ломаной выходит из точки с координатами $(0, 0)$ под углом в $9/4^\circ$ к вертикали, а каждое следующее повёрнуто на $9/4^\circ$ по часовой стрелке по сравнению с предыдущим. Таким образом, последнее звено будет повёрнуто горизонтально, то есть на $40 \cdot 9/4^\circ = 90^\circ$ относительно вертикальной оси. Занумеруем последовательно все вершины от 1 до 41 и соединим вершины с номерами $1, 2, 4, 6, \ldots, 40$, это будет траектория первой команды. Траекторией второй команды будет ломаная, соединяющая вершины с номерами $1, 3, 5, \ldots, 41$. Пересекаться будут отрезки $(i, i+2)$ и $(i+1, i+3)$ для $i = 1, 2, \ldots, 38$, их точки пересечения — искомые 38 обгонов.

Проиллюстрируем пример для случая команд, состоящих из двух участников (см. рисунок, первая команда — сплошная чёрная ломаная, вторая — пунктирная).



3. См. задачу 3 для 9 класса (с. 23).

4. На экране суперкомпьютера напечатано число $11\ldots1$ (900 единиц). Каждую секунду суперкомпьютер заменяет его по следующему правилу. Число записывается в виде $\overline{AB}$, где B состоит из двух его последних цифр, и заменяется на $2\cdot A+8\cdot B$ (если B начинается на нуль, то он при вычислении опускается). Например, 305 заменяется на $2\cdot 3+8\cdot 5=46$. Если на экране остаётся число, меньшее 100, то процесс останавливается. Правда ли, что он остановится?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: нет, не остановится.

Решение. Условие можно перефразировать так: если число на экране имеет вид $100A+B$, где $0\leqslant B<100$, то оно заменяется на число $2A+8B$. Поэтому оно уменьшается на $(100A+B)-(2A+8B)=98A-7B=7(14A-B)$. Эта величина обязательно положительна при $A>7$, так что все числа, начиная с 800, обязательно уменьшаются. Естественный вопрос — а может ли что-нибудь помешать числу уменьшиться дальше? Или можем ли мы выяснить, до какого числа, меньшего 800, «досчитает» суперкомпьютер? Во-первых, из записи выше видно, что разница между числом и его образом обязательно делится на 7. Так что остаток от деления на 7 сохраняется. А поскольку на 7 делится $1001=7\cdot 11\cdot 13$, то делится и $111111=111\cdot 1001$, значит, и число из $900=6\cdot 150$ единиц. Значит, все числа, которые будут получаться, тоже делятся на 7, а также и на 14, потому что $2A+8B$ — это всегда число чётное.

Но этого мало. А не сохраняется ли (или не изменяется ли предсказуемым образом) делимость на ещё какое-нибудь простое число p?

Если на p делится $100A+B$, то делится и $8(100A+B)=800A+8B$ (а если не делится, то остаток умножается ровно на 8). Разница между этим числом и $2A+8B$ составляет $(800-2)A=798A$, так что если p — делитель 798, то остаток от деления на p умножится на 8. Учтём, что $798=7\cdot 114=7\cdot 2\cdot 3\cdot 19$; это даёт нам два новых простых числа, 3 и 19.

Посмотрим, какой остаток даёт исходное число при делении на 3 и на 19. Оно делится на 3, потому что 900 делится на 3. Наконец, то, что $10^{18}-1$ делится на 19, следует из Малой теоремы Ферма, но можно проверить и просто «делением в столбик». А значит, делится на 19 и число из

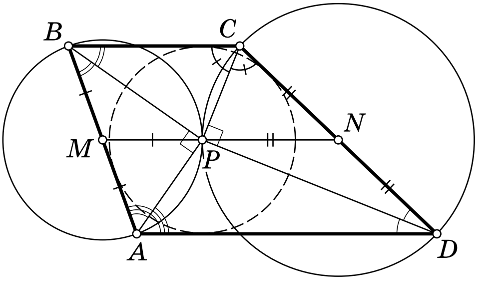
$900 = 18 \cdot 50$ единиц. Поэтому все итерации, начиная со второй, будут делиться на 798. И значит, итоговое (ненулевое!) число никогда не станет меньше 100.

Комментарий. Если бы нам не «повезло» с выбором исходного числа — можно было бы отследить изменение остатков от деления на 3, 7 и 19 (поскольку они на каждом шаге умножаются на 8) и понять, есть ли среди получающихся вариантов числа, меньшие 100.

5. На плоскости даны две окружности ω_1 и ω_2, касающиеся внешним образом. На окружности ω_1 выбран диаметр AB, а на окружности ω_2 выбран диаметр CD. Рассмотрим всевозможные положения точек A, B, C и D, при которых $ABCD$ — выпуклый описанный четырёхугольник, и пусть I — центр его вписанной окружности. Найдите геометрическое место точек I. (*М. Евдокимов*)

Ответ: точка I является точкой касания окружностей.

Решение. Итак, предположим, что диаметры выбраны так, что четырёхугольник $ABCD$ является описанным. Тогда $AB + CD = BC + AD$. Пусть M и N — центры окружностей ω_1 и ω_2 соответственно, а P — точка касания. $\angle APB = \angle CPD = 90^\circ$, так как угол, опирающийся на диаметр, является прямым. По свойству медианы прямоугольного треугольника $MP = \frac{1}{2}AB$ и $PN = \frac{1}{2}CD$, следовательно, $MN = MP + PN = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

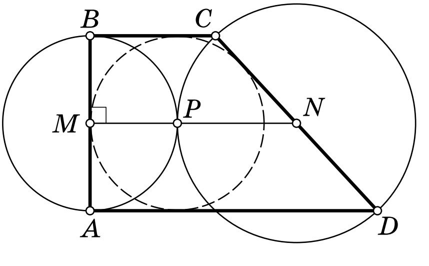


Утверждение. Длина средней линии выпуклого четырёхугольника (т. е. отрезка, соединяющего середины его противоположных сторон) не превосходит полусуммы двух других сторон и равна ей, если эти стороны параллельны и только в этом случае.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, M и N — середины AB и CD соответственно. Отметим точку K — середину AC. Тогда MK и KN являются средними линиями в треугольниках ABC и ADC. Следовательно, $MK = \frac{1}{2}BC$ и $KN = \frac{1}{2}AD$. По неравенству треугольника $\frac{1}{2}(BC + AD) = MK + KN \geqslant MN$. Равенство достигается, только когда точки K, M и N лежат на одной прямой. В этом случае BC и AD параллельны этой прямой, так как она будет содержать средние линии треугольников ABC и ADC. □

Таким образом, согласно доказанному выше утверждению, $MN \parallel BC \parallel AD$. Ясно, что $\angle MPA = \angle PAD$ из параллельности MN и AD. Кроме того, $\angle MAP = \angle MPA$, так как треугольник APM равнобедренный. Таким образом, AP является биссектрисой угла BAD. Аналогично BP, CP и DP тоже являются биссектрисами углов четырёхугольника. Таким образом, точка P, будучи точкой пересечения биссектрис, является центром вписанной окружности.

