9 класс

Задача 1. Саша записывает числа 1, 2, 3, 4, 5 в каком-нибудь порядке, расставляет знаки арифметических операций «+», «−», «×» и скобки и смотрит на результат полученного выражения. Например, он может получить число 8 с помощью выражения $(4-3)\times(2+5)+1$. Может ли он получить число 123?

Формировать числа из нескольких других нельзя (например, из чисел 1 и 2 нельзя составить число 12). *(А. Голованов, А. Соколов)*

Ответ: да.

Решение. Например, $3\times(2\times4\times5+1)=123$. □

Задача 2. Даны две последовательности из букв А и Б, в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается вставить в какое-то место последовательности (возможно, в начало или в конец) одну или несколько одинаковых букв или убрать из последовательности одну или несколько подряд идущих одинаковых букв. Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций.

(В. Новиков)

Решение 1. Сначала решим аналогичную задачу для последовательностей из двух букв, а именно докажем, что из одной последовательности можно получить другую не более чем за 2 операции.

Если одна из последовательностей — это АА, а другая — ББ, то уберём все буквы первой последовательности, а затем добавим буквы второй последовательности. В противном случае в последовательностях есть одинаковые буквы (возможно, стоящие на разных местах). Оставим в первой последовательности эту букву, а другую уберём. Затем добавим в нужное место букву, которой недостаёт для второй последовательности.

Вернёмся к первоначальной задаче. Разобьём каждую последовательность на 50 пар подряд идущих букв. За две операции каждую пару первой последовательности можно переделать в соответствующую пару второй последовательности. □

Решение 2. Разобьём каждую из последовательностей на блоки подряд идущих одинаковых букв. В обеих последовательностях получится не более 50 блоков из букв А и не более 50 блоков из букв Б. Если получилось ровно по 50 блоков, то в обеих последовательностях буквы чередуются. Тогда либо последовательности совпадают, либо из первой можно получить вторую, отбросив первую букву и приписав такую же букву в конец.

Пусть в какой-то из последовательностей блоков из какой-то буквы не более 49. Понятно, что если из второй последовательности с помощью операций можно получить первую, то, проделав операции в обратном порядке, получим из первой последовательности вторую. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что в первой последовательности не более 49 блоков из букв А. Проделаем с первой последовательностью следующие операции.

1. Уберём все буквы А. На это потребуется не более 49 операций.

2. При необходимости изменим количество букв Б так, чтобы их количество совпало с количеством букв Б во второй последовательности. На это потребуется не более 1 операции.

3. Добавим в нужные места блоки из букв А, равные по длине соответствующим блокам букв А из второй последовательности. На это потребуется не более 50 операций.

В итоге вторая последовательность получена не более чем за 100 операций.

□

Решение 3. Докажем, что на самом деле можно справиться за не более чем 51 операцию. Как и в предыдущем решении, будем пользоваться тем, что если из второй последовательности можно получить первую, то можно и наоборот.

Пусть буква А встречается в первой и второй последовательностях соответственно a_1 и a_2 раз, а буква Б — соответственно $b_1 = 100 - a_1$ и $b_2 = 100 - a_2$ раз. Без ограничения общности будем считать, во-первых, что $a_1 + a_2 \leqslant 100 \leqslant b_1 + b_2$ (иначе можно поменять местами буквы), а во-вторых, что $a_1 \geqslant a_2$ (иначе можно поменять местами последовательности). Процесс перевода первой последовательности во вторую выполним в два этапа:

1. удалим из первой последовательности $a_1 - a_2$ букв А, чтобы их стало столько же, сколько во второй последовательности;

2. в полученной последовательности изменим количества букв Б, стоящих между буквами А, чтобы она совпала со второй.

Второй этап можно выполнить за не более чем $a_2 + 1$ операцию. Действительно, на обе последовательности (полученную после первого этапа и требуемую) можно смотреть как на последовательности из a_2 букв А, в промежутках между которыми вставлены ноль или более букв Б; всего промежутков ровно $a_2 + 1$ (позиции до и после крайних букв А тоже считаются «промежутками»). Ясно, что мы можем за не более чем одну операцию привести количество букв Б, стоящих в каком-то одном промежутке, к требуемому. Значит, за не более чем $a_2 + 1$ операцию мы можем «исправить» все количества букв Б на те, что должны быть в требуемой последовательности.

Осталось доказать, что первый этап можно выполнить за $50 - a_2$ операций.

