LXXXVI Московская математическая олимпиада

12 марта 2023 года • 10 класс

Задача 1. Про четыре целых числа a, b, c, d известно, что

$$a + b + c + d = ab + bc + cd + da + 1.$$

Докажите, что модули каких-то двух из этих чисел отличаются на 1.

Задача 2. В эстафетном забеге Москва — Петушки участвовали две команды по 20 человек. Каждая из команд по-своему разделила дистанцию на 20 не обязательно равных отрезков и распределила их между участниками так, чтобы каждый бежал ровно один отрезок (скорость каждого участника постоянна, но скорости разных участников могут быть различны). Первые участники обеих команд стартовали одновременно, а передача эстафеты происходит мгновенно. Какое максимальное количество обгонов могло быть в таком забеге? Опережение на границе этапов обгоном не считается.

Задача 3. Периметр треугольника ABC равен 1. Окружность ω касается стороны BC, продолжения стороны AB в точке P и продолжения стороны AC в точке Q. Прямая, проходящая через середины AB и AC, пересекает описанную окружность треугольника APQ в точках X и Y. Найдите длину отрезка XY.

Задача 4. На экране суперкомпьютера напечатано число $11\ldots1$ (всего 900 единиц). Каждую секунду суперкомпьютер заменяет его по следующему правилу. Число записывается в виде $\overline{AB}$, где B состоит из двух его последних цифр, и заменяется на $2\cdot A+8\cdot B$ (если B начинается на нуль, то он при вычислении опускается). Например, 305 заменяется на $2 \cdot 3 + 8 \cdot 5 = 46$. Если на экране остаётся число, меньшее 100, то процесс останавливается. Правда ли, что он остановится?

Задача 5. На плоскости даны две окружности ω_1 и ω_2, касающиеся внешним образом. На окружности ω_1 выбран диаметр AB, а на окружности ω_2 выбран диаметр CD. Рассмотрим всевозможные положения точек A, B, C и D, при которых $ABCD$ — выпуклый описанный четырёхугольник, и пусть I — центр его вписанной окружности. Найдите геометрическое место точек I.

Задача 6. На острове живут хамелеоны 5 цветов. Когда один хамелеон кусает другого, цвет укушенного хамелеона меняется на один из этих 5 цветов по некоторому правилу, причём новый цвет зависит только от цвета укусившего и цвета укушенного. Известно, что 2023 красных хамелеона могут договориться о последовательности укусов, после которой все они станут синими. При каком наименьшем k можно гарантировать, что k красных хамелеонов смогут договориться так, чтобы стать синими?

Например, правила могут быть такими: если красный хамелеон кусает зеленого, укушенный меняет цвет на синий; если зеленый кусает красного, укушенный остается красным, то есть «меняет цвет на красный»; если красный хамелеон кусает красного, укушенный меняет цвет на жёлтый, и так далее. (Конкретные правила смены цветов могут быть устроены иначе.)

XX устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 16 апреля. Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXVI Московской математической олимпиады —
на сайте `mmo.mccme.ru`