Наконец, покажем, что ГМТ непусто, то есть докажем, что найдётся хотя бы одно положение диаметров, при котором четырёхугольник $ABCD$ является описанным. Обозначим через r_i радиус окружности ω_i. Не умаляя общности, можно считать, что $r_1 \leqslant r_2$. Если $r_1 = r_2$, то проведём диаметры перпендикулярно MN. Тогда четырёхугольник $ABCD$ окажется квадратом. Пусть $r_1 < r_2$. Построим диаметр AB так, что $AB \perp MN$. Проведём касательные к ω_1 в точках A и B. Они пересекают ω_2 в четырёх точках, образующих прямоугольник. В качестве диаметра CD возьмём одну из диагоналей этого четырёхугольника (см. рисунок). Тогда четырёхугольник $ABCD$ будет трапецией. Как и раньше, можно доказать, что точка P есть точка пересечения его биссектрис, следовательно, он является описанным.



Решение 2. Участники олимпиады придумали другое доказательство, основанное на следующей лемме.

Лемма. Пусть дан четырёхугольник $ABCD$ и точка P. Если $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$, то существует точка, изогонально сопряжённая точке P относительно четырёхугольника $ABCD$. Более того, такой точкой является образ точки P при изоциклической инволюции.

Комментарий. О свойствах изогонального сопряжения в четырёхугольнике и изоциклической инволюции можно почитать в проекте ЛКТГ «Кубика фокусов и циркулярные кубики» (https://www.turgor.ru/lktg/2020/2/index.html) или посмотреть здесь: https://youtu.be/aOCqrAzJ54c.

Итак, пусть даны описанный четырёхугольник $ABCD$ и точка P, причём описанные окружности треугольников ABP и CDP касаются. Пусть α и β — описанные окружности треугольников BCP и ADP, а Q — вторая точка их пересечения. Так как $\angle APB = \angle CPD = 90^\circ$, по лемме точки P и Q изогонально сопряжены. Тогда, с одной стороны, биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в середине дуги PQ окружности α, биссектрисы углов BAD и CDA пересекаются в середине дуги PQ окружности β. С другой стороны, биссектрисы углов описанного четырёхугольника пересекаются в одной точке. Такое возможно, только если окружности α и β касаются, то есть $P = Q$. Следовательно, точка P изогонально сопряжена сама себе, поэтому является точкой пересечения биссектрис и центром вписанной окружности.

6. На острове живут хамелеоны пяти цветов. Когда один хамелеон кусает другого, цвет укушенного хамелеона меняется по некоторому правилу, причём новый цвет зависит только от цвета укусившего и цвета укушенного. Известно, что 2023 красных хамелеона могут договориться о последовательности укусов, после которой все они станут синими. При каком наименьшем k можно гарантировать, что k красных хамелеонов смогут договориться так, чтобы стать синими?

Например, правила могут быть такими: если красный хамелеон кусает зелёного, укушенный меняет цвет на синий; если зелёный кусает красного, укушенный остаётся красным, то есть «меняет цвет на красный»; если красный хамелеон кусает красного, укушенный меняет цвет на жёлтый, и так далее. (Конкретные правила смены цветов могут быть устроены иначе.) (*М. Раскин*)

Ответ: при $k = 5$.

Решение. Для начала приведём пример правил, при которых для описанной перекраски будет необходимо хотя бы 5 красных хамелеонов. Занумеруем цвета так, чтобы красный был первым цветом, а синий — последним. Тогда пусть правила выглядят следующим образом: если хамелеон цвета $k < 5$ кусает хамелеона цвета k, укушенный меняет цвет на $k+1$. Кроме того, все хамелеоны, укушенные синим хамелеоном, тоже становятся синими. Никакие другие ситуации цвета хамелеонов не меняют. Несложно заметить, что если изначально хамелеонов всего 4, то, при таких правилах, ни у одного из них не получится стать синим. Действительно, никакой появившийся цвет не может исчезнуть раньше появления синего. Кроме того, никакой цвет не может появиться раньше, чем появятся все предыдущие. Таким образом, в момент появления первого синего хамелеона есть хотя бы по одному хамелеону каждого из цветов.

Теперь докажем, что пяти хамелеонов хватит. Процесс перекрашивания будет состоять из двух этапов. На первом этапе наши пять выделенных хамелеонов должны следить за тем, как перекрашиваются 2023 хамелеона из красного в синий и перекрашиваться параллельно с ними «забегами», заботясь о том, чтобы после каждого забега воспроизводились два условия: 1) среди них должно быть не более одного хамелеона каждого цвета, остальные — красные, 2) палитра цветов наших пяти хамелеонов расширяется и всегда содержит в себе палитру цветов 2023 хамелеонов.

В рамках забега наши пять хамелеонов ждут, когда среди цветов 2023 хамелеонов появится новый цвет, отсутствующий у наших пяти хамелеонов. Пусть этот цвет представляет хамелеон X. Далее пять хамелеонов прослеживают, как перекрашивался хамелеон X из красного цвета, выбирают любого красного хамелеона из пяти и перекрашивают его тем же путём. Это всегда возможно, поскольку палитра цветов остальных четырёх хамелеонов, которые будут его кусать, содержит палитру цветов 2023 хамелеонов. После этого забега условия 1, 2 воспроизведутся и можно будет перейти к следующему забегу. Первый этап заканчивается в тот момент, когда в палитре 2023 хамелеонов перестанут появляться новые цвета.

На втором этапе хамелеоны всех встретившихся нам цветов должны перекраситься в синий. Для этого для каждого цвета найдём последний момент его присутствия в алгоритме для 2023 хамелеонов и упорядочим цвета в соответствии с этими моментами в обратном порядке. Таким образом, синий цвет будет первым, предыдущий цвет хамелеона, ставшего синим в последнюю очередь, — вторым и так далее. Тогда, в силу построенного порядка, хамелеон цвета $k > 1$ может уменьшить номер своего цвета посредством укуса от хамелеона цвета $l < k$. Другими словами, хамелеоны цветов $1, \ldots, k$ могут стать цветов $1, \ldots, k-1$. Применив это рассуждение несколько раз, получим, что наши хамелеоны могут все поменять свой цвет на синий.

Комментарий. Нетрудно заметить, что для n цветов понадобится n хамелеонов. На самом деле это задача — один из многих вопросов вокруг (в общем случае) сетей Петри. От совсем небольших изменений задачи минимальный размер стартовой популяции может значительно увеличиться.

Например, пусть при укусе оба хамелеона могут по-разному менять свой цвет, а достичь надо состояния с одним зелёным хамелеоном и многими синими. В таком случае минимальное количество может расти быстрее не только любого многочлена от n, но и любой функции вида $n^{n^{n^{\cdots}}}$! Это было доказано совсем недавно; в ответе появляется так называемая функция Аккермана.

К счастью, если все хамелеоны должны быть одного цвета и в начале, и в конце, ситуация заметно упрощается. Требование же, что при укусе меняет цвет только один из хамелеонов, даже само по себе упрощает ситуацию ещё сильнее. Оно соответствует «немедленному наблюдению», или «одностороннему взаимодействию» в сетях Петри (immediate observation, one-way communication). В этом варианте показано, например — вполне доступными школьникам комбинаторными методами, — что если есть два набора цветов хамелеонов и после добавления к ним одинакового количества синих хамелеонов из первого становится можно получить второй, то достаточно добавить n^3 хамелеонов.