Отметим, что $50 - a_2 \geqslant 0$, так как $a_2 = \frac{1}{2}(a_2 + a_2) \leqslant \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \leqslant 50$. При этом если $a_2 = 50$, то из $a_2 \leqslant a_1$ и $a_1 + a_2 \leqslant 100$ имеем и $a_1 = 50$. В этом случае первая стадия процесса тривиальна — ничего удалять не нужно. Далее разбираем случай $50 - a_2 > 0$.

Буквы Б в первой последовательности разделяют буквы А на $b_1 + 1$ непрерывных блоков из нуля или более букв (считаем, что блок из нуля букв А образуется, если две буквы Б стоят рядом, либо если буква Б стоит с краю последовательности). Достаточно доказать, что можно выбрать не более чем $50 - a_2$ блоков так, чтобы суммарно в них было не менее

$a_1 - a_2$ букв А; в этом случае мы за не более чем $50 - a_2$ операций можем произвольно уменьшить или удалить эти блоки и добиться требуемого количества букв А. Отметим, что если $50 - a_2 \geqslant b_1 + 1$, то можно просто выбрать все блоки, и в них окажется $a_1 \geqslant a_1 - a_2$ букв А; далее разбираем случай $50 - a_2 < b_1 + 1$.

Предположим противное: даже если выбрать $50 - a_2$ наибольших (по количеству букв) блоков, в них суммарно окажется не более $a_1 - a_2 - 1$ букв А. Заметим, что хотя бы один из выбранных блоков содержит не более одной буквы А по принципу Дирихле, так как

$$a_1 - a_2 - 1 < 2(50 - a_2) \quad \Leftarrow \quad a_1 + a_2 < 101 \quad \Leftarrow \quad a_1 + a_2 \leqslant 100.$$

Так как мы выбрали наибольшие блоки, то остальные $(b_1+1)-(50-a_2)$ блоков тоже содержат не более чем по одной букве А; суммарно в первой последовательности оказывается не более

$$(a_1 - a_2 - 1) + \big((b_1 + 1) - (50 - a_2)\big) = a_1 + b_1 - 50 = 50$$

букв А. Но мы знаем, что их a_1, откуда $a_1 \leqslant 50$.

В этом случае $a_1 - a_2 - 1 < 50 - a_2$; снова применяя принцип Дирихле, получаем, что один из выбранных блоков содержит ноль букв А. Тогда все остальные блоки тоже содержат ноль букв А. Следовательно, общее количество букв А в первой последовательности не превосходит $a_1 - a_2 - 1$; но мы знаем, что их ровно a_1, противоречие. $\square$

Замечание. Можно понять, что, например, последовательность ААА…АА нельзя перевести в АБАБ…АБ менее чем за 51 операцию. Действительно, в первой последовательности ноль блоков из букв Б, а во второй их 50. При это каждая операция увеличивает количество блоков не более чем на 1. А ещё должна быть хотя бы одна операция, уменьшающая количество букв А, и такая операция не может увеличивать количество блоков из букв Б.

Задача 3. Периметр треугольника ABC равен 1. Окружность ω касается стороны BC, продолжения стороны AB в точке P и продолжения стороны AC в точке Q. Прямая, проходящая через середины AB и AC, пересекает описанную окружность треугольника APQ в точках X и Y. Найдите длину отрезка XY. *(Д. Бродский)*

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение 1. Обозначим точку касания ω с отрезком BC через R. Рассмотрим отрезки AP и AQ. С одной стороны, они равны. С другой стороны, $BR = BP$ и $CR = CQ$, поэтому

$$AP + AQ = AB + BP + CQ + AC = AB + BC + AC.$$

Следовательно, длины отрезков AP и AQ равны половине периметра треугольника ABC.

Обозначим середины отрезков AB и AC через M и N соответственно. Отметим точки X' и Y' на прямой MN так, что $X'M = MA$ и $Y'N = NA$ (см. рис. 1). Заметим, что длина отрезка $X'Y'$ также равна половине периметра треугольника ABC, то есть $AP = X'Y'$. Но $X'M = MA$, откуда $MP = MY'$. Следовательно, $AX'M$ и PMY' — равнобедренные треугольники, откуда $AX'PY'$ — равнобокая трапеция.