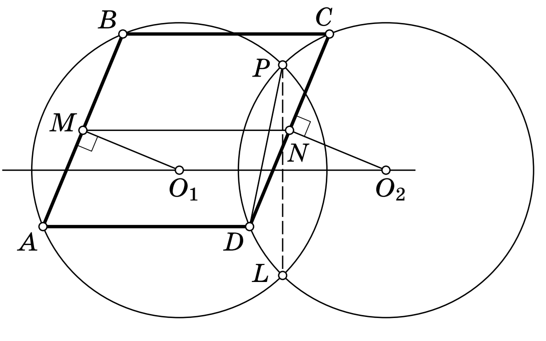
11 класс, первый день

1. К графикам функций $y = \cos x$ и $y = a\,\mathrm{tg}\,x$ провели касательные в некоторой точке их пересечения. Докажите, что эти касательные перпендикулярны друг другу для любого $a \neq 0$. (*В. Клепцын, Г. Мерзон*)

Решение. Абсцисса x_0 любой точки пересечения графиков данных функций удовлетворяет равенству $\cos x_0 = a\,\mathrm{tg}\,x_0$. В этой точке касательная к графику функции $y = \cos x$ имеет угловой коэффициент $k_1 = -\sin x_0$, а касательная к графику функции $y = a\,\mathrm{tg}\,x$ имеет угловой коэффициент $k_2 = \dfrac{a}{\cos^2 x_0}$. Поскольку $k_1 k_2 = -\dfrac{a\,\mathrm{tg}\,x_0}{\cos x_0} = -1$, эти касательные перпендикулярны друг другу.

2. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, отличный от прямоугольника, а точка P выбрана внутри него так, что описанные окружности треугольников PAB и PCD имеют общую хорду, перпендикулярную AD. Докажите, что радиусы данных окружностей равны. (*А. Заславский*)

Решение 1. Заметим, что линия центров O_1O_2 перпендикулярна общей хорде данных окружностей, а значит, параллельна прямым AD и BC (см. рисунок). Пусть M — середина отрезка AB, N — середина отрезка CD. Тогда $O_1M \perp AB$, $O_2N \perp CD$ и, поскольку $AB \parallel CD$, прямые O_1M и O_2N параллельны. Поскольку $O_1O_2 \parallel AD$ и при этом $AD \parallel MN$, прямые O_1O_2 и MN параллельны. Следовательно, четырёхугольник O_1MNO_2 — параллелограмм, а значит, $O_1M = O_2N$. Кроме того, поскольку отрезки MB и NC равны, то будут равны прямоугольные треугольники O_1MB и O_2NC



по двум катетам. Следовательно, $O_1B = O_2C$, т. е. равны радиусы данных окружностей, что и требовалось.

Решение 2. Предположим противное: радиусы окружностей ω_1 и ω_2, описанных около треугольников PAB и PCD соответственно, различны.

При параллельном переносе на $\overrightarrow{CB}$ отрезок CD перейдёт в отрезок AB, окружность ω_2 перейдёт в окружность ω_3, а прямая O_1O_2 перейдёт в себя. Причём ω_3 не может совпадать с ω_1, поскольку их радиусы различны. Поэтому линия центров O_3O_1, совпадающая с прямой O_1O_2, перпендикулярна общей хорде AB. Таким образом, прямая AB параллельна общей хорде окружностей ω_1 и ω_2 и, следовательно, перпендикулярна прямой AD. Тогда параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником, что противоречит условию задачи. Следовательно, радиусы окружностей ω_1 и ω_2 равны.

3. Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 5$ с целыми коэффициентами, имеющий n различных целых корней. Докажите, что многочлен $P(x) + 3$ имеет n различных действительных корней. (*М. Малкин*)

Решение. Пронумеруем корни многочлена в порядке возрастания $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Тогда многочлен можно представить в виде

$$P(x) = a(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n),$$
$$a \neq 0, \quad a, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}.$$

Покажем, что значение многочлена P в любой точке локального экстремума по модулю больше 3 (тогда при сдвиге графика многочлена на 3 единицы вверх или вниз количество его точек пересечения с осью абсцисс не изменится). Точки локальных экстремумов многочлена P находятся на промежутках $(a_i; a_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Вычислим значения $|P(x)|$ в точках $x_i = a_i + \frac{1}{2}$. По условию корней не меньше шести, следовательно,

$$|P(x_i)| = |a(x_i - a_1)(x_i - a_2)\ldots(x_i - a_n)| \geqslant |a| \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{25}{4} =$$
$$= |a| \cdot \frac{225}{64} = |a| \cdot 3\frac{33}{64} > 3.$$

В нестрогом неравенстве учтены шесть наименьших по модулю множителей. Остальные множители, которые будут при $n > 6$, по модулю больше единицы и только усиливают неравенство.

4. В турнире по теннису (где не бывает ничьих) участвовало более 4 спортсменов. Каждый игровой день каждый теннисист принимал участие ровно в одной игре. К завершению турнира каждый сыграл с каждым в точности один раз. Назовём игрока *упорным*, если он выиграл хотя бы один матч и после первой своей победы ни разу не проигрывал. Остальных игроков назовём *неупорными*. Верно ли, что игровых дней, когда была встреча между неупорными игроками, больше половины? (*Б. Френкин*)

Ответ: да, верно.

Решение. В последний день все упорные выиграли. Значит, их не больше половины. Если их меньше половины, то каждый день была встреча между неупорными игроками. Остаётся рассмотреть случай, когда количество упорных k составляет половину от общего количества игроков $2k$.

Такой турнир длился $2k - 1$ дней, и нужно доказать, что были хотя бы k дней, когда была встреча между неупорными. Это равносильно тому, что было хотя бы k дней, в которые была встреча между упорными, так как и тех, и других — ровно половина (если все упорные играют с неупорными, то в этих встречах участвуют все неупорные, и обратно).

Предположим противное: пусть встречи между неупорными игроками проходили менее чем в половине всех дней турнира. Тогда, как отмечено выше, то же самое можно сказать и про встречи между упорными игроками. Так как всего упорных игроков k, каждый упорный играл с упорными $k - 1$ день. Поэтому единственный возможный вариант, при котором встречи между упорными игроками проходили менее чем в половине дней турнира, — это когда все упорные играют между собой в одни и те же дни. Другими словами можно сказать, что упорные проводят в этот $k - 1$ день между собой минитурнир, а такое возможно, только если число упорных игроков чётно.

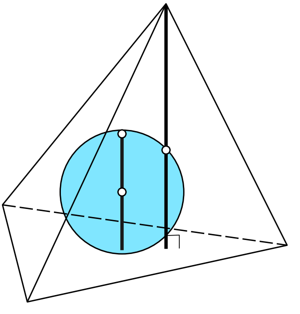
По условию $2k > 4$, то есть $k > 2$, а поскольку k — чётное, то $k \geqslant 4$. Тогда в первый из дней минитурнира играли по крайней мере две пары упорных игроков, а значит, было хотя бы два упорных, победивших в этот день. В дальнейшем они должны сыграть между собой, но тогда один из них проиграет после того как выиграл, что противоречит определению упорного игрока. Значит, наше предположение неверно и игровых дней, когда была встреча между неупорными игроками, не менее половины.

5. Середины всех высот некоторого тетраэдра лежат на его вписанной сфере. Верно ли, что тетраэдр правильный?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: да, верно.

Решение. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$, удовлетворяющий условию задачи. Заметим, что по условию для любой высоты h_i данного тетраэдра справедливо неравенство $\frac{h_i}{2} \leqslant 2r$, где r — радиус вписанной сферы, то есть $h_i \leqslant 4r$, $i = 1, 2, 3, 4$ (см. рисунок).



Пусть S_i — площадь грани, на которую опущена высота h_i. Докажем, что $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

Предположим противное. Без нарушения общности можно считать, что площади граней пронумерованы в порядке их неубывания: $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_4$. В силу предположения в приведённых неравенствах хотя бы одно должно быть строгим. Поэтому не все S_i равны между собой, и

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4} > S_1.$$

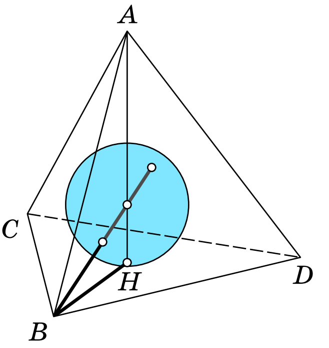
Выразим объём тетраэдра двумя способами:

$$V = \frac{1}{3}h_1 S_1 = \frac{1}{3}r(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) > \frac{1}{3}r \cdot 4S_1.$$

Отсюда $h_1 > 4r$, что противоречит неравенству $h_1 \leqslant 4r$.

Следовательно, все S_i равны, поэтому все h_i тоже равны, так как $h_i = \frac{3V}{S_i}$. Пусть h — длина этих равных высот.

Из приведённого выше соотношения для объёма получаем $h = 4r$, то есть неравенство $h \leqslant 4r$ обращается в равенство. Но это возможно только в случае, если каждая высота содержит центр сферы и точку касания с гранью.



Пусть H — основание высоты тетраэдра, опущенной из точки A (см. рисунок). Тогда H совпадает с точкой касания сферы и грани BCD. Пусть $BH = a$, тогда по теореме о касательной и секущей $a^2 = \frac{h}{2} \cdot h$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABH получаем

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = h^2 + a^2 = h^2 + \frac{h^2}{2} = \frac{3h^2}{2}.$$

Аналогично получаем такое же выражение для остальных рёбер тетраэдра, следовательно, они равны между собой, то есть тетраэдр правильный.

6. Назовём тройку чисел *триплетом*, если одно из них равно среднему арифметическому двух других. Дана бесконечная последовательность (a_n), состоящая из натуральных чисел. Известно, что $a_1 = a_2 = 1$ и при $n > 2$ число a_n — минимальное натуральное число такое, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нет трёх, образующих триплет. Докажите, что $a_n \leqslant \frac{n^2+7}{8}$ для любого n. (*Б. Бутырин*)

Решение. Очевидно, что последовательность не убывает. Действительно, неравенство $a_n > a_{n+1}$ противоречило бы выбору a_n. Также понятно, что любое число повторяется не более чем дважды, иначе в последовательности найдутся три одинаковых числа, а они образуют триплет. Теперь легко видеть, что если число c впервые встречается в последовательности в качестве a_n, то $a_{n+1} = a_n = c$.

Таким образом, для любого натурального числа k верно равенство $a_{2k-1} = a_{2k}$. Заметим, что тогда достаточно доказать требуемое неравенство только для нечётных индексов:

$$a_{2k} = a_{2k-1} \leqslant \frac{(2k-1)^2+7}{8} \leqslant \frac{(2k)^2+7}{8}.$$

Положим $b_k = a_{2k-1}$. Тогда нужно доказать, что

$$b_k \leqslant \frac{(2k-1)^2+7}{8} = \frac{k(k-1)}{2} + 1.$$

Отметим, что последовательность (b_n) обладает тем свойством, что при $k > 1$ очередной член последовательности b_k — минимальное натуральное число, которое не образует триплет с парами чисел из $\{b_1, \ldots, b_{k-1}\}$, где пара может иметь вид (b_i, b_i). При этом $b_k > b_{k-1}$, то есть (b_n) строго возрастает, в отличие от (a_n).

Пусть n — минимальное натуральное число, для которого требуемое неравенство неверно, то есть $b_n > \frac{n(n-1)}{2} + 1$. Это означает, что среди чисел от 1 до $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ содержится ровно $n-1$ член последовательности, поскольку при $m < n$ по предположению имеем

$$b_m \leqslant \frac{m(m-1)}{2} + 1 < \frac{n(n-1)}{2} + 1.$$

Обозначим через s количество чисел в промежутке от 1 до $\frac{n(n-1)}{2} + 1$, не принадлежащих последовательности (b_n). Тогда

$$s = \frac{n(n-1)}{2} + 1 - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = C_{n-1}^2 + 1.$$

Обозначим эти числа через d_i, $1 \leqslant i \leqslant s$.

В силу минимальности каждого из b_m для любого $1 \leqslant k \leqslant s$ найдутся такие числа b_{i_k}, b_{j_k}, где $i_k \leqslant j_k \leqslant n-1$, что (b_{i_k}, b_{j_k}, d_k) — триплет. При этом можно считать, что d_k — наибольший элемент в триплете, иное бы противоречило выбору наименьшего элемента последовательности (b_n), большего d_k. Отсюда $i_k < j_k$.

Тогда число способов выбрать пару (i_k, j_k) не превосходит C_{n-1}^2, то есть не больше количества способов выбрать два различных индекса из $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. В то же время парами (i_k, j_k) нужно обеспечить $s > C_{n-1}^2$ чисел d_i. Полученное противоречие завершает решение.

Комментарий. См. также решение задачи 6 для 9 класса (с. 28).

11 класс, второй день

1. Дана строго возрастающая функция $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ (где $\mathbb{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел), которая удовлетворяет соотношению $f(n+f(m)) = f(n) + m + 1$ для любых $m, n \in \mathbb{N}_0$. Найдите все значения, которые может принимать $f(2023)$. (*Т. Гарманова*)

Ответ: $f(2023) = 2024$.

Решение. 1) Подставив $m = 0$, $n = 0$, получим $f(f(0)) = f(0) + 1$. Если $f(0) = 0$, то получим $f(0) = f(0) + 1$, что невозможно.

2) Пусть $f(0) = a$, где $a \in \mathbb{N}$. Из первого пункта следует, что $f(a) = a + 1$. Если подставить $m = 0$, $n = a$, то получим, что $f(2a) = f(a) + 1 = a + 2$. Поэтому значения функции на концах отрезка $[a; 2a]$ являются двумя последовательными натуральными числами. По условию функция $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ строго возрастает, а значит, на отрезке $[a; 2a]$ не должно быть других целых точек помимо a и $2a$, так как в противном случае значения в этих точках совпадали бы с $a+1$ или $a+2$, что противоречило бы строгому возрастанию. Следовательно, $2a - a = 1$, т. е. $a = 1$.

Подставляя в исходное соотношение $m = 0$ и учитывая равенство $f(0) = 1$, получаем $f(n+1) = f(n) + 1$. Таким образом, $f(n) = n + 1$, следовательно, $f(2023) = 2024$.