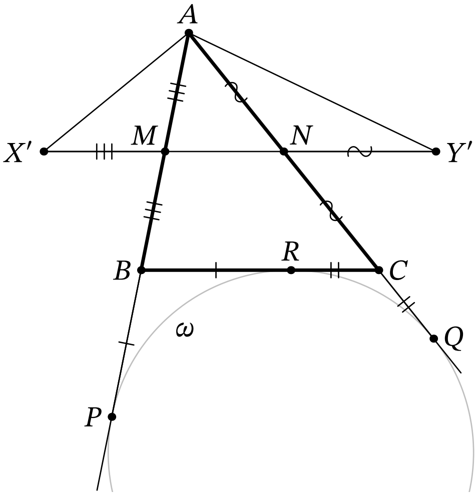

Рис. 1: к решению задачи 3

Как известно, равнобокую трапецию можно вписать в окружность, поэтому точка P лежит на описанной окружности γ треугольника $AX'Y'$. Аналогично точка Q лежит на γ, поэтому γ описана около треугольника PAQ. Следовательно, $X' = X$, $Y' = Y$ и $XY = 1/2$. □

Решение 2. Отметим точку I — центр окружности ω. Поскольку $\angle API = \angle AQI = 90°$, то точки A, P, I, Q лежат на одной окружности γ, построенной на отрезке AI как на диаметре. Обозначим через M и N середины отрезков AB и AC соответственно, а за X' и Y' — точки пересечения прямых BI и CI с прямой MN соответственно. Докажем, что X' и Y' лежат на γ.

Заметим, что углы PBI и MBX' равны как вертикальные, углы CBI и $MX'B$ равны, так как прямые BC и MN параллельны. Но BI — биссектриса угла PBC, поэтому $\angle MBX' = \angle MX'B$, то есть треугольник BMX' равнобедренный и $BM = MX'$. В треугольнике ABX' медиана $X'M$ равна половине стороны, поэтому этот треугольник прямоугольный с прямым углом X'. Таким образом, $\angle AX'I = 90°$, то есть X' лежит на γ, поэтому $X' = X$. Аналогично треугольник ACY' прямоугольный и $Y' = Y$. Тогда $XY = XM + MN + NY = 1/2$. □

Замечание. По сути, в решении доказан известный факт, что проекция вершины A на биссектрису внутреннего или внешнего угла лежит на средней линии треугольника.

Решение 3. В обозначениях предыдущего решения обозначим через a, b и c половины длин сторон BC, AC и AB соответственно, а через x и y — длины отрезков MX и NY соответственно. Запишем степени точек M и N относительно γ двумя способами:

$$\begin{cases} MX \cdot MY = MA \cdot MP, \\ NY \cdot NX = NA \cdot NQ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a+y) = c(a+b), \\ y(a+x) = b(a+c). \end{cases}$$

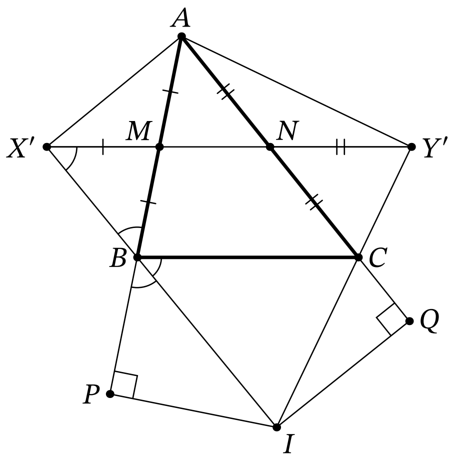

Рис. 2: к решению задачи 3

Вычтем второе уравнение из первого:

$$ax - ay = ac - ab \iff y = x + b - c.$$

Подставим в первое уравнение системы:

$$x(a + x + b - c) = c(a + b) \iff x^2 + x(a + b - c) - c(a + b) = 0.$$

По теореме Виета у полученного квадратного уравнения относительно x два корня: c и $-(a + b)$. Так как x положительно, то $x = c$. Аналогично $y = b$. Отсюда $XY = a + b + c = 1/2$. □

Решение 4. Как и во втором решении, заметим, что окружность γ построена на AI как на диаметре. Обозначим через ω' образ окружности ω при гомотетии с центром A и коэффициентом $1/2$. Поскольку AI — диаметр γ, то окружности γ и ω' имеют общий центр.

При той же гомотетии треугольник ABC переходит в треугольник AMN, поэтому ω' будет касаться прямых AP, AQ и XY. Таким образом, XY, AP и AQ — три хорды окружности γ, касающиеся концентрической окружности ω'. Значит, их длины равны. Как доказано в первом решении, длина отрезка AP равна половине периметра треугольника ABC, поэтому и длина XY равна половине периметра, то есть $1/2$. □

Задача 4. Дано натуральное число $n > 1$. Назовём положительную обыкновенную дробь (не обязательно несократимую) *хорошей*, если сумма её числителя и знаменателя равна n. Докажите, что любую положительную обыкновенную дробь, знаменатель которой меньше n, можно выразить через хорошие дроби (не обязательно различные) с помощью операций сложения и вычитания тогда и только тогда, когда n — простое число.