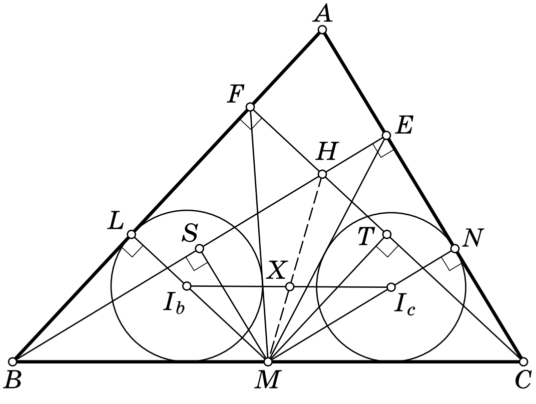
2. Какое наименьшее количество различных целых чисел нужно взять, чтобы среди них можно было выбрать как геометрическую, так и арифметическую прогрессию длины 5? (*М. Евдокимов*)

Ответ: 6.

Решение. Приведём пример шести целых чисел, удовлетворяющих условию: -8, -2, 1, 4, 10, 16. Числа 1, -2, 4, -8, 16 образуют геометрическую прогрессию, а числа -8, -2, 4, 10, 16 — арифметическую прогрессию.

Покажем, что никакие пять различных целых чисел не удовлетворяют условию задачи. Предположим противное: пусть найдутся пять целых чисел, одновременно образующих геометрическую прогрессию и, возможно, в другом порядке, арифметическую прогрессию. Тогда они имеют вид b, bq, bq^2, bq^3, bq^4. Заметим, что $b \neq 0$ и $q \neq 0$ по определению геометрической прогрессии. Числа b, bq^2, bq^4 всегда одного знака и в арифметической прогрессии идут либо подряд при $q<0$, либо через один при $q>0$. В любом случае должно выполняться равенство $2bq^2=b+bq^4$, т. е. $b(q^2-1)^2=0$, откуда $q=\pm1$, но тогда среди чисел есть равные, что противоречит условию. Следовательно, пяти чисел недостаточно.

3. В треугольнике ABC высóты BE и CF пересекаются в точке H, точка M — середина стороны BC, а X — точка пересечения внутренних касательных к окружностям, вписанным в треугольники BMF и CME. Докажите, что точки X, M и H лежат на одной прямой. (*И. Михайлов*)



Решение 1. Пусть S, T — середины высот BE и CF, а L, N — середины отрезков BF и CE (см. рисунок). Обозначим окружности, вписанные в треугольники BMF, CME, через ω_1, ω_2, а их центры — через I_b и I_c соответственно. Треугольники BMF и CME — равнобедренные, поэтому точки I_b и I_c лежат на соответствующих высотах ML и MN этих треугольников. Отрезки BI_b и CI_c являются биссектрисами треугольников MLB и MNC, поэтому, записывая для них основное свойство биссектрисы, получаем соотношения $\frac{MI_c}{NI_c}=\frac{MC}{NC}$, $\frac{MI_b}{LI_b}=\frac{MB}{LB}$. Разделив первое на второе и учитывая равенство $MB=MC$, получим, что $\frac{MI_c}{MI_b}\cdot\frac{LI_b}{NI_c}=\frac{LB}{NC}$. Поскольку X — центр гомотетии, переводящей ω_1 в ω_2, то X лежит на линии центров I_bI_c и верно равенство $\frac{LI_b}{NI_c}=$ $=\frac{XI_b}{XI_c}$. Но тогда $\frac{MI_c}{MI_b}\cdot\frac{LI_b}{NI_c}=\frac{MI_c}{MI_b}\cdot\frac{XI_b}{XI_c}=\frac{MI_c}{MI_b}\cdot\frac{S_{MXI_b}}{S_{MXI_c}}=\frac{\rho(X, MI_b)}{\rho(X, MI_c)}$,

где $\rho(X, AB)$ обозначает расстояние от точки X до прямой AB. С другой стороны, по свойству средней линии $MS \parallel AC$ и $MT \parallel AB$, то есть $MS \perp BE$ и $MT \perp CF$. Значит, $MLFT$ и $MNES$ — прямоугольники, то есть $MT = LF$ и $MS = NE$. Тогда выполнены равенства $\frac{LB}{NC} = \frac{LF}{NE} = \frac{MT}{MS} = \frac{\rho(H, ML)}{\rho(H, MN)}$, где последнее равенство выполнено, поскольку MS и MT есть в точности общие перпендикуляры к парам параллельных прямых $BE \parallel MN$ и $CF \parallel ML$. Собирая все доказанные равенства вместе, получаем, что $\frac{\rho(H, ML)}{\rho(H, MN)} = \frac{LB}{NC} = \frac{MI_c}{MI_b} \cdot \frac{LI_b}{NI_c} = \frac{\rho(X, MI_b)}{\rho(X, MI_c)}$, откуда немедленно следует, что точки M, X и H лежат на одной прямой.

Решение 2. Как и в первом решении, обозначим окружности, вписанные в треугольники BMF и CME, через ω_1, ω_2, их центры через I_b и I_c соответственно, а середины отрезков BF и CE — через L и N. Пусть также Y — точка пересечения внешних касательных к ω_1, ω_2. Заметим, что четвёрка точек (I_b, I_c, X, Y) — гармоническая, то есть двойное отношение $(I_b, I_c; X, Y)$ равно -1. Спроецируем эту четвёрку точек на прямую BE с центром в точке M. Точка Y лежит на прямой BC, поскольку эта прямая является одной из внешних касательных к ω_1 и ω_2, поэтому Y перейдёт в B. Точка I_b перейдёт в точку R пересечения прямых ML и BH, которая является серединой BH, поскольку в треугольнике BFC отрезок ML — средняя линия. Точка I_c перейдёт в бесконечно удалённую точку прямой BH, поскольку $MI_c \parallel BH$. Но при центральной проекции сохраняется двойное отношение четвёрки точек, а четвёрка (R, ∞, H, B) — гармоническая. Значит, образом точки X при данной проекции является точка H, что и требовалось доказать.

4. Имеются абсолютно точные двухчашечные весы и набор из 50 гирь, веса которых равны $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$, …, $\operatorname{arctg} \frac{1}{50}$. Докажите, что можно выбрать 10 из них и разложить по 5 гирь на разные чаши весов так, чтобы установилось равновесие. (*М. Евдокимов*)

Решение. Сначала покажем, что в данном наборе есть тройки гирь, одна из которых уравновешивает две другие.

Все веса не превосходят $\pi/4$, поэтому равенство

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}+\operatorname{arctg}\frac{1}{m}\right)=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right)$$

равносильно равенству $\operatorname{arctg}\frac{1}{n}+\operatorname{arctg}\frac{1}{m}=\operatorname{arctg}\frac{1}{k}$.

Воспользовавшись формулой $\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}$, получим

$$\frac{n+m}{nm-1}=\frac{1}{k},$$

т. е. $nm-k(n+m)=1$. Добавив в этом равенстве к обеим частям k^2 и разложив на множители, получим $(n-k)(m-k)=k^2+1$. Выбирая теперь различные натуральные k и раскладывая k^2+1 на множители, найдём подходящие тройки, в которых каждое число не превосходит 50. Результат для $k\leqslant 5$ и $n<m$ представлен в следующей таблице:

k	1	2	3	4	5
(n, m)	(2, 3)	(3, 7)	(4, 13) (5, 8)	(5, 21)	(6, 31) (7, 18)

Теперь покажем, как разложить гири по чашам:

1-я чаша		2-я чаша
1	=	2, 3
5, 21	=	4
6, 31	=	7, 18

(указанному в таблице значению n соответствует гиря весом $\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$).

Таким образом, нам удалось выбрать 10 гирь и разложить по 5 гирь на разные чаши весов так, чтобы установилось равновесие.

5. В выпуклом многограннике обозначим через В, Р и Т соответственно число вершин, рёбер и максимальное число треугольных граней, которые имеют общую вершину. Докажите, что $\mathrm{B}\sqrt{\mathrm{P}+\mathrm{T}}\geqslant 2\mathrm{P}$.

Например, для тетраэдра ($\mathrm{B}=4$, $\mathrm{P}=6$, $\mathrm{T}=3$) выполняется равенство, а для треугольной призмы ($\mathrm{B}=6$, $\mathrm{P}=9$, $\mathrm{T}=1$) или куба ($\mathrm{B}=8$, $\mathrm{P}=12$, $\mathrm{T}=0$) имеет место строгое неравенство. (*О. Косухин*)

Решение. Степенью вершины многогранника называется количество исходящих из неё рёбер этого многогранника. Вершины называются *смежными*, если они соединены ребром.

Пусть A — произвольная вершина многогранника, k — её степень, m_j — степени всех смежных с ней вершин ($j = 1$, $2, \dots, k$), занумерованных в произвольном порядке. Тогда $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ — это количество всех рёбер, исходящих из смежных с A вершин, учтённых один или два раза, причём дважды учтены те и только те рёбра, которые лежат против вершины A в некоторой треугольной грани многогранника. Значит, $m_1 + m_2 + \dots + m_k \leqslant \mathrm{Р} + \mathrm{Т}$. Отсюда, используя известное неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим, получаем

$$\frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} + \dots + \sqrt{m_k}}{k} \leqslant \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_k}{k}} \leqslant \frac{\sqrt{\mathrm{Р} + \mathrm{Т}}}{\sqrt{k}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\frac{m_1}{k}} + \sqrt{\frac{m_2}{k}} + \dots + \sqrt{\frac{m_k}{k}} \leqslant \sqrt{\mathrm{Р} + \mathrm{Т}}.$$

Обозначим сумму в левой части последнего неравенства через $S(A)$.

Пусть A_i ($i = 1, 2, \dots, \mathrm{В}$) — все вершины многогранника, занумерованные в произвольном порядке, а n_i ($i = 1, 2, \dots, \mathrm{В}$) — их соответственные степени. Для любой пары смежных вершин A_i и A_j по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{n_j}{n_i}} + \sqrt{\frac{n_i}{n_j}} \geqslant 2.$$

Складывая эти неравенства по всем неупорядоченным парам $\{A_i, A_j\}$ смежных вершин многогранника, получаем

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{В}} S(A_i) \geqslant 2\mathrm{Р}.$$

По доказанному выше неравенству $S(A) \leqslant \sqrt{\mathrm{Р} + \mathrm{Т}}$, отсюда следует требуемая оценка.

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6 класс (5967 работ)

	1	2	3	4	5	6
8						9
7					340	5
6			397	160	23	0
5		143	36	0	600	10
4	1924	262	161	6	102	0
3	98	1428	49	0	22	0
2	209	347	286	165	1326	33
1	191	73	259	0	139	31
0	3545	3714	4779	5636	3415	5879

7 класс (3521 работа)

	1	2	3	4	5	6
8					34	54
7					0	25
6			654	16	0	3
5			18	4	0	13
4	1619	1847	162	37	5	4
3	2	3	71	1	0	49
2	0	0	209	3	12	17
1	1	2	182	168	1	29
0	1899	1666	2225	3291	3469	3327

8 класс (2127 работ)

	1	2	3	4	5	6
$+$	734	781	234	46	34	37
$\pm$	118	126	9	18	1	5
$\mp$	41	70	1	8	5	37
$-$	829	962	970	1403	861	1202
0	405	188	913	652	1226	846

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

9 класс (*1375 работ*)

	1	2	3	4	5	6
+	1034	264	100	23	15	6
±	8	49	14	4	7	2
∓	5	120	167	62	15	4
−	296	579	444	351	561	391
0	32	363	650	935	777	972

10 класс (*1087 работ*)

	1	2	3	4	5	6
+	241	145	121	30	11	11
±	200	52	5	2	23	3
∓	131	191	94	38	7	11
−	339	472	418	645	314	368
0	176	227	449	372	732	694

11 класс, первый день (*723 работ*)

	1	2	3	4	5	6
+	431	225	124	160	32	27
±	31	12	56	27	2	5
∓	35	15	21	31	7	44
−	226	471	522	505	682	647

11 класс, второй день (*265 работ*)

	1	2	3	4	5
+	180	89	25	43	0
±	6	31	2	0	0
∓	7	16	1	8	2
−	72	129	237	214	263

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики, в котором представлены все основные направления современной математики.

С 1933 года на мехмате было подготовлено свыше 40 тысяч специалистов в самых разных областях математики и механики. Среди них около 5 тысяч кандидатов и докторов наук, более 50 академиков, 6 лауреатов Филдсовской премии (С. П. Новиков, Г. А. Маргулис, В. Г. Дринфельд, М. Л. Концевич, В. А. Воеводский, А. Ю. Окуньков). Сейчас на мехмате работают 16 академиков и 13 членов-корреспондентов РАН. В 2019 году в России по решению Правительства РФ созданы 4 математических центра мирового уровня; мехмат — соорганизатор одного из них.

Научная работа на мехмате происходит в рамках научных школ. Во главе школы стоит один или несколько ученых, вокруг которых группируются их ученики и ученики их учеников. Выбирая научного руководителя и кафедру, студент попадает в большой научный коллектив. А студентам младших курсов помогают включиться в научную работу организованные кафедрами просеминары.

Система образования на мехмате динамично развивается: организуются новые курсы и циклы курсов, открываются новые образовательные программы и т. д. В частности, в 2021 году впервые прошел набор на программу «Фундаментальная математика и математическая физика» (fmmp.math.msu.ru), включающую самые современные курсы по математике и математической физике.

Большое внимание на факультете уделяется прикладным исследованиям: изучаются атомные реакторы, свойства химических веществ, прогнозируется погода, анализируются экономические процессы и пр.

Выпускники мехмата работают в Московском университете и других крупнейших вузах страны, в академических институтах. Практически вся современная московская математическая школа вышла с мехмата. Мехматяне также работают в школах, в авиакосмической отрасли, в инжиниринговых компаниях, в IT, в банках, в страховании, — везде, где нужны фундаментальные знания, аналитический ум, навыки работы с большими объемами информации.

Поэтому мехмат всюду плотен — где бы вы ни оказались, где-то рядом есть наши выпускники…

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ НИУ ВШЭ

создан в 2007 г. при участии Независимого Московского Университета для подготовки ведущих специалистов мирового уровня в области чистой математики, ее приложений и математического образования. Лидерские позиции НИУ ВШЭ в области математики отражены в ключевых предметных рейтингах: университет вошел в 2022 году в топ-75 по рейтингу QS по рейтингу ARWU, став в последнем единственным представителем России.