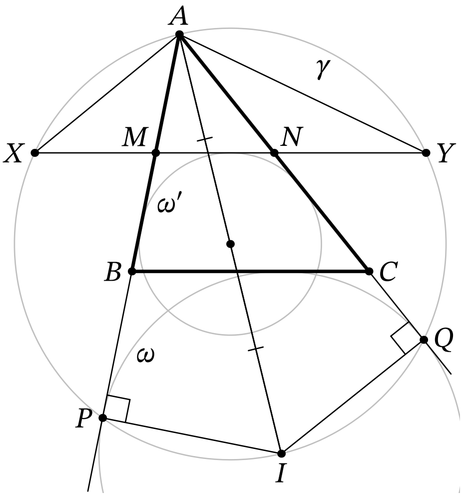

Рис. 3: к решению задачи 3

Напомним, что обыкновенная дробь — это отношение целого числа к натуральному.

(Т. Казицына)

Решение. Сначала докажем, что если n составное, то не любую дробь, знаменатель которой меньше n, можно выразить. Если среди хороших дробей есть сократимые, то сократим их. Обозначим НОК знаменателей всех полученных после сокращения дробей через N. Заметим, что знаменатели всех несократимых дробей, которые можно выразить, будут делителями N. Действительно, для всех хороших дробей это утверждение верно, а знаменатели суммы или разности дробей, знаменатели которых делят N, также будут делить N.

Пусть n делится на простое число p, и натуральное число α таково, что $p^\alpha < n \leqslant p^{\alpha+1}$. Рассмотрим какую-нибудь хорошую дробь $\frac{n-a}{a}$, у которой знаменатель a делится на p. Поскольку $a < n \leqslant p^{\alpha+1}$, то a не делится на $p^{\alpha+1}$. Заметим, что $n-a$ делится на p, поэтому дробь $\frac{n-a}{a}$ можно сократить на p. После сокращения знаменатель не будет делиться на p^α. Таким образом, N не будет делиться на p^α, следовательно, дробь $\frac{1}{p^\alpha}$ выразить не получится.

Докажем, что если n равно простому числу p, то любую дробь, знаменатель которой меньше n, можно выразить. Рассмотрим дробь $\frac{a}{b}$, где $b < p$. Так как p простое, то числа $p-a$ и a взаимно просты. Как известно, найдётся такое натуральное k, что $(p-a)k \equiv 1 \pmod{a}$. Пусть $(p-a)k = al + 1$ для целого неотрицательного l. Тогда

$$\frac{1}{a} = \frac{(p-a)k - al}{a} = k \cdot \frac{p-a}{a} - l = k \cdot \frac{p-a}{a} - (n-1)l \cdot \frac{1}{n-1}.$$

Таким образом, сложив k хороших дробей $\frac{p-a}{a}$ и $(n-1)l$ хороших дробей $\frac{1}{n-1}$, получим дробь $\frac{1}{a}$. Дробь $\frac{b}{a}$ представляется в виде суммы b дробей $\frac{1}{a}$, поэтому её также можно выразить. □

Задача 5. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны. *(А. Юран)*

Решение. Для каждой фигуры — параллелограмма и треугольника — рассмотрим все вершины фигур на границе. Для каждой фигуры проведём между соседними точками на границе векторы так, чтобы их направление соответствовало обходу границы фигуры против часовой стрелки.

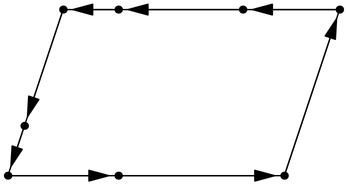

Рис. 4: к решению задачи 5

Рассмотрим произвольную прямую ℓ и все векторы, параллельные ей. Сумма этих векторов равна нулю. Действительно, к каждой линии разреза, параллельной ℓ, примыкают наборы противоположных векторов. Если ℓ параллельна сторонам 100-угольника, то сумма векторов, соответствующих противоположным сторонам 100-угольника, также равна нулю, так как они будут направлены в противоположные стороны и равны по длине.

С другой стороны, в каждом параллелограмме сумма векторов, соответствующих противоположным сторонам, равна нулю. Следовательно, и в двух треугольниках сумма всех векторов, параллельных ℓ, также будет нулевой.

Выберем в качестве ℓ прямую, параллельную какой-нибудь из сторон первого треугольника. Получим, что набор векторов второго треугольника, параллельных ℓ, — это векторы, противоположные векторам первого треугольника. Аналогично для двух других сторон. Поэтому для каждой стороны первого треугольника существует параллельная и равная ей по длине сторона второго треугольника. Следовательно, треугольники равны. □

Замечание. Разрезания из условия существуют, причём они могут быть устроены достаточно несимметричным образом (например, не обязательно все стороны треугольников параллельны сторонам 100-угольника, треугольники не обязательно: образуют параллелограмм, примыкают к сторонам 100-угольника, симметричны относительно центра 100-угольника). На рисунке 5 приведён пример разрезания 10-угольника.

Задача 6. Назовем тройку чисел *триплетом*, если одно из них равно среднему арифметическому двух других. Последовательность (a_n) строится следующим образом: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и при $n > 1$ число a_n — такое минимальное натуральное число, большее a_{n-1}, что

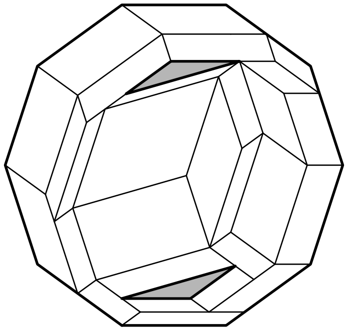

Рис. 5: к замечанию в задаче 5

среди чисел a_0, a_1, ..., a_n нет трёх, образующих триплет. Докажите, что $a_{2023} \leqslant 100\,000$.

(Б. Бутырин)

Решение. Обозначим через $b(n)$ двоичную запись числа n; например, $b(13) = 1101$. Обозначим число, *троичная* запись которого совпадает с $b(n)$, через $b(n)_3$; например, $b(13)_3 = 1101_3 = 1 + 9 + 27 = 37$. Докажем индукцией по n, что $a_n = b(n)_3$.

База индукции ($n \leqslant 1$) дана в определении. Переход: пусть для всех $i < n$ троичная запись числа a_i совпадает с $b(i)$. Необходимо доказать, что, во-первых, число $b(n)_3$ не образует триплета с какими-нибудь a_i и a_j для $i < j < n$ и, во-вторых, никакое меньшее число не удовлетворяет этому условию.

Предположим, что найдутся такие числа i и j, что $0 \leqslant i < j < n$, и $b(i)_3 + b(n)_3 = 2 \cdot b(j)_3$. Заметим, что при сложении чисел $b(i)_3$ и $b(n)_3$ в троичной системе счисления не возникает переходов через разряд, поэтому, если в результате получилось число $2 \cdot b(j)_3$, то на всех позициях, где в строке $b(j)$ стоит единица, в обеих строках $b(i)$ и $b(n)$ также стоят единицы, а на всех остальных позициях в этих строках стоят нули. Таким образом, $b(i) = b(j) = b(n)$, из чего следует, что $i = j = n$. Противоречие.

Докажем теперь, что любое число, меньшее $b(n)_3$ (и большее a_{n-1}), образует триплет с какими-нибудь a_i и a_j. Рассмотрим произвольное число x, удовлетворяющее неравенству $b(n-1)_3 < x < b(n)_3$. Поскольку $b(n-1)_3$ и $b(n)_3$ — это два соседних числа, чья троичная запись состоит из нулей и единиц, в троичной записи числа x есть двойка.

Пусть троичная запись числа x — это строка s_n. Построим строки s_i и s_j, состоящие из нулей и единиц и имеющие такую же длину, что и s_n, по следующему принципу: единицы в s_i стоят ровно на тех позициях, где в строке s_n стоят единицы; единицы в s_j стоят ровно на тех позициях, где в строке s_n стоят ненулевые цифры. Возьмём в качестве i число с двоичной записью s_i, а в качестве j — число с двоичной записью s_j. Пусть d_i, d_j и d_n — цифры в какой-то позиции строк s_i, s_j и s_n соответственно. Тогда заметим, что, во-первых, $d_i \leqslant d_j \leqslant d_n$, а во-вторых, $2d_j = d_i + d_n$. Более того, в тех позициях, где в строке s_n стоит двойка, выполняется цепочка строгих неравенств $d_i < d_j < d_n$. Значит, $i < j < n$, и числа

(a_i, a_j, x) образуют триплет, что и требовалось доказать.

Поскольку $2023 < 2048 = 2^{11}$, имеем, что в троичной записи числа a_{2023} не больше 11 цифр, ни одна из которых не превосходит 1. Значит,

$$a_{2023} \leqslant 3^0 + 3^1 + \ldots + 3^{10} = \frac{3^{11} - 1}{2} \leqslant \frac{243^2 \cdot 3}{2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{250^2 \cdot 3}{2} = 62\,500 \cdot \frac{3}{2} < 66\,666 \cdot \frac{3}{2} < 100\,000. \qquad \square$$

Замечание. На самом деле $a_{2023} = 88\,465$.