Отличительная особенность в факультета — сочетание глубокой фундаментальной подготовки с возможностью раннего погружения в интересующую область чистой математики или ее приложений. Этой цели служат индивидуальные учебные планы и большой объем персонального взаимодействия преподавателя с каждым студентом, начиная с 1 курса (включая сдачу листочков и курсовые работы), а также вовлечение студентов в активную научную жизнь. На факультете действует 4 международные лаборатории, специализирующиеся на различных областях математики, и открытая в 2023 году лаборатория математического образования. Для старшекурсников, ориентированных на приложения, есть возможность участвовать в работе проектно-учебных групп с индустриальными партнерами (Тинькофф, Huawei).

Благодаря такому подходу выпускники, нацеленные на академическую карьеру, поступают в лучшие аспирантуры мира, а остальные неизменно востребованы в IT, финтехе и других наукоемких приложениях.

Помимо программы общего профиля «Математика», на факультете есть программа совместного бакалавриата с Центром педагогического мастерства, нацеленная на подготовку на высококвалифицированных преподавателей физико-математических школ.

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК НИУ ВШЭ

создан в 2014 году совместно с компанией «Яндекс». Факультет ведет подготовку специалистов высокого уровня по работе с данными, аналитиков, исследователей в области компьютерных наук и программных инженеров для ведущих ИТ-компаний и исследовательских центров. Бакалаврские программы «Прикладная математика и информатика» и «Программная инженерия» ежегодно привлекают сильнейших абитуриентов страны. В 2018 году открыта англоязычная программа двух дипломов «Прикладной анализ данных» совместно с Лондонской Школой Экономики.

Наряду с отличной фундаментальной подготовкой в области математики и информатики большое внимание уделяется прикладным курсам и проектной работе, построению индивидуальной образовательной траектории. В числе преподавателей — ведущие российские математики и эксперты в области Computer Science, международные специалисты, исследователи из научных институтов, сотрудники высокотехнологичных компаний, победители олимпиад по спортивному программированию ICPC и математических олимпиад.

Магистерские программы ФКН реализуются совместно со Сбером, Сколтехом, Школой анализа данных Яндекса, Институтом проблем передачи информации и Институтом системного программирования РАН. На факультете четырнадцать научных лабораторий. Среди реализуемых проектов — применение методов машинного обучения к обработке данных на экспериментах Большого адронного коллайдера, анализ динамики сообществ в графах и кластеризация, разработки в области биоинформатики и автоматической обработки текстов. Наши студенты участвуют в фундаментальных и прикладных проектах, побеждают на хакатонах и олимпиадах, проходят стажировки в ведущих научных центрах и компаниях-лидерах ИТ-индустрии.

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ МОСКОВСКОГО ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА (МФТИ)

МФТИ занимает 1 место среди технических вузов России в рейтинге лучших университетов мира Times Higher Education по направлениям «Computer Sciences» и «Physical Sciences».

Физтех-школа прикладной математики и информатики МФТИ специализируется на образовании и исследованиях в области чистой и прикладной математики, компьютерных наук и технологий работы с большими данными и искусственным интеллектом. Образовательные программы ФПМИ, создаваемые на стыке этих областей, актуализируются ежегодно. В 2022 году обновлен трек по чистой математике (совместно с МИАН), открыт набор на новые треки по экономике (с РЭШ), олимпиадному программированию, математическому и IT-образованию (с Яндекс, Сириус).

Благодаря системе индивидуальных учебных планов, разнообразию базовых кафедр и лабораторий студенты выстраивают образовательную траекторию в соответствии со своими интересами, а также участвуют в исследовательской работе уже с первых курсов бакалавриата.

Мощная фундаментальная подготовка, закладываемая на младших курсах, позволяет будущим выпускникам не упираться в потолок возможностей и справляться с решением задач любой сложности. А начиная со второго-третьего курса студенты привлекаются к работе на базовых кафедрах от ведущих IT-компаний (Тинькофф, Яндекс, 1С, А4, СБЕР и др.) и институтов РАН (МИАН, ИСП РАН, ВЦ РАН, ИППИ РАН и др.).

Такое сочетание — Академии и Индустрии — не имеет аналогов и позволяет предоставить выпускникам ФПМИ максимальную свободу в выборе дальнейшей карьерной траектории.

Сайт: fpmi.mipt.ru Вконтакте: vk.com/abitu

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК СПбГУ

— сообщество увлеченных своим делом профессионалов, в которое мы приглашаем Вас. В 2019 году факультет МКН объединил новые образовательные программы «Науки о данных» (разработана совместно с компанией Яндекс) и «Современное программирование» (разработана авторами Computer Science Centre) с программами бакалавриата и магистратуры по направлению «Математика», развивавшимися с 2015 года совместно с лабораторией им. П. Л. Чебышева. Затем была открыта программа аспирантуры, в прошлом году прошел первый набор на магистерскую программу «Разработка программного обеспечения и науки о данных».

В работу со студентами вовлечен выдающийся коллектив преподавателей и научных сотрудников, председатель Совета программы «Математика» — филдсовский лауреат С. К. Смирнов. Студенты МКН СПбГУ получают глубокое понимание фундаментальных основ современной математики и спектра возможных приложений, а также полную свободу в выборе своей траектории. С третьего курса студенты выбирают из 100+ спецкурсов примерно половину предметов каждый семестр. Посмотрите сами удобные учебные планы интересующих программ:

Математика `bit.ly/syllabus_math`
Науки о данных `bit.ly/syllabus_maad`
Современное программирование `bit.ly/syllabus_sp`

Студенты активно вовлекаются в научную работу в сотрудничестве с лабораториями СПбГУ, а также в работу над программными продуктами под руководством профессионалов из индустрии. Многие задачи поступают от партнеров факультета, среди которых такие крупные компании как Газпром нефть, Яндекс, ВКонтакте. Выпускники МКН собирают портфолио, с которым могут уверенно чувствовать себя при поступлении на любые магистерские и

PhD программы мира или строить карьеру в передовых областях IT-индустрии. Наш приём 55 + 30 + 30 человек на три программы позволяет с первого семестра много общаться с каждым студентом и создавать атмосферу, способствующую индивидуальному развитию. Все занятия проходят в центре Санкт-Петербурга — на Васильевском острове, а комфортное общежитие расположено на расстоянии двадцатиминутной прогулки.

joinmkn.ru

Задать вопрос о поступлении в чате: t.me/mathcs_admission
Новости факультета ВКонтакте: vk.com/spbumathcs
E-mail: math-cs@spbu.ru

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru

www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»

www.problems.ru

На сайте www.problems.ru размещаются все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.), Турнира городов и других соревнований, задачи из разных книг. Большинство задач приведено с решениями, есть тематический рубрикатор.

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ»

zadachi.mccme.ru

Более 10 000 задач по планиметрии и 3000 задач по стереометрии с решениями, чертежами, атрибутами для тематического поиска и прослеживания взаимосвязей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ

www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях.

Недавно сайту исполнилось 15 лет, открылась его новая версия, каждую неделю появляются новые материалы.

АРХИВ ИЗДАТЕЛЬСТВА «MATHESIS»

maTHesis.ru

Одесское издательство «Mathesis» с 1904 по 1925 год выпускало удивительно интересные книги. Некоторые из них стали классикой, часть сейчас незаслуженно забыта.

Ясность и доступность изложения, подбор научно-популярных книг поможет лучше понять математику, физику, астрономию, другие естественные науки, а также историю их познания.

Чтение этих книг заведомо будет полезно молодому поколению, а также тем, кто занимается его образованием и воспитанием.

Книгоиздательство научныхъ и популярно научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ

МЕХАНИЗМЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

tcheb.ru

В проекте собираются все механизмы, созданные Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821—1894), великим российским математиком. Задача проекта — навсегда сохранить уникальное наследие путем создания высокоточных компьютерных моделей уцелевших механизмов, воссоздать уже утраченные по архивным документам. По договоренности с музеями моделирование производится на основе тщательного измерения всех параметров оригиналов.

К 200-летию Чебышева открылась новая версия сайта.

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЕ ЖУРНАЛЫ В ИНТЕРНЕТЕ

Первые научно-популярные журналы начали выходить в России более двух веков назад. На их статьях выросло не одно поколение российских ученых, инженеров, просто думающих и читающих людей самых разных родов занятий. Сейчас старые номера этих журналов доступны читателям лишь в ничтожном числе библиотек. Электронные архивы призваны сделать их материалы доступными для широкой аудитории.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (1886—1917)

vofem.ru

Журнал, фактически заложивший традиции жанра в литературе на русском языке. За 31 год его существования вышло 674 выпуска В.О.Ф.Э.М.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы и многое другое. Среди постоянных рубрик журнала были, например: «Статьи, посвященные вопросам преподавания математики и физики», «Опыты и приборы», «Математические мелочи», «Библиографический отдел».

Статьи составлялись настолько популярно, насколько это возможно без ущерба для научной стороны дела.

ЖУРНАЛ «ПРИРОДА» (1912—)

priroda.ras.ru

Ежемесячный научно-популярный журнал Российской академии наук (РАН) «Природа» — одно из старейших в России изданий. Первый номер этого журнала вышел в 1912 году.

Фактически перед вами огромная энциклопедия по естественным наукам, составленная и регулярно пополнявшаяся отечественными учеными на протяжении 100 лет.

ЖУРНАЛ «КВАНТИК» (2012—)

kvantik.com

В журнале вы найдёте статьи и задачи по математике, лингвистике, физике, химии, биологии и другим естественным наукам. Журнал доступен школьникам 5—8 классов, но может быть интересен любознательным читателям любого возраста.

ЖУРНАЛ «КВАНТ» (1970—)

kvant.ras.ru

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

СБОРНИКИ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ» (3 сер., 1997—)

www.mccme.ru/free-books/matpros.html

Сборники с таким названием выходили в 1934—38 и 1957—61 годах. Сборники новой серии играют роль связующего звена между специальной и популярной математической литературой. Математическое содержание «должно быть понятно вдумчивому и настойчивому читателю, даже при отсутствии специальной подготовки». Кроме того в сборниках публикуются материалы о математической жизни, материалы по преподаванию математики.

СЕРИИ КНИГ

БИБЛИОТЕКА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»

mccme.ru/mmmf-lectures/books/

Осенью 1999 года Московское математическое общество, Малый мехмат МГУ и Московский центр непрерывного математического образования возобновили популярные лекции по математике для школьников 9–11 классов. В том же году возникла серия небольших брошюр по материалам избранных лекций — вышло более 40 выпусков.

БРОШЮРЫ ЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ «СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

mccme.ru/dubna/books/

написаны по материалам интенсивных мини-курсов, вплотную подводящих студентов и подготовленных старшеклассников к действительно современной математике.

А на странице mccme.ru/dubna/courses/ доступны видеозаписи многих занятий ЛШСМ.

«ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

ashap.info/Knigi/Matkruzhki/

Главный адресат серии — школьный учитель математики, который понимает, что для пробуждения интереса к математике и для развития учеников школьных уроков часто не хватает. Но брошюры могут быть интересны и полезны и школьникам.

В брошюру по каждой теме входят разработки нескольких занятий с изложением необходимой теории, разобранными примерами, задачами (к ним приводятся подробные решения) и методическими указаниями. Изложение каждой темы начинается практически «с нуля» или, во всяком случае, там, где заканчиваются стандартные школьные учебники.

Двадцать вторая летняя школа
«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»
имени Виталия Арнольда

для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс) пройдет с 18 по 29 июля 2023 года в Подмосковье.

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов.

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. Если вы хотите участвовать в работе школы, заполните до 20 мая анкету участника.

Предварительное согласие провести занятия на школе дали И. В. Аржанцев, В. А. Ватутин, А. А. Гайфуллин, С. О. Горчинский, Д. Н. Запорожец, Г. А. Кабатянский, А. Я. Канель-Белов, М. А. Королев, Е. Д. Косов, А. Г. Кузнецов, Д. О. Орлов, И. А. Панин, Г. Ю. Панина, Т. Е. Панов, А. М. Райгородский, Г. Б. Шабат.

Материалы прошедших школ и информацию о ЛШСМ-2023 смотрите на сайте

www.mccme.ru/dubna

Контактный e-mail оргкомитета dubna@mccme.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

LXXXVI Московская математическая олимпиада
Задачи и решения

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-08-04

ВСЕ КНИГИ ПО МАТЕМАТИКЕ
В МАГАЗИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА»
В МЦНМО

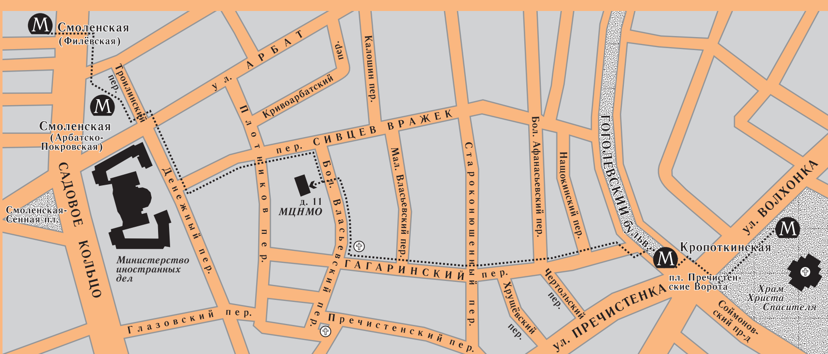
В магазине представлен полный ассортимент книг издательства МЦНМО. Здесь также можно найти книги по математике ведущих издательств.

Представлен широкий ассортимент книг для школьников, учителей, руководителей математических кружков. У нас также можно найти учебники и научные монографии ведущих российских и зарубежных математиков.

Магазин открыт в понедельник с 12^{00} до 20^{00},
вторник—пятница с 10^{00} до 20^{00},
в субботу с 11^{00} до 18^{00},
в воскресенье выходной.

Адрес: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Телефон для справок: (495) 745-80-31, (499) 241-72-85.
E-mail: biblio@mccme.ru
Интернет-магазин: biblio.mccme.ru

СХЕМА ПРОЕЗДА В МЦНМО